

УДК 539.3

ПЛОСКА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ВЗАЄМОДІЇ ЖОРСТКОГО КЛИНУ ТА ПРУЖНОГО ШАРУ ЗА ФРИКЦІЙНОГО ТЕПЛОУТВОРЕННЯ

Петро КРАСНЮК, Юрій МАНДЗИК, Роксоляна ЧАПОВСЬКА

*Львівська державна фінансова академія,
вул. Коперника, 4, 79000 Львів, Україна*

Сформульовано та побудовано розв'язок термопружної контактної задачі щодо взаємодії жорсткого клину та пружного шару за впливу теплоутворення від дії сил тертя при переміщенні штампа по поверхні основи. Розглянуто методику зведення граничної задачі термопружності до побудови розв'язку системи інтегральних рівнянь шляхом підстановки виразів для контактних напружень через інтерполяційні поліноми Лагранжа, коефіцієнти яких обчислюються з системи лінійних алгебричних рівнянь. Явно виділено логарифмічну особливість контактних напружень, спричинену існуванням розриву нахилу дотичної до профілю всередині ділянки взаємодії тіл. Досліджено вплив фрикційного теплоутворення на механізм взаємодії штампа з основою, а також проаналізовано ситуацію щодо зміни контактних напружень зі збільшенням кута при вершині утискуваного тіла.

Ключові слова: плоска контактна задача, жорсткий клин, пружний шар, фрикційне теплоутворення.

Сьогодні більшість досліджень термопружних контактних задач з врахуванням фрикційного теплоутворення проведено для тіл, модельованих пружними півпросторами [1–5], в які втискуються штампи з плоскою або параболічною основою. Водночас поза увагою дослідників залишаються задачі про вплив фрикційного теплоутворення на механізм взаємодії з основою штампа у формі клина. Однак таким класом задач не варто нехтувати, оскільки тіло у формі клина моделює дію ріжучого інструмента, а дослідження термомеханічних процесів, які відбуваються при механічній обробці матеріалу, потрібне для розроблення ефективних технологій у машинобудуванні.

Мета нашої праці – розглянути статичну термопружну контактну задачу для трибосистеми, що складається з пружного шару, зацмленого з основи, по поверхні якого переміщується штамп клиноподібної у плані форми. Враховується теплоутворення від дії сил тертя, підпорядкованих закону Амонтона.

У припущенні теплоізоляції штампа задача приведена до системи двох інтегральних рівнянь стосовно контактного тиску та функції температури ділянки контакту. Запропоновано числовий алгоритм розв'язку цієї системи рівнянь та досліджено вплив фрикційного теплоутворення на розподіл контактного тиску за взаємодії штампа та шару скінченної товщини h .

Контактні задачі теорії пружності про втиснення у пружний півпростір жорсткого клина розглядали у монографіях [6, 7].

Математичне формулювання задачі. Нехай жорсткий штамп у формі клина втиснутий віднесеною до одиниці довжини силою P до пружного шару товщиною h , жорстко защемленого з основи (рис. 1). Ділянка контакту між штампом і шаром описується нерівностями $|x| \leq a$; $|z| < \infty$. Припускається, що штамп у напрямі осі z переміщується по поверхні шару з малою швидкістю v . За рахунок дії сил тертя τ_{yz} , які виникають на співдотичних поверхнях і підпорядкованих закону Амонтона ($\tau_{yz} = f\sigma_y$), в площині контакту відбувається теплоутворення, причому внаслідок термоізоляції штамп-па все тепло, згенероване на контакті, скеровується тільки у шар. Між нижньою поверхнею шару та основою, температура якої дорівнює нулю, а також між верхньою площиною поза ділянкою контакту та оточуючим середовищем нульової температури припускається теплообмін за законом Ньютона. Впливом дотичних напружень τ_{yx} на ділянці контакту нехтуємо.

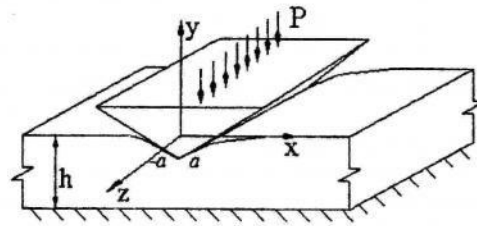


Рис. 1

Згадані припущення реалізують у системі плоску деформацію, тому в математичному плані задача зводиться до інтегрування системи диференціальних рівнянь теплопровідності

$$\partial_x^2 T + \partial_y^2 T = 0 \tag{1}$$

і термопружності

$$\begin{aligned} (1 - 2\nu)(\partial_x^2 u_x + \partial_y^2 u_x) + \partial_x(\partial_x u_x + \partial_y u_y) &= 2\alpha(1 + \nu)\partial_x T; \\ (1 - 2\nu)(\partial_x^2 u_y + \partial_y^2 u_y) + \partial_y(\partial_x u_x + \partial_y u_y) &= 2\alpha(1 + \nu)\partial_y T, \end{aligned} \tag{2}$$

за граничних і контактних умов

$$y = -h : \partial_y T = \gamma T; u_x = 0; u_y = 0, \tag{3}$$

$$y = 0 : |x| \leq a : \partial_y T = f\nu\lambda^{-1}p(x); u_y = -\delta + \text{ctg}(\alpha_0)|x|; \tau_{yx} = 0; \tag{4}$$

$$|x| > a : \partial_y T = -\gamma_0 T; \sigma_y = 0; \tau_{yx} = 0. \tag{5}$$

Замикають систему диференціальних рівнянь і граничних умов співвідношення рівноваги штамп-па як жорсткого цілого

$$\int_{-a}^a p(x) dx = P, \tag{6}$$

обмеженості контактного тиску $p(\pm a) = 0$ та умови теплового балансу [1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_y T(x, 0) dx = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} T(x, -h) dx. \quad (7)$$

У наведених формулах: δ – осадка штампа; α_0 – кут розклинення штампа; $p(x)$ – контактний тиск; T – температура; u_x, u_y – компоненти вектора переміщень; σ_y, τ_{yx} – компоненти тензора напружень; f – коефіцієнт тертя; E – модуль Юнга, α, ν, λ – відповідно коефіцієнти лінійного теплового розширення, Пуассона та теплопровідності; γ, γ_0 – коефіцієнт теплообміну відповідно між нижньою та верхньою площинами шару та оточенням. Решта позначень описано вище.

Побудова розв'язку та аналіз числових результатів. Сформульовану задачу (1)–(5) приведемо до системи двох інтегральних рівнянь стосовно контактної тиску та температури ділянки контакту згідно зі схемою, викладеною в [8], де використано інтегральне перетворення Фур'є за координатою x . Опустивши проміжні викладення, запишемо тільки остаточний результат – систему інтегральних рівнянь у безрозмірному вигляді. Для цього віднесемо лінійні розміри тіла до товщини шару h , напруження до величини $P h^{-1}$, температуру – до комбінації параметрів $\alpha E h (2P(1-\nu))^{-1}$ і, як наслідок, отримаємо

$$\begin{aligned} T(x, 0) - \frac{a}{\pi} B i_0 \int_{-1}^1 T(t, 0) \Phi(a(t-x), 0) dt &= \frac{a}{\pi} \chi \int_{-1}^1 p(t) \Phi(a(t-x), 0) dt; \\ \frac{a}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) [\Delta(a(t-x)) - \chi H(a(t-x))] dt - \\ - \frac{a}{\pi} B i_0 \int_{-1}^1 T(t, 0) H(a(t-x)) dt &= \delta_* - A_* a |x|; \quad |x| \leq 1, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \chi &= \alpha E h f \nu (2\lambda(1-\nu))^{-1}; \quad \delta_* = \delta E (2P(1-\nu^2))^{-1}; \\ A_* &= \text{ctg}(\alpha_0) E h (2P(1-\nu^2))^{-1}; \\ \Phi(x, y) &= \int_0^{\infty} \frac{\xi \text{ch}(\xi(1+y)) + B i \text{sh}(\xi(1+y))}{\xi (\xi \text{sh}(\xi) + B i \text{ch}(\xi)) + B i_0 (\xi \text{ch}(\xi) + B i \text{sh}(\xi))} \cos(\xi x) d\xi; \\ \Delta(x) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \frac{(3-4\nu) \text{ch}(\xi) \text{sh}(\xi) - \xi}{\xi^2 - (1-2\nu)^2 \text{sh}^2(\xi) + 4(1-\nu)^2 \text{ch}^2(\xi)} \cos(\xi x) d\xi; \end{aligned}$$

$$H(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \frac{(\xi^2 + (3 - 4\nu) \operatorname{sh}^2(\xi)) (\xi \operatorname{sh}(\xi) + Bi \operatorname{ch}(\xi)) + 2(1 - \nu) \xi (\xi \operatorname{ch}(\xi) - Bi \operatorname{sh}(\xi) + \operatorname{sh}(\xi))}{\xi (\xi (\xi \operatorname{sh}(\xi) + Bi \operatorname{ch}(\xi)) + Bi_0 (\xi \operatorname{ch}(\xi) + Bi \operatorname{sh}(\xi)))} \times \frac{\cos(\xi x) d\xi}{\xi^2 - (1 - 2\nu)^2 \operatorname{sh}^2(\xi) + 4(1 - \nu)^2 \operatorname{ch}^2(\xi)}$$

$p(x)$, $T(x, y)$, a – відповідно безрозмірні функції контактного тиску та температури, а також безрозмірна межа проміжку контакту; $Bi = \gamma h$, $Bi_0 = \gamma_0 h$ – критерії Біо. Координата y змінюється в межах $-1 \leq y \leq 0$.

Замикають систему (8) умови рівноваги та обмеженості контактних напружень, коли ширина клина є більшою від значення a

$$a \int_{-1}^1 p(x) dx = 1; \quad p(\pm 1) = 0. \tag{9}$$

Для визначення температури шару маємо інтегральне зображення

$$T(x, y) = \frac{a}{\pi} \chi \int_{-1}^1 p(t) \Phi(a(t - x), y) dt + \frac{a}{\pi} Bi_0 \int_{-1}^1 T(t, 0) \Phi(a(t - x), y) dt.$$

Зауважимо, що у випадку теплоізоляції поверхні $y = 0$ поза ділянкою контакту ($Bi_0 = 0$) задача суттєво спрощується. Треба розв'язати тільки одне інтегральне рівняння стосовно контактного тиску

$$\frac{a}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) [\Delta(a(x - t)) - \chi H(a(x - t))] dt = \delta_* - A_* a |x|; \quad |x| \leq 1 \tag{10}$$

за умов (9). Усі наведені формули для ядер правильні, коли в них прийняти $Bi_0 = 0$.

Розв'язок задачі (8), (9) шукатимемо з використанням відомого підходу [8]. Врахувавши те, що ядра інтегральних рівнянь (8) – функції $\psi(x)$ і $\Phi(x, 0)$ мають логарифмічну особливість [7] (ядра $H(x)$ та $\Phi(x, y)$ є регулярними, коли $y > 0$), вибираємо вираз для функції $p(x)$ таким:

$$p(x) = \frac{2A_*}{\pi} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{|x|} \right) + \frac{\psi(x)}{\sqrt{1 - x^2}}, \tag{11}$$

де $\psi(x)$ – неперервно-диференційована та обмежена функція, для якої добираємо подання у вигляді інтерполяційного полінома Лагранжа степеня n [9] за поліномами Чебишева першого роду $T_m(x)$ [10]

$$\psi(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \psi(x_j) \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} T_m(x_j) T_m(x) \right). \tag{12}$$

Тут $x_j = \cos((2j-1)\psi/(2n))$, ($j = 1, \dots, n$) – нулі полінома Чебишева першого роду порядку n [10], а при логарифмі у формулі (11) наведено асимптотичне значення контактної тиску при x , який прямує до нуля.

Щодо температури ділянки контакту, то $T(x, 0)$ також є неперервною та обмеженою функцією, для якої вибирається подання вигляду (12).

Підставивши вирази для контактної тиску (11) та температури вигляду (12) в систему інтегральних рівнянь (8) та знайшовши точно інтеграл з логарифмами за відомими формулами [11], а регулярні інтеграл обчисливши наближено за квадратурними формулами Гаусса, прийдемо до системи лінійних алгебричних рівнянь для обчислення коефіцієнтів розв'язання в інтерполяційних поліномах Лагранжа. Невідомий параметр ψ підбирається так, щоб з достатньою обчислювальною точністю (здебільшого, відносна похибка не перевищуватиме 10^{-5}) виконувалися умови рівноваги з (9). Для розрахунків достатньо взяти степінь інтерполяційного полінома, який дорівнює $n = 20$ і тоді відносна похибка обчислень не перевищуватиме 1%. Щодо визначення параметра a , то треба зробити два зауваження.

1. Якщо маємо справу зі штампом фіксованої ширини a , то остаточна формула для контактної тиску подається формулою (11).

2. У випадку, коли ширина клина перевищує значення a , то воно є невідомим і обчислюється з умови $\psi(\pm 1) = 0$ [7], яка за числових розрахунків еквівалентна співвідношенню $\psi(\pm 1) < 10^{-5}$, де згадане значення 10^{-5} визначає похибку обчислень. Як наслідок, остаточний розв'язок можемо подати так:

$$p(x) = \frac{2A_*}{\pi} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{|x|} \right) + \psi_1(x) \sqrt{1-x^2}, \quad (13)$$

де для неперервно-диференційованої та обмеженої функції $\psi_1(x)$ вибирається подання у вигляді інтерполяційного полінома Лагранжа степеня n [9] за поліномами Чебишева $U_n(x)$ [10] другого роду порядку n

$$\psi_1(x) = \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^n \psi_1(x_j) (1-x_j^2) \left(1 + \sum_{m=1}^{n-1} U_m(x_j) U_m(x) \right); \quad (14)$$

$x_j = \cos(j\pi/(n+1))$, ($j = 1, \dots, n$). Тоді остаточний вираз для температури ділянки контакту $T(x, 0)$ також подається у вигляді полінома (14). Розрив нахилу дотичної до профілю всередині ділянки контакту (точка $x = 0$) призводить до наявності логарифмічної особливості контактної тиску $p(x)$.

На рис. 2, а та 2, б зображено розподіл контактної тиску та вигляд нормальних переміщень контактної поверхні шару $u_y(x, 0)$ пружної задачі, знайдені для різних значень параметра $\chi = (fv\alpha Eh)/(2\lambda(1-\nu))$, що, як було показано в [8], визначає інтенсивність теплоутворення. Індеси кривих цих рисунків відповідають таким величинам параметра χ : 0,5, 1,0 і 1,5 (штрихові лінії – $\chi = 0$). Решта параметрів $\nu = 0,3$, $Bi = 2,0$, $Bi_0 = 0$, $\alpha_0 = \pi/4$ та $(Eh)/(2P(1-\nu^2)) = 0,25$. Зростання параметра χ спричиняє зменшення осадки штампа, причому настає такий момент, що рівновага штампа

відбувається при від'ємних значеннях δ . Збільшення χ є причиною зменшення півширини ділянки контакту a , а за фіксованого χ ріст притисної сили P збільшує $|\delta|$ та значення a . Якщо рівновага штампa відбулася при від'ємних значеннях осадки, то ріст притисної сили додаткового

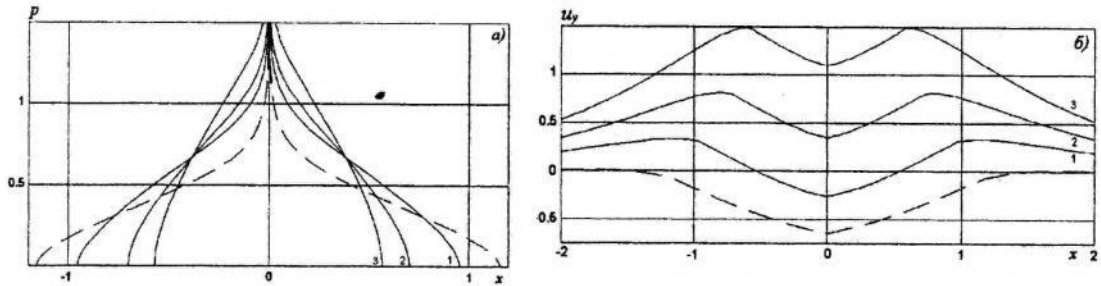


Рис. 2

викривлює контактну поверхню.

Однак для цього класу задач не характерні переважання якогось типу зовнішнього впливу: чисто механічного або теплового, що виявляється у відсутності критичних значень півширини ділянки контакту [8], на яких зміна притисної сили не впливає на величину проміжку взаємодії. Числові розрахунки засвідчують, що відбувається сумісний вплив

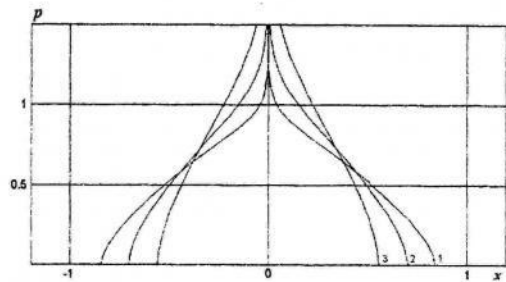


Рис. 3

термомеханічних чинників. Зокрема, за збільшення кута розклинення штампa простежується і у термопружній задачі ріст півширини ділянки контакту. На відміну від суто пружної задачі, де збільшення притисної сили спричиняє ріст осадки, у термопружній задачі ріст проміжку контакту збільшує теплоутворення і спричиняє зростання викривлення поверхні шару, що реалізується ростом від'ємного значення δ . Ці висновки ілюструє рис. 3, де наведено графіки розподілу контактного тиску за різних значень параметра α_0 : 1 - $\pi/3$, 2 - $\pi/4$ та 3 - $\pi/6$ коли $\chi = 1,0$. Решта значень параметрів збігаються з наведеними вище. За $\alpha_0 = \pi/3$ - $\delta \approx -0,1305$, коли $\alpha_0 = \pi/4$, то $\delta \approx -0,09$, у третьому випадку $\delta \approx -0,027$ ($\alpha_0 = \pi/6$).

Отже, ми сформулювали та побудували розв'язок термопружної контактної задачі щодо взаємодії жорсткого клина та пружного шару за впливу теплоутворення від дії сил тертя при переміщенні штампa по поверхні основи. Сформульована задача приведена до системи інтегральних рівнянь, розв'язок якої отримано шляхом підстановки виразів для контактних напружень через інтерполяційні поліноми Лагранжа, коефіцієнти яких обчислюють з системи лінійних алгебричних рівнянь. У виразі для контактних напружень явно виділена логарифмічна особливість, спричинена

існуванням розриву нахилу дотичної до профілю всередині ділянки взаємодії тіл. Дослідження впливу фрикційного теплоутворення дає змогу стверджувати про зменшення ділянки контакту за збільшення інтенсивності теплоутворення. Водночас за збільшення кута розклинення штампа маємо ріст півширини ділянки контакту у суто пружній і в термопружній задачі.

1. Грилицький Д.В. Система сингулярних інтегральних рівнянь для плоскої контактної задачі термопружності при стаціонарному тепловиділенні на площадці контакту // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1984. – Вип. 22. – С. 29–34.
2. Грилицький Д.В., Паук В.И. Контактная задача для толстого шероховатого слоя с учетом изнашивания и теплообразования // Физ.-хим. механика материалов. – 1989. – Т. 25, № 3. – С. 78–83.
3. Грилицький Д.В., Евтушенко А.А., Паук В.И. Плоская контактная задача нестационарной термоупругости с учетом теплообразования от трения // Изв. РАН. МТТ. – 1994. – № 5. – С. 62–68.
4. Ворович И.И., Пожарский Д.А., Чебанов М.И. Задача термоупругости о движущемся штампе при учете тепловыделения от трения // Прикладная математика и механика. – 1994. – Т. 58. – Вып. 3. – С. 161–166.
5. Евтушенко А.А., Паук В.И. Нестационарная контактная задача для шероховатых тел при учете теплообразования от трения // Прикладная математика и механика. – 1996. – Т. 60. – Вып. 4. – С. 691–696.
6. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / Пер. с англ. – М., 1989.
7. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные контактные задачи теории упругости. – М., 1974.
8. Краснюк П.П. Контактное взаимодействие жесткого штампа с упругим слоем при фрикционном теплообразовании // Прикладная механика. – 2000. – Т. 36. – № 1. – С. 130–138.
9. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.; Л., 1949.
10. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган: Пер. с англ. – М., 1979.
11. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезв, тонких включений и подкреплений. – М., 1986.

**A FLAT CONTACT PROBLEM OF INTERACTION OF THE RIGID
WEDGE AND ELASTIC LAYER AT FRICTIONAL HEAD
GENERATION**

Peter Krasnyuk, Yuriy Mandzyk, Roxolyana Chapovska

*Lviv State Finance Academy,
Kopernika Str., 3, 79000 Lviv, Ukraine*

In work statement is made and the decision thermoelastic contact problem of interaction of a rigid wedge and an elastic layer is constructed at influence head generations from influence of forces of friction at moving a stamp on a surface of the basis. The technique of reduction of a boundary problem thermoelastic to construction of the decision of system of the integrated equations is considered by substitution of expressions for contact pressure through interpolation Lagrange's which factors receive from system of the linear algebraic equations. The logarithmic feature of contact pressure caused by existence of break of an inclination of a tangent to a structure inside area of interaction of ph is obviously allocated. Influence frictional head generations on the mechanism of interaction of a stamp and the basis are investigated, and also the situation concerning change of contact pressure is analysed at increase in a corner at top of a pressed body.

Key words: flat contact problem, rigid wedge, elastic layer, frictional head generation.

Стаття надійшла до редколегії 18.11.2006
Прийнята до друку 22.11.2006