ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2006. Вип. 65. С.137-143

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Mat. 2006. Vol.65. P.137-143

УДК 539.3

КВАЗІСТАТИЧНІ ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ В СИСТЕМІ ШАР–ПІВПРОСТІР, ЗУМОВЛЕНІ ІМПУЛЬСНИМ НАГРІВОМ

Ольга ТУРЧИН[1], Валентин ЩУКІН[2]

*[1]Національний лісотехнічний університет України,
вул. Генерала Чупринки, 103, 79057 Львів, Україна
[2]Центр математичного моделювання
ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Дудаєва, 15, 79005 Львів, Україна*

З використанням методу поліномів Лагерра та інтегрального перетворення Фур'є одержано аналітичний розв'язок плоскої квазістатичної задачі термопружності для системи шар-півпростір при імпульсному симетричному нагріві.

Ключові слова: термопружність, квазістатична задача, шаруваті тіла, поліноми Лагерра.

Характерною тенденцією розвитку сучасної техніки та більшості галузей машинобудування є розробка та широке застосування замість традиційних нових конструкційних матеріалів. Найперспективнішими новими матеріалами є композиційні матеріали, яким властива шаруватість та суттєва відмінність фізико-механічних властивостей складових шарів. Технологія виготовлення та умови експлуатації таких матеріалів пов'язані з високотемпературним локальним нагріванням, які зумовлюють високі рівні напружень на поверхнях контакту та в приконтактних ділянках. Для прогнозування необхідної міцності і надійності кусково-однорідних елементів конструкцій і приладів, що працюють в умовах змінного в часі високоінтенсивного теплового навантаження, потрібна методика ефективного дослідження температурних полів і термонапруженого стану композиту.

Мета нашої праці – розробка та числове тестування методики побудови аналітичного розв'язку квазістатичних задач термопружності для плоскошаруватих тіл і середовищ.

Розглянемо шар товщиною h, що лежить на масивному тілі (моделюється півпростором) з іншими теплофізичними характеристиками. Шар з певного моменту часу починає нагріватися імпульсним джерелом тепла, що симетрично розподілені по його вільній поверхні. Тепломеханічний контакт між шаром і півпростором будемо вважати ідеальним, а початкову температуру та напружений стан шару і півпростору такими, що дорівнюють нулю. Крім того, припустимо, що розміри джерел тепла в одному з напрямів значно більші за товщину шару,

© Турчин О., Щукін В., 2006

тому зміною температури та напружено-деформованого стану в цьому напрямі знехтуємо (плоска задача).

Отож, задача теплопровідності формулюється так:

$$\Delta T^{(i)} = \tilde{a}_i^{-1}\partial_\tau T^{(i)}, \quad i = 1,2, \tag{1}$$

$$T^{(i)}(\eta,\zeta,0) = 0 \;, \quad i = 1,\; 2, \tag{2}$$

$$\tilde{\lambda}_T^{(1)}\partial_\zeta T^{(1)} = -q(\eta,\tau)\,, \quad \zeta = 0\;; \tag{3}$$

$$T^{(2)} = 0, \quad \zeta \to \infty\,, \tag{4}$$

$$T^{(1)} = T^{(2)}; \quad \tilde{\lambda}_T^{(1)}\partial_\zeta T^{(1)} = \tilde{\lambda}_T^{(2)}\partial_\zeta T^{(2)}, \;\; \zeta = 1\,. \tag{5}$$

Тут і надалі всі функції та величини з індексом "1" належать до шару, а з індексом "2" – до півпростору, $T^{(i)}(\eta,\ \zeta,\ \tau)$ – температура, $\eta = x/h$, $\zeta = y/h$, $\tau = a_0 t/h^2$, $\tilde{a}_i = a_i/a_0$, $\Delta = \partial^2_{\eta\eta} + \partial^2_{\zeta\zeta}$ – оператор Лапласа, $\tilde{\lambda}_T^{(i)} = \lambda_T^{(i)}/\lambda_T^{(0)}$, $q(\eta,\tau) = \dfrac{q(\eta)S_+(\tau_0-\tau)S_+(\tau)}{\lambda_T^{(0)}h}$, $\lambda_T^{(i)}$, a_i – відповідно, коефіцієнти тепло- і температуропровідності, $\tilde{l} = l/h$, l – півдовжина смуги, на якій розташовані джерела тепла, $q(\eta)$ – закон розподілу густини джерел, $\lambda_T^{(0)}$, a_o – деякі розмірні величини, які вибираємо згідно з завданнями числового аналізу.

Застосовуючи до рівнянь (1), крайових умов (3), (4) та умов спряження (5) $\cos$ –перетворення Фур'є за змінною η та інтегральне перетворення Лагерра за змінною τ, після врахування початкових умов (2), одержимо трикутну послідовність крайових задач

$$d^2_{\gamma\gamma}\overline{T}_n^{(i)} - \omega_i^2\overline{T}_n^{(i)} = \beta_i\sum_{m=0}^{n-1}\overline{T}_m^{(i)}\;, \quad i = 1,2\;; \tag{6}$$

$$\tilde{\lambda}_T^{(1)}d_\zeta\,\overline{T}_n^{(1)}\Big|_{\zeta=0} = -\overline{q}_n(\xi)\;; \quad \overline{T}_n^{(2)}\Big|_{\zeta\to\infty} = 0\;; \tag{7}$$

$$\overline{T}_n^{(1)} = \overline{T}_n^{(2)} \;; \quad \tilde{\lambda}_T^{(1)}d_\zeta\overline{T}_n^{(1)} = \tilde{\lambda}_T^{(2)}d_\zeta\overline{T}_n^{(2)}, \quad \zeta = 1\;. \tag{8}$$

У формулах (6)–(9); $\overline{T}_n^{(i)}(\xi,\zeta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} T^{(i)}(\eta,\zeta,\tau)\cos(\eta\xi)\,d\eta\right]L_n(\lambda\tau)d\tau$ – зображення за Лагерром і Фур'є, $L_n(\cdot)$ – поліноми Лагерра, $\omega_i = \sqrt{\xi^2+\beta_i}$, $\beta_i = \lambda/\tilde{a}_i$, λ – масштабний множник.

Розв'язок задачі в трансформантах (6)–(8) згідно з [2] має вигляд

$$\overline{T}_n^{(i)}(\xi,\zeta) = \sum_{j=0}^{n} \Big[A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi,\zeta) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi,\zeta) \Big],\ i = 1,2;\ n = 0,1,2,\ldots, \tag{9}$$

де

$$G_j^{(i)}(\zeta,\omega_i) = e^{-\omega_i \zeta} \sum_{k=0}^{j} a_{j,k}^{i} \frac{(\omega_i \zeta)^k}{k!};\quad W_j^{(i)}(\zeta,\omega_i) = e^{\omega_i \zeta} \sum_{k=0}^{j} a_{j,k}^{i} \frac{(-\omega_i \zeta)^k}{k!}, \tag{10}$$

а $a_{j,k}^{i}(\xi)$ задовольняють рекурентним співвідношенням

$$a_{j,k+1}^{i} = 0.5 \left(a_{j,k+2}^{i} - \frac{\beta_i}{\omega_i^2} \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^{i} \right), \tag{11}$$

при $a_{0,0}^{i}(\xi) \equiv 1$, $a_{j,0}^{i} \equiv 0$, $j = 1,2, \ldots$.

Невідомі $A_n^{(i)}, B_n^{(i)}$ знаходимо зі співвідношень

$$B_n^{(2)}(\xi) \equiv 0, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{12}$$

$$A_n^{(1)}(\xi) = \frac{-e^{\omega_1} \left(\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2 \right) f_n^{(1)} + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_1 \omega_2 f_n^{(2)} + \omega_1 f_n^{(3)}}{2\omega_1 \left(\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 sh(\omega_1) + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2 ch(\omega_1) \right)},$$

$$A_n^{(2)}(\xi) = \frac{e^{-\omega_1} \left(\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 - \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2 \right) f_n^{(1)} + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_1 \omega_2 f_n^{(2)} + \omega_1 f_n^{(3)}}{2\omega_1 \left(\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 sh(\omega_1) + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2 ch(\omega_1) \right)}, \tag{13}$$

$$A_n^{(3)}(\xi) = \frac{-\tilde{\lambda}_T^{(1)} f_n^{(1)} - \tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 sh(\omega_1) f_n^{(2)} + ch(\omega_1) f_n^{(3)}}{e^{-\omega_2} \left(\tilde{\lambda}_T^{(1)} \omega_1 sh(\omega_1) + \tilde{\lambda}_T^{(2)} \omega_2 ch(\omega_1) \right)},$$

де

$$f_n^{(1)}(\xi) = -\overline{q}_n(\xi) - \sum_{j=1}^{n} \Big[A_{n-j}^{(1)}(\xi) G_j^{(1)}(\xi,0) + B_{n-j}^{(1)}(\xi) W_j^{(1)}(\xi,0) \Big];$$

$$f_n^{(2)}(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \Big[A_{n-j}^{(2)}(\xi) G_j^{(2)}(\xi,1) - A_{n-j}^{(1)}(\xi) G_j^{(1)}(\xi,1) - B_{n-j}^{(1)}(\xi) W_j^{(1)}(\xi,1) \Big];$$

$$f_n^{(3)}(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \Big[\tilde{\lambda}_T^{(2)} A_{n-j}^{(2)}(\xi) \partial_\zeta G_j^{(2)}(\xi,1) - \tilde{\lambda}_T^{(1)} A_{n-j}^{(1)}(\xi) \partial_\zeta G_j^{(1)}(\xi,1) - \tilde{\lambda}_T^{(1)} B_{n-j}^{(1)}(\xi) \partial_\zeta W_j^{(1)}(\xi,1) \Big].$$

Розв'язок вихідної задачі (1)–(5) одержимо у вигляді ряду за поліномами Лагерра

$$T^{(i)}(\eta,\zeta,\tau) = \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{T}_n^{(i)}(\xi,\zeta) \cos(\xi\eta)\, d\xi \right] L_n(\lambda\tau). \tag{14}$$

Напружено-деформований стан у композиті, зумовлений температурним полем (14), визначимо в припущенні, що його гранична поверхня вільна від навантажень, а на безмежності переміщення та напруження дорівнюють нулю.

Стосовно ключових функцій $\theta^{(i)}(\eta,\varsigma,\tau) = div\vec{\mathbf{U}}^{(i)}$ і $w^{(i)}(\eta,\varsigma,\tau)$ задача полягає в відшуканні для кожного шару розв'язку двох рівнянь Пуассона

$$\Delta\theta^{(i)} = \tilde{\alpha}_T^{(i)}\frac{1+\nu_i}{1-\nu_i}\Delta T^{(i)}, \qquad i = 1,2; \tag{15}$$

$$\Delta w^{(i)} = -\frac{1}{1-2\nu_i}\partial_\varsigma\theta^{(i)} + \tilde{\alpha}_T^{(i)}\frac{2(1+\nu_i)}{1-2\nu_i}\partial_\varsigma T^{(i)}, \quad i = 1,2, \tag{16}$$

за нульових початкових умов

$$\theta^{(i)}(\eta,\varsigma,0) = w^{(i)}(\eta,\varsigma,0) = 0, \qquad i = 1,2; \tag{17}$$

умовах на безмежності

$$\theta^{(M)} = 0, \;\; w^{(M)} = 0, \quad \zeta \to \infty; \tag{18}$$

та крайових умов і умов спряження

$$\begin{gathered}\sigma_{\varsigma\varsigma}^{(1)}(\eta,0,\tau) = 0\,; \; \sigma_{\eta\kappa}^{(1)}(\eta,0,\tau) = 0\,; \\ u^{(1)}(\eta,1) = u^{(2)}(\eta,1), \;\; w^{(1)}(\eta,1) = w^{(2)}(\eta,1), \\ \sigma_{\eta\zeta}^{(1)}(\eta,1) = \sigma_{\eta\zeta}^{(2)}(\eta,1), \;\; \sigma_{\zeta\zeta}^{(1)}(\eta,1) = \sigma_{\zeta\zeta}^{(1)}(\eta,1),\end{gathered} \tag{19}$$

де $\tilde{\alpha}_T^{(i)} = \alpha_T^{(i)}\big/\alpha_T^{(0)}$, $\tilde{E}_i = E_i/E_0$, $\alpha_T^{(i)}$, E_i, ν_i – відповідно, коефіцієнт лінійного температурного розширення, модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу i-го шару.

До рівнянь (15)–(16) та умов (18)–(19) застосуємо інтегральне перетворення Лагерра-Фур'є. В результаті одержимо послідовність крайових задач

$$d_{\zeta\zeta}^2\overline{\theta}_n^{(i)} - \xi^2\overline{\theta}_n^{(i)} = \tilde{\alpha}_T^{(i)}\frac{1+\nu_i}{1-\nu_i}\left(d_{\zeta\zeta}^2\overline{T}_n^{(i)} - \xi^2\overline{T}_n^{(i)}\right), \qquad i = 1,2; \tag{20}$$

$$d_{\zeta\zeta}^2\overline{w}_n^{(i)} - \xi^2\overline{w}_n^{(i)} = -\frac{1}{1-2\nu_i}d_\zeta\overline{\theta}_n^{(i)} + \tilde{\alpha}_T^{(i)}\frac{2(1+\nu_i)}{1-2\nu_i}d_\zeta\overline{T}_n^{(i)}, \quad i = 1,2, \tag{21}$$

з відповідно трансформованими крайовими умовами та умовами спряження.

Розв'язок рівнянь (20), (21) має вигляд

$$\overline{\theta}_n^{(i)}(\xi,\zeta) = C_n^{(i)}(\xi)\exp(\xi\zeta) + D_n^{(i)}(\xi)\exp(-\xi\zeta) + \tilde{\alpha}_T^{(i)}\frac{1+\nu_i}{1-\nu_i}\overline{T}_n^{(i)}(\xi,\zeta). \tag{22}$$

$$\overline{w}_n^{(i)}(\xi,\zeta) = F_n^{(i)}(\xi)\exp(\xi\zeta) + H_n^{(i)}(\xi)\exp(-\xi\zeta) -$$
$$-\frac{\zeta}{2(1-2\nu_i)}\left[C_n^{(i)}(\xi)\exp(\xi\zeta) + D_n^{(i)}(\xi)\exp(-\xi\zeta)\right] + \frac{\tilde{\alpha}_T^{(i)}}{\beta_i}\frac{1+\nu_i}{1-\nu_i}d_\gamma \tilde{T}_n^{(i)}(\xi,\zeta), \tag{23}$$

де $\tilde{T}_n^{(i)}(\xi,\zeta) = \overline{T}_n^{(i)}(\xi,\zeta) - \overline{T}_{n-1}^{(i)}(\xi,\zeta)$, $n = 1,2,\ldots;$ $\tilde{T}_0^{(i)}(\xi,\zeta) = \overline{T}_0^{(i)}(\xi,\zeta)$.

Враховуючи вирази (22), (23) та умови (18), одержимо, що

$$C_n^{(M)} = F_n^{(M)} \equiv 0. \tag{24}$$

Задовольнивши трансформовані крайові умови та умови спряження, одержимо послідовність систем алгебричних рівнянь для визначення невідомих $C_n^{(1)}, D_n^{(i)}, F_n^{(1)}, H_n^{(i)}$

$$\left[d_{k,\,l}\right]\left\{C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, F_n^{(1)}, H_n^{(1)}, D_n^{(2)}, H_n^{(2)}\right\}^T = \left\{f_{n,k}\right\}. \tag{25}$$

Знайшовши всі невідомі з систем (25), остаточний розв'язок задачі (16)–(19) подамо у вигляді

$$\theta^{(i)}(\eta,\zeta,\tau) = \lambda\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^\infty \overline{\theta}_n^{(i)}(\xi,\zeta)\cos(\xi\eta)d\xi\right]L_n(\lambda\tau); \tag{26}$$

$$w^{(i)}(\eta,\zeta,\tau) = \lambda\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^\infty \overline{w}_n^{(i)}(\xi,\zeta)\cos(\xi\eta)d\xi\right]L_n(\lambda\tau); \tag{27}$$

$$u^{(i)}(\eta,\zeta,\tau) = \lambda\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^\infty \xi^{-1}\left[\overline{\theta}_n^{(i)}(\xi,\zeta) - d_\gamma\overline{w}_n^{(i)}(\xi,\zeta)\right]\sin(\xi\eta)d\xi\right]L_n(\lambda\tau). \tag{28}$$

Числовий аналіз проводився для півпростору з властивостями алюмінієвого стопу ($a_2 = 11{,}9\times10^{-6}\,\frac{\text{ì}^2}{c}$, $\lambda_T^{(2)} = 36\frac{\text{Âò}}{\text{ì}\cdot K}$, $\alpha_T^{(2)} = 8{,}0\times10^{-6}\,\frac{1}{K}$, $\mathring{A}_2 = 343$ Ãïà, $\nu_2 = 0{,}33$) та покриття виготовленого з кераміки [3] ($a_1 = 90{,}6\times10^{-6}\,\frac{\text{ì}^2}{c}$, $\lambda_T^{(1)} = 222\frac{\text{Âò}}{\text{ì}\cdot K}$, $\alpha_T^{(1)} = 23{,}6\times10^{-6}\,\frac{1}{K}$, $\mathring{A}_1 = 70$ Ãïà, $\nu_1 = 0{,}33$).

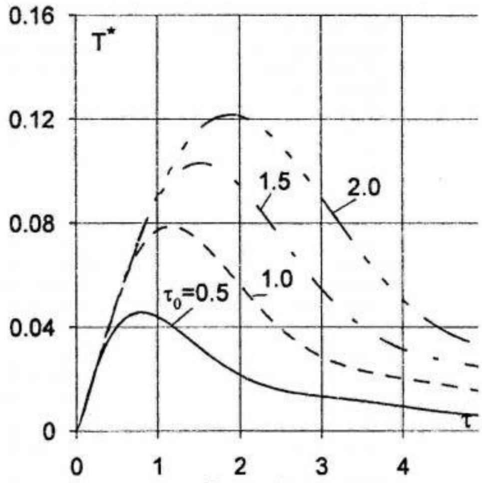

Рис. 1

На рис. 1 показано результати розрахунку безрозмірного температурного поля, а на рис. 2, 3 безрозмірних дотичних напружень на поверхні розділу матеріалів півпростору і покриття при $\zeta = \zeta_1 = 1{,}25$, зумовлених дією потоку тепла у вигляді прямокутного імпульсу тривалістю τ_0

$$q^*(\eta,\tau) = q^* S_+(1-|\eta|) S_+(1-\tau_0) S_+(\tau).$$

На рис. 2 зображено залежність зазначених напружень при $\gamma = 1$ від змінної τ для різних значень тривалості імпульсу. Як видно з наведеного, максимального за модулем значення дотичні напруження досягають перед закінченням дії імпульсу, причому час досягнення цього максимуму залежить від тривалості імпульсу (для наведених значень τ_0, відповідно $0{,}9\tau_0$, $0{,}75\tau_0$, $0{,}7\tau_0$, $0{,}65\tau_0$). Зі збільшенням τ_0 зростає й абсолютне максимальне значення дотичних напружень. Це збільшення також залежить від τ_0. При збільшенні τ_0 вдвічі від значення $\tau_0 = 0{,}5$ до $\tau_0 = 1{,}0$ максимум за модулем зростає на 53 %, а при аналогічному збільшенні від значення $\tau_0 = 1{,}0$ до $\tau_0 = 2{,}0$ – лише на 25 %.

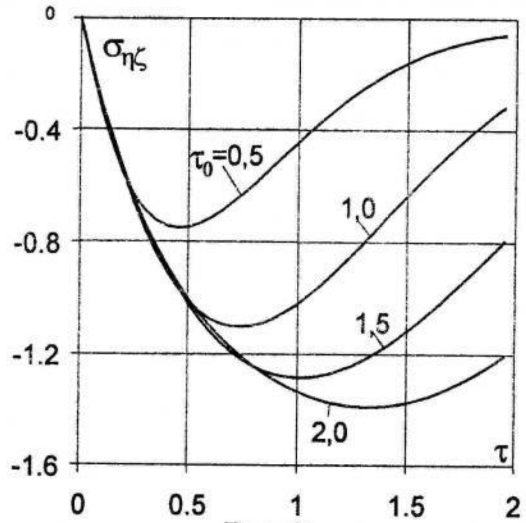

Рис. 2

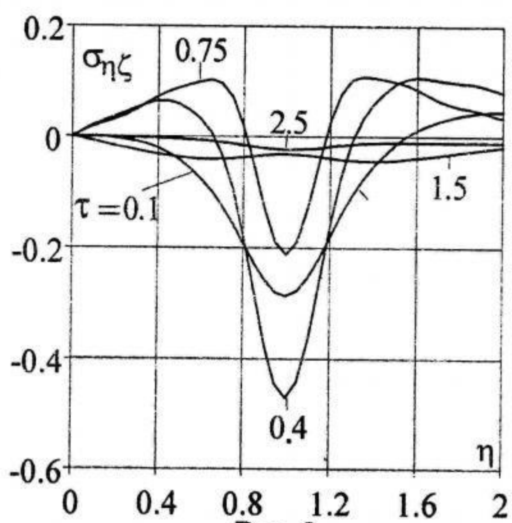

Рис. 3

На рис. 3 зображено результати розрахунку дотичних напружень на поверхні поділу шару і півпростору при $\tau_0 = 0{,}4$ для різних значень безрозмірного часу τ. Як видно з рисунків, максимального за модулем значення зазначені напруження досягають на краю ділянки нагріву ($\gamma = 1$), за винятком невеликої ділянки поблизу краю нагріву, під час перехідного періоду дотичні напруження змінюють знак.

1. *Matysiak S., Wozniak Cz.* On the modelling of heat conduction problem in laminated bodies // Acta mech. – 1986. – Vol. 65. – P. 223–238.

2. *Коляно Ю.М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К., 1992.

3. *Галазюк В.А.* Метод поліномів Чебишева-Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку в часткових похідних з постійними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 3–7.

4. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. – М., 1955.

5. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М., 1979.

QUASISTATIC THERMAL STRESS ANALYSIS IN THE SYSTEM A LAYER-HALFSPACE FROM IMPULSIVE HEATING

Olha Turchyn[1], Valentyn Shchukin[2]

[1]National Forestry University of Ukraine,
General Chuprinka Str., 103, 79057 Lviv, Ukraine
[2]Center of Mathematical Modeling,
Dudayeva Str., 15, 79005 Lviv, Ukraine

With the use of method of polynomials of Laguerre and integral transformation of Fourier the analytical decision of flat quasistatic problem of thermoelasticity is got for the system of layer-halfspace at the impulsive symmetric heating.

Key words: thermoelasticity, quasistatic task, stratified bodies, polynomials of Laguerre.

Стаття надійшла до редколегії 24.06.2005
Прийнята до друку 22.11.2006