

УДК 539.3

## ЗАСТОСУВАННЯ АПАРАТА УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ ДО ВИЗНАЧЕННЯ ПОРЯДКУ СИНГУЛЯРНОСТІ ЗА ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ У КЛИНОВІЙ СИСТЕМІ

Микола МАХОРКІН<sup>1</sup>, Георгій СУЛИМ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України,  
вул. Наукова, 36, 79053 Львів, Україна

<sup>2</sup> Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Запропоновано процедуру використання узагальнених функцій для визначення порядку сингулярності напружень в околі вістря довільної клинової системи за позовжнього зсуву. Досліджено особливості напружень у пластині, складеній із чотирьох клинів і розташованого на лінії з'єднання клинів півбезмежного абсолютно жорсткого включення.

**Ключові слова:** порядок сингулярності, клинова система, узагальнені функції, кутова точка.

Аналіз причин пластичного деформування і аварійного виходу з ладу різних конструкцій свідчить, що значна їх частина зумовлена руйнуванням в околі зламів поверхонь поділу матеріалів. Тому вивчення концентрації напружень в околі кутових точок фронтів вирізів і клинових композицій та конструкцій становить значний інтерес. За допомогою методу комплексних потенціалів Колосова-Мухомелішвілі [7, 5] і функцій Ері [2] в працях Д.Б. Боджі [1, 2], І.Т. Денисюка [5], І.П. Бутвинника [4] проведено дослідження характеру сингулярності напружень в околі нерегулярних точок. Проте у зв'язку з громіздкістю перетворень, до яких призводить використання згаданих методів, описані лише в системі, складені з трьох клинів [4].

На прикладі дослідження порядку сингулярності напруженого стану в околі кутової точки  $O$  системи (рис. 1), що складається з кутового вирізу з розхилом кута  $\alpha_{n+1}$  і

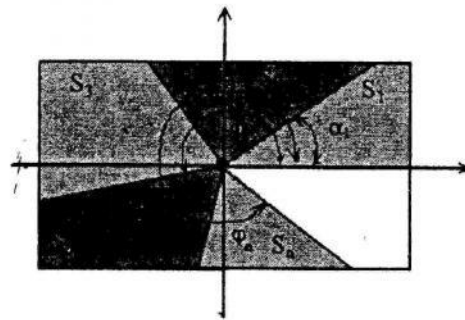


Рис. 1

довільної кількості клинів  $S_j$  з кутами розхилу  $\alpha_j$ ,  $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 2\pi - \alpha_{n+1})$  та модулями зсуву  $\mu_j$ , при позовжньому зсуві (переміщення

$u=0, v=0, w = w(r, \varphi) \neq 0$ ) проілюструємо підхід з використанням узагальнених функцій.

Подібні задачі були розв'язані для двоклинової системи у працях [4, 5].

Запровадимо полярну систему координат  $r, \varphi$  з початком у точці  $O$ , в якій визначальні співвідношення теорії пружності мають такий вигляд [3, 9]:

1) співвідношення Коші виглядають

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{r\varphi} = 0, \varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r}; \quad (1)$$

2) закон Гука –

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{zz} = \sigma_{r\varphi} = 0, \sigma_{\varphi z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \sigma_{rz} = \mu \frac{\partial w}{\partial r}; \quad (2)$$

3) рівняння рівноваги –

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} = 0. \quad (3)$$

Для моделювання кусково-однорідного середовища використаємо метод, запропонований Я.С. Підстригачем та Ю.М. Коляном у праці [6, 8]. Вважатимемо модуль зсуву  $\mu$  кусково-сталого функцією, залежною лише від полярного кута  $\mu(r, \varphi z) = \mu(\varphi)$ , і запишемо з використанням одиничної функції

$$\mu(\varphi) = \mu_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_{i+1} - \mu_i) S_+(\varphi - \varphi_i), \quad \varphi_i = \sum_{j=1}^i \alpha_j, \quad S_+ = \begin{cases} 1 & (\xi > 0), \\ 0 & (\xi \leq 0). \end{cases} \quad (4)$$

В результаті отримаємо

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{r} \left( \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_{i+1} - \mu_i) \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i} \delta_+(\varphi - \varphi_i) \right). \quad (5)$$

Відповідно до цього рівняння рівноваги набуде вигляду

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_{i+1} - \mu_i) \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i} \delta_+(\varphi - \varphi_i) = 0. \quad (6)$$

Його можна записати також і так:

$$\mu \Delta w = -\frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_{i+1} - \mu_i) \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i} \delta_+(\varphi - \varphi_i), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi^2}. \quad (7)$$

Згадавши подання (4) і використавши фільтруючу властивість дельта функції [8]  $\delta_+(\varphi - \varphi_i) \mu(\varphi) = \mu(\varphi_i)$ , можемо записати

$$\Delta w = -\frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_{i+1} - \mu_i) S_+(\varphi - \varphi_i)} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i} \delta_+(\varphi - \varphi_i),$$

звідки отримаємо остаточний вигляд рівняння рівноваги

$$\Delta w = -\frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i} \delta_+(\varphi - \varphi_i). \quad (8)$$

Запишемо переміщення  $w$  у вигляді неперервної функції кута  $\varphi$  з кусково-неперервною похідною так:

$$w = w_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (w_{i+1} - w_i) S_+(\varphi - \varphi_i). \quad (9)$$

Для такого подання  $w$  похідні виглядатимуть

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w_1}{\partial r} + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial w_{i+1}}{\partial r} - \frac{\partial w_i}{\partial r} \right) S_+(\varphi - \varphi_i); \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial^2 w_{i+1}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2} \right) S_+(\varphi - \varphi_i); \quad (11)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial w_{i+1}}{\partial \varphi} - \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \right) S_+(\varphi - \varphi_i) + \sum_{i=1}^{n-1} (w_{i+1} - w_i) \Big|_{\varphi=\varphi_i} \delta_+(\varphi - \varphi_i); \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} &= \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial^2 w_{i+1}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2} \right) S_+(\varphi - \varphi_i) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial w_{i+1}}{\partial \varphi} - \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_i} \delta_+(\varphi - \varphi_i) + \sum_{i=1}^{n-1} (w_{i+1} - w_i) \Big|_{\varphi=\varphi_i} \delta'_+(\varphi - \varphi_i). \end{aligned} \quad (13)$$

Тепер можемо записати рівняння рівноваги у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \Delta w_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta w_{i+1} - \Delta w_i) S_+(\varphi - \varphi_i) + \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial w_{i+1}}{\partial \varphi} - \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi_i} \delta_+(\varphi - \varphi_i) + \\ + \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{n-1} (w_{i+1} - w_i) \Big|_{\varphi_i} \delta'_+(\varphi - \varphi_i) = -\frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi_i} \delta_+(\varphi - \varphi_i). \end{aligned} \quad (14)$$

Отож, отримаємо сукупність рівнянь Лапласа з відповідними крайовими умовами

$$\Delta w_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad (15)$$

$$(w_{i+1} - w_i) \Big|_{\varphi=\varphi_i} = 0; \quad (16)$$

$$\left( \frac{\partial w_{i+1}}{\partial \varphi} - \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_i} = -\frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i}. \quad (17)$$

Очевидно, що умова (16) є умовою рівності переміщень на лінії контакту  $\varphi = \varphi_i$ . Покажемо тепер, що умова (17) є умовою рівності дотичних напружень. Справді, якщо переписати (17) у такому вигляді:

$$\left( \mu_{i+1} \frac{\partial w_{i+1}}{\partial \varphi} - \mu_{i+1} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_i} = \left( -\mu_{i+1} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \mu_i \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_i},$$

то після виконання нескладних алгебричних перетворень отримуємо

$$\frac{\mu_{i+1}}{r} \frac{\partial w_{i+1}}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i} = \frac{\mu_i}{r} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i}, \quad (18)$$

що згідно з (2) свідчить про рівність напружень. Інакше кажучи, умови (16), (17) є однією з можливих форм запису умов ідеального контакту на лінії спаювання  $\varphi = \varphi_i$ .

Загальний розв'язок рівняння (15) шукатимемо у вигляді

$$w_i = \sum_{j=1}^{\infty} r^{q_j} (A_{ij} \cos(q_j \varphi) + B_{ij} \sin(q_j \varphi)) = \sum_{j=1}^{\infty} r^{q_j} w_{ij}^*. \quad (19)$$

Надалі в перетвореннях, поки не визначимо значення  $q_j$ , упускатимемо підсумовування за індексом  $j$  та сам цей індекс, вважаючи, що умови виконуються для однакових  $q_j$ , індекс  $i$  засвідчує матеріал клину, в якому розглядають переміщення. Підставивши розв'язок (19) в умови (16) та (17), отримаємо такі співвідношення:

$$\begin{aligned} (A_{i+1} - A_i) \cos(q\varphi_i) + (B_{i+1} - B_i) \sin(q\varphi_i) &= 0, \\ -q(A_{i+1} - A_i) \sin(q\varphi_i) + q(B_{i+1} - B_i) \cos(q\varphi_i) &= \frac{(\mu_i - \mu_{i+1})}{\mu_{i+1}} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi_i}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (20)$$

Вводячи позначення

$$K_i^* = -\frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i}, \quad A_i^* = A_{i+1} - A_i, \quad B_i^* = B_{i+1} - B_i, \quad (21)$$

вирази (20) можна записати так:

$$\begin{aligned} A_i^* \cos(q\varphi_i) + B_i^* \sin(q\varphi_i) &= 0, \\ -qA_i^* \sin(q\varphi_i) + qB_i^* \cos(q\varphi_i) &= K_i^*. \end{aligned} \quad (22)$$

Звідси знаходимо  $A_i^* = -K_i^* \frac{\sin(q\varphi_i)}{q}$ ,  $B_i^* = K_i^* \frac{\cos(q\varphi_i)}{q}$ .

Вираз для переміщень згідно з (22) можна подати так:

$$w = A_1 \cos(q\varphi) + B_1 \sin(q\varphi) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{K_i^*}{q} \sin(q(\varphi - \varphi_i)) S_+(\varphi - \varphi_i). \quad (23)$$

Для визначення величини  $K_i^* = -\frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i}$  згідно з (12)

обчислимо похідну

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= -qA_1 \sin(q\varphi) + qB_1 \cos(q\varphi) - \sum_{i=1}^{n-1} q(-A_i^* \sin(q\varphi) + B_i^* \cos(q\varphi)) S_+(\varphi - \varphi_i) = \\ &= -qA_1 \sin(q\varphi) + qB_1 \cos(q\varphi) - \sum_{i=1}^{n-1} K_i^* \cos(q(\varphi - \varphi_i)) S_+(\varphi - \varphi_i). \end{aligned}$$

Звідси, прийнявши  $\varphi = \varphi_j$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi_j} &= -qA_1 \sin(q\varphi_j) + qB_1 \cos(q\varphi_j) - \\ &- \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi_i} \cos(q(\varphi_j - \varphi_i)) S_+(\varphi - \varphi_i). \end{aligned} \quad (24)$$

Тепер для визначення величини  $K_i^* = -\frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_i}$  можна записати таку рекурентну формулу:

$$K_j^* = -\frac{\mu_{j+1} - \mu_j}{\mu_{j+1}} (A_1 L_1^j + B_1 L_2^j), \quad (25)$$

де

$$\begin{aligned} L_1^j &= -q \sin(q\varphi_j) - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} L_1^i \cos(q(\varphi_j - \varphi_i)) S_+(\varphi - \varphi_i), \\ L_2^j &= q \cos(q\varphi_j) - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} L_2^i \cos(q(\varphi_j - \varphi_i)) S_+(\varphi - \varphi_i). \end{aligned}$$

Для визначення невідомих  $A_1, B_1$  одержимо систему двох лінійних алгебричних рівнянь. Враховуючи те, що згідно з (23), (24)

$$\begin{aligned} w &= A_1 \cos(q\varphi) + B_1 \sin(q\varphi) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{q\mu_{i+1}} (A_1 L_1^i + B_1 L_2^i) \sin(q(\varphi - \varphi_i)) S_+(\varphi - \varphi_i), \\ \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= -qA_1 \sin(q\varphi) + qB_1 \cos(q\varphi) - \\ &- \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} (A_1 L_1^i + B_1 L_2^i) \cos(q(\varphi - \varphi_i)) S_+(\varphi - \varphi_i), \end{aligned}$$

значення переміщень на берегах вирізу дорівнюють

$$\begin{aligned}
 w|_{\varphi=0} &\equiv A_1 \\
 w|_{\varphi=\varphi_n} &\equiv A_1 \left( \cos(q\varphi_n) + \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{q\mu_{j+1}} L_1^i \sin(q(\varphi_n - \varphi_i)) S_+(\varphi_n - \varphi_i) \right) + \\
 &+ B_1 \left( \sin(q\varphi_n) + \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{q\mu_{i+1}} L_2^i \sin(q(\varphi_n - \varphi_i)) S_+(\varphi_n - \varphi_i) \right),
 \end{aligned} \quad (26)$$

а напруження –

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\varphi z}|_{\varphi=0} &\equiv \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_n=0} = \frac{\mu}{r} r^q q B_1, \\
 \sigma_{\varphi z}|_{\varphi=\varphi_n} &\equiv \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_n} = \frac{\mu}{r} r^q (-q A_1 \sin(q\varphi_n) + q B_1 \cos(q\varphi_n) - \\
 &- \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} (A_1 L_1^i + B_1 L_2^i) \cos(q(\varphi_n - \varphi_i)) S_+(\varphi_n - \varphi_i) \Big).
 \end{aligned} \quad (27)$$

Оскільки на краях вирізу задано однорідні умови, то умовою існування нетривіального розв'язку системи лінійних алгебричних рівнянь, побудованої згідно зі співвідношеннями (26), (27) та конкретними умовами на берегах вирізу, визначник заданої системи дорівнюватиме нулю. Згідно з цією умовою обчислюємо величину  $q_j$ , яка визначає порядок сингулярності напружень.

Проілюструємо описаний метод побудови характеристичного рівняння та обчислення порядку сингулярності на конкретному прикладі. Побудуємо характеристичне рівняння для визначення власних значень, обчислимо порядок сингулярності напружень в околі точки сходження клинів у системі, яка складається з чотирьох клинів та жорсткого включення, розташованого на одній із ліній спаювання. Нехай кути розхилу клинів дорівнюють  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , а півбезмежне жорстке включення розташоване на лінії спаювання першого і четвертого клинів. У такому випадку згідно з наведеною методикою побудови характеристичного рівняння  $n = 5$ ,

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = \alpha_1, \quad \varphi_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \varphi_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \varphi_4 = \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 2\pi, \quad \text{кут}$$

розхилу вирізу дорівнює  $\alpha_5 = 0$ , переміщення на берегах вирізу дорівнюють нулю ( $w|_{\varphi=0} = w|_{\varphi=2\pi} = 0$ ). Згідно зі співвідношеннями (26) та (25) одержимо таке характеристичне рівняння для визначення власних значень  $q_j$ :

$$\begin{aligned}
& \mu_2 \mu_3 \mu_4 \sin(2\pi q) + \mu_2 \mu_3 (\mu_4 - \mu_3) \cos(q(2\pi - \alpha_4)) \sin(q\alpha_4) + \mu_2 (\mu_2 - \mu_3) \times \\
& \times \cos(q(\alpha_1 + \alpha_2)) ((\mu_3 - \mu_4) \cos(q\alpha_4) \sin(q\alpha_4) - \mu_4 \sin(q(\alpha_3 + \alpha_4))) + \\
& + (\mu_1 - \mu_2) \cos(q\alpha_1) (-\mu_3 \mu_4 \sin(q(2\pi - \alpha_1)) - (\mu_2 - 2\mu_3) \cos(q\alpha_2) \cos(q\alpha_3) + \\
& + \mu_3 \sin(q\alpha_2) \sin(q\alpha_3)) \sin(q\alpha_4) + (\mu_2 - \mu_3) \mu_4 \cos(q\alpha_2) \sin(q(\alpha_3 + \alpha_4))) = 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

Прийнявши в (28), що один із кутів  $\alpha_i$  дорівнює нулю, або прирівнявши пружні сталі сусідніх клинів  $\mu_i = \mu_{i+1}$ , отримаємо як частковий випадок характеристичне рівняння для трьох клинів і жорсткого включення, яке розташоване на лінії спаювання. Аналогічно до рівняння (28) можна отримати рівняння для жорсткого включення, розташованого на ламаній межі поділу матеріалів [2].

Використовуючи рівняння (28), проведено обчислення порядку сингулярності  $\lambda_j = 1 - q_j$  в околі точки сходження чотирьох спаяних між собою клинів та півбезмежного жорсткого включення, розташованого на одній із ліній спаювання. Результати обчислень видно на рисунках. На рис. 2 зображено графічну залежність порядку сингулярності від зміни кутів  $0 \leq \alpha_1 \leq \pi, 0 \leq \alpha_3 \leq \pi/2, \alpha_2 = \pi/2, \alpha_4 = 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$  при сталих значеннях модуля зсуву, взятих для металевих клинів  $\mu_1 = 8,01 \cdot 10^4$  (сталь),  $\mu_2 = 5,67 \cdot 10^4$  (мідь),  $\mu_3 = 6,885 \cdot 10^4$  (чавун),  $\mu_4 = 4,05 \cdot 10^4$  (бронза). З наведеної графічної залежності видно, що для металів при сталих значеннях модулів зсуву та значенню кута розхилу  $\alpha_2 = \pi/2$  порядок сингулярності слабо залежить від зміни кутів розхилу і не є вищим, ніж порядок сингулярності у системі, складеній з двох клинів із модулями зсувів, які дорівнюють  $\mu_2$  та  $\mu_4$ .

На рис. 3 зображено зміну порядку сингулярності залежно від зміни модулів зсуву клинів  $\mu_2 = k_1 \mu_1, \mu_3 = k_2 \mu_4, 1 \leq k_1 \leq 2, 0,5 \leq k_2 \leq 1$ , які утворюють систему при сталих кутах розхилу  $\alpha_1 = \pi/4, \alpha_2 = \pi/2, \alpha_3 = 3\pi/4, \alpha_4 = \pi/2$ . Значення модулів зсуву першого і третього клинів дорівнюють  $\mu_1 = 8 \cdot 10^4, \mu_4 = 4 \cdot 10^4$ . Тут можна стверджувати, що зміна модуля зсуву впливає на порядок сингулярності сильніше, ніж зміна кутів розхилу. Найвищим за таких умов порядок сингулярності є при початковій конфігурації системи.

Отож, ми запропонували методику визначення порядку сингулярності напружень і побудови їхніх асимптотик у точці сходження довільної кількості спаяних між собою клинів. Методика ґрунтується на використанні апарата узагальнених функцій. Її застосування зводить розв'язування системи рівнянь порядку  $2n$  ( $n$  – кількість клинів) до розв'язування системи другого порядку.



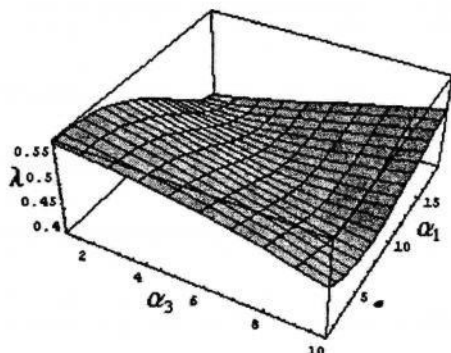


Рис. 2

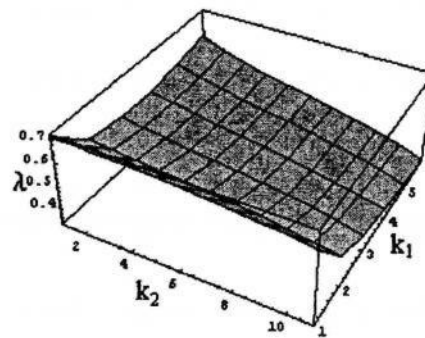


Рис. 3

Використавши запропоновані методики, отримали загальний вигляд характеристичного рівняння та асимптот напружень і переміщень при довільній кількості клинів; побудували характеристичні рівняння для системи з чотирьох клинів і вирізу, на берегах якого задано різні типи однорідних крайових умов; для системи, що складається з чотирьох клинів та розташованого на лінії спаювання абсолютно жорсткого включення, проведені числові дослідження.

1. Боджи Д.Б. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных по граням упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора // Тр. АОИМ. Сер. Прикладная механика. – 1971. – № 2. – С. 87–96.
2. Боджи Д.Б. Плоская задача о нагруженной трещине, заканчивающейся на границе раздела материалов // Тр. АОИМ. Сер. Прикладная механика. – 1971. – № 4. – С. 196–198.
3. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Элементы теории пластичности та міцності. – Львів, 1994.
4. Бутвинник И.П., Бережницкий Л.Т., Похмурский В.И. О порядке сингулярности напряжений в композитах при антиплоской деформации // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1983. – № 2. – С. 102–103.
5. Денисюк І.Д. Сингулярні напруження в ізотропній матриці з пружним клином // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – № 4. – С. 76–81.
6. Коляно Ю.М., Кулык О.М., Кушнир Р.М. О постановке обобщенной задачи сопряжения для уравнений термоупругости кусочно-однородных тел // ДАН УССР. Сер. А. – 1980. – № 2. – С. 44–49.
7. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М., 1981.



8. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М., 1984.
9. Си Г., Либовиц Г. Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение. – М., 1975. – Т. 2.
10. Сулим Г., Махоркін М. Визначення порядку сингулярності напружень в околі точки сходження трьох клинів // Праці Наукового товариства ім. Шевченка. – 2003. – Т. 9.

**APPLICATION OF APPARATUS OF GENERALIZED FUNCTIONS  
FOR DEFINING SINGULARITY ORDER UNDER LONGITUDINAL  
SHEAR IN ARBITRARY WEDGE SYSTEM**

**Mikola Mahorkin<sup>1</sup>, Georgij Sulym<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,  
Naukova Str., 3b, 79053 Lviv, Ukraine*

<sup>2</sup>*Ivan Franko National University of Lviv,  
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

The procedure of using the generalized functions for defining the stress singularity order in the vicinity of an arbitrary wedge system's point under the longitudinal shear is proposed. The peculiarities of stresses in a plate consisting of four wedges and a semi-infinite absolutely rigid inclusion on the line of wedges join are studied.

*Key words:* singularity order, wedge system, generalized functions, corner point.

Стаття надійшла до редколегії 14.07.2005  
Прийнята до друку 22.11.2006