

УДК 539.4:536.543

## ВИЗНАЧЕННЯ ЗАЛИШКОВОЇ ДОВГОВІЧНОСТІ ПЛАСТИНИ З СИСТЕМОЮ ДВОХ КОМПЛАНАРНИХ ТРІЩИН ПРИ ДІЇ ДОВГОТРИВАЛОГО СТАТИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ І ВИСОКІЙ ТЕМПЕРАТУРІ

Наталія САС

Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

З використанням раніше сформульованої автором розрахункової моделі визначена довговічність пластини з системою двох компланарних тріщин в умовах розтягу при високій температурі. Розглянуті часткові випадки, зокрема аналог задачі Гріффітса для випадку тріщини високотемпературної повзучості.

**Ключові слова:** довговічність, компланарні тріщини, високотемпературна повзучість, довготривале статичне навантаження.

Відомо [1–7], що при дії довготривалого статичного навантаження і високій температурі втрата міцності і вичерпання ресурсу елементів конструкцій проходить шляхом зародження і поширення тріщини високотемпературної повзучості. Особливо, це відбувається, коли елемент конструкції вже послаблений дефектами типу тріщин набутими при їх виготовленні або в процесі експлуатації. Щодо досліджень кінетики поширення тріщин високотемпературної повзучості, то цьому питанню присвячена незначна кількість праць (див., наприклад, [1, 6–9]).

Розвинуто раніше сформульований автором підхід [2, 3] на випадок визначення кінетики поширення системи двох компланарних тріщин високотемпературної повзучості.

**Формулювання задачі і метод її розв'язку.** Не порушуючи концептуальної загальності, але з метою спрощення математичного викладення, розглянемо металічну пластину, яка містить дві рівні колінеарні тріщини вздовж осі  $Ox$  на відрізках  $-b \leq x \leq -a$  і  $a \leq x \leq b$ , перебуває під дією високої температури і довготривалого статичного навантаження  $p$  (рис. 1).

Вважається, що тріщини макроскопічні, а зовнішні розтягуючі навантаження прикладені так, що стосовно лінії розміщення тріщин напружено-деформований стан симетричний,

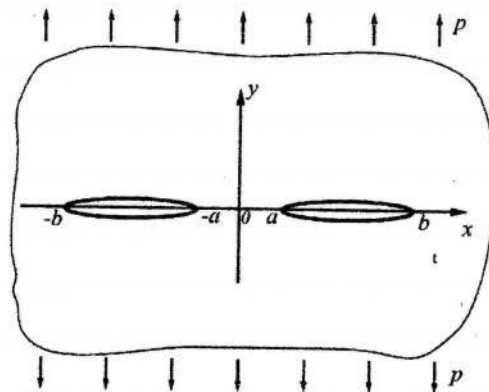


Рис. 1. Схема навантаження пластини послабленої системою двох компланарних тріщин

тобто описується в околі їхніх вершин тільки коефіцієнтом інтенсивності напружень  $K_I$ . Задача полягає у визначенні часу  $t=t_*$ , коли в результаті високотемпературної повзучості тріщини підростуть до критичного розміру  $l_* = b_* - a_*$  і пластина зруйнується.

Для розв'язку такої задачі використовуємо розрахункову модель з [5], тобто математичні рівняння, які описують такий процес:

$$V = 0,6666EA_1 [\delta_{It}(0) \delta_{Ic}^{-1}]^m [\sigma_t - \delta_{Ic}^{-1} \sigma_t \delta_{It}(0)]^{-1}. \quad (1)$$

Тут  $E$  - модуль пружності;  $A_1 = A \delta_{Ic} \varepsilon_c^{(m-1)}$ , де  $A$ ,  $m$  - характеристики високотемпературної повзучості матеріалу;  $\delta_{It}(0) \delta_{Ic}^{-1} = K_I^2 / K_{IC}^2$ ,  $K_I$  - коефіцієнт інтенсивності напружень;  $K_{IC}$  - характеристика тріщиностійкості матеріалу;  $\sigma_t$  - усереднене нормальне напруження в зоні передруйнування згідно з  $\delta_c$  - моделлю [10].

Додамо початкову і кінцеву умови

$$t = 0, \quad a(0) = a_0, \quad b(0) = b_0; \quad t = t_*, \quad a(t_*) = a_*, \quad b(t_*) = b_*, \quad (2)$$

де критичну довжину  $l = l_* = b_* - a_*$  визначають із критерію критичного розкриття тріщини [1]

$$\delta_{It}(l_*) = \delta_{Ic}. \quad (3)$$

Відомо [11], що для такої задачі коефіцієнти інтенсивності матимуть вигляд:

$$K_I(b) = \frac{\sqrt{\pi} p b^2 (1 - E(k)/K(k))}{\sqrt{b(b^2 - a^2)}}, \quad K_I(a) = \frac{\sqrt{\pi} p a^2 (b^2 E(k)/(a^2 K(k)) - 1)}{\sqrt{a(b^2 - a^2)}}, \quad (4)$$

де  $K(k)$  - повний еліптичний інтеграл першого роду з модулем  $k = \sqrt{b^2 - a^2}/b$ ;  $E(k)$  - повний еліптичний інтеграл другого роду.

Тоді сформульована розрахункова модель (1)-(3) з врахуванням співвідношення (4) зведеться до такої системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{db}{dt} &= \frac{2EA_1}{3\sigma_t} \left( \frac{\pi p^2 b^3 (1 - E(k)/K(k))^2}{(b^2 - a^2) K_{IC}^2} \right)^m \left( 1 - \frac{\pi p^2 b^3 (1 - E(k)/K(k))^2}{(b^2 - a^2) K_{IC}^2} \right)^{-1}, \\ \frac{da}{dt} &= -\frac{2EA_1}{3\sigma_t} \left( \frac{\pi p^2 b^4 (E(k)/K(k) - a^2/b^2)^2}{a(b^2 - a^2) K_{IC}^2} \right)^m \left( 1 - \frac{\pi p^2 b^4 (E(k)/K(k) - a^2/b^2)^2}{a(b^2 - a^2) K_{IC}^2} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

з початковими і кінцевими умовами

$$t = 0, \quad a(0) = a_0, \quad b(0) = b_0; \quad t = t_*, \quad a(t_*) = a_*, \quad b(t_*) = b_*. \quad (6)$$

У системі (5) зробимо заміну

$$\varepsilon = 1 - a/b, \quad l = b - a. \quad (7)$$

В результаті система диференціальних рівнянь (5) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \frac{4EA_1}{3\sigma_t} \left( \frac{\pi p^2 l}{(2-\varepsilon)K_{IC}^2} \right)^m \left( 1 - \frac{\pi p^2 l}{(2-\varepsilon)K_{IC}^2} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( m + \frac{\pi p^2 K_{IC}^{-2} l}{2 - \pi p^2 K_{IC}^{-2} l} \right) \varepsilon \right), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{4EA_1}{3\sigma_t} \left( \frac{\pi p^2 l}{(2-\varepsilon)K_{IC}^2} \right)^m \left( 1 - \frac{\pi p^2 l}{(2-\varepsilon)K_{IC}^2} \right)^{-1} \frac{\varepsilon}{l} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( m + 1 + \frac{\pi p^2 K_{IC}^{-2} l}{2 - \pi p^2 K_{IC}^{-2} l} \right) \varepsilon \right), \end{aligned} \quad (8)$$

з такими початковими і кінцевими умовами

$$t = 0, \quad l(0) = l_0, \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0; \quad t = t_*, \quad l(t_*) = l_*, \quad \varepsilon(t_*) = \varepsilon_*. \quad (9)$$

Поділимо друге рівняння системи (8) на перше і отримаємо таке диференціальне рівняння

$$\frac{d\varepsilon}{dl} = \frac{\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{2l} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( m + \frac{\pi p^2 K_{IC}^{-2} l}{2 - \pi p^2 K_{IC}^{-2} l} \right) \varepsilon \right)^{-1}. \quad (10)$$

Розкладемо задане рівняння (10) за  $\varepsilon$  і проінтегруємо, враховуючи початкові та кінцеві умови (9). В результаті отримаємо

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{l}{l_0}. \quad (11)$$

Підставивши (11) в перше рівняння системи (8) і розклавши його за степенями  $\varepsilon$ , одержимо

$$\begin{aligned} dt &= \frac{3\sigma_t}{4EA_1} \left( \frac{2K_{IC}^2}{\pi p^2} \right)^m l^m \times \\ &\times \left( 1 - \frac{\pi p^2 K_{IC}^{-2} l}{2} - \left( \frac{\pi p^2 K_{IC}^{-2} l^2}{8l_0} - \frac{m\pi p^2 K_{IC}^{-2} l^2}{4l_0(2 - \pi p^2 K_{IC}^{-2} l)} + \frac{\pi^2 p^4 K_{IC}^{-4} l^3}{8l_0(2 - \pi p^2 K_{IC}^{-2} l)^2} \right) \varepsilon_0^2 \right) dl. \end{aligned} \quad (12)$$

Легко бачити таке: якщо в рівнянні (12)  $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ , то отримаємо аналог задачі Гріффітса для випадку високотемпературної повзучості [2, 3].

$$dt = \frac{3\sigma_t}{4EA_1} \left( \frac{2K_{IC}^2}{\pi p^2} \right)^m \left( l^{-m} - \frac{\pi p^2 K_{IC}^{-2}}{2} l^{1-m} \right) dl. \quad (13)$$

Проінтегруємо рівняння (13) з врахуванням умов (9), одержимо розв'язок у вигляді

$$t = \frac{3\sigma_t}{4EA_1} \left( \frac{2K_{IC}^2}{\pi p^2} \right)^m \left( \frac{l^{1-m}}{1-m} - \frac{l_0^{1-m}}{1-m} - \frac{\pi p^2}{2K_{IC}^2} \frac{l^{2-m}}{2-m} + \frac{\pi p^2}{2K_{IC}^2} \frac{l_0^{2-m}}{2-m} \right). \quad (14)$$

Задамо параметри рівняння (14) для випадку матеріалу Allow 100 [8] так:

$$E = 1,9 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \quad \sigma_t = 730 \text{ MPa}, \quad A_1 = 3,22 \cdot 10^{-4}, \quad m = 7,53,$$

$$l_0 = 2 \text{ мм}, \quad p = 0,2186 K_{IC}. \quad (15)$$

Враховуючи це, співвідношення (14) зведемо до вигляду

$$t = -4,37 \cdot 10^6 \cdot l^{-6,53} + 3,05 \cdot 10^4 + 7,75 \cdot 10^5 \cdot l^{-5,53}. \quad (16)$$

На основі цього співвідношення на рис. 2 побудовано залежність довжини тріщини  $l$  від часу її росту  $t$ .

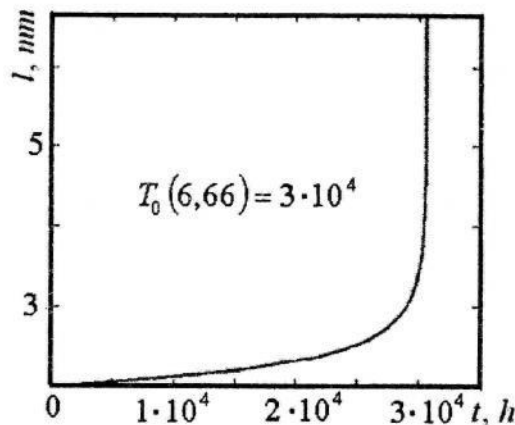


Рис. 2

Як видно з рис. 2, при наближенні довжини тріщини до критичного значення  $l = l_*$  швидкість її росту прямує до нескінченності.

1. Тайра С., Отани Р. Теория высокотемпературной прочности материалов. – М., 1986.
2. Андрейків О.Є., Сас Н.Б. Визначення залишкового ресурсу труби з поверхневою тріщиною при довготривалому тиску і високій температурі // *Машинознавство*. – Львів, 2005. – № 4. – С. 3–6.
3. Андрейків О.Є., Сас Н.Б. Механіка руйнування металічних пластин при високотемпературній повзучості // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2006. – № 2. – С. 62–68.

4. *Лепин Г.Ф.* Ползучесть металлов и критерии жаропрочности. – М., 1976.
5. *Jakowluk A.* Procesy pelzania i zmecznia w materialach. – Warszawa, 1993.
6. *Каминский А.А.* Механика разрушения вязкоупругих тел. – К., 1980.
7. *Kaminsky A.A.* Subcritical crack growth in polymer composite materials under creep // *Advances in Fracture Resistance and Structural Integrity: Selected papers from the 8<sup>th</sup> Int.Conf. on Fracture (ICF 8), Kyiv, Ukraine, 8-14 June 1993.* – Pergamon, 1994. – P. 513–520.
8. *Fuji A. and Kitagawa M.* A Comparison of Creep Crack Growth Behaviour in Nickel Based Super Alloy with Low Alloy Steel // *Ibid.* – P. 487–495.
9. *Koterazawa R.* Propagation of surface crack under creep and fatigue conditions at elevated temperature // *Proc. Int. Conf. on Creep, ISME, ImechE, ASME, ASTM, 1986.* – P. 291–296.
10. *Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З.* Основы механики разрушения. – К., 1988.
11. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4-х т. / Под общей редакцией Панасюка В.В. – К., 1988. – Т. 2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / Саврук М.П. – 1988. – С. 74–81.

## EVALUATION OF RESIDUAL LIFE TIME OF A PLATE WITH SYSTEM TWO COPLANAR OF CRACKS UNDER LONG TERM STATIC TENSION AT HIGH-TEMPERATURE

Natalija SAS

*Ivan Franko National University of Lviv,  
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

The life time of a plate with the system of two coplanar of cracks under long-term static tension at high-temperature is determined with the help of a calculation model, which was formulated by the author earlier. Cases, especially analoges of the Griffith in the case of the crack propagation crack under high-temperature creep were examined.

*Key words:* : life time, coplanar cracks, high-temperature creep, long-term static tension .

Стаття надійшла до редколегії 21.12.2005  
Прийнята до друку 22.11.2006