

УДК 539.3

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛАСТИНИ З ДВОМА ТРІЩИНАМИ, ЯКІ РОЗМІЩЕНІ УЗДОВЖ ДУГ НЕКОНЦЕНТРИЧНИХ КІЛ

Віктор ОПАНАСОВИЧ, Наталія КОПОТЬ, Назар КОЦЮМБАС

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Досліджено напружено-деформований стан ізотропної пластини з двома тріщинами різної довжини, які розміщені уздовж дуг неконцентричних кіл за умови, що береги тріщин зазнають гладкого контакту вздовж усієї довжини, під дією однорідного поля зусиль на нескінченності. Із використанням теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів, розв'язок задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз контактних напружень і коефіцієнтів інтенсивності напружень при різному значенні параметрів задачі.

Ключові слова: ізотропна пластинка, тріщина, гладкий контакт, комплексні потенціали, коефіцієнти інтенсивності напружень.

У реальних матеріалах завжди є різні дефекти мікро- та макроструктури, розвиток яких під дією навантаження призводить до появи тріщин, а згодом і до руйнування тіла. Причиною руйнування є формування та поширення однієї з тріщин, яка є своєрідним катализатором руйнування. Якщо пластинка з тріщинами перебуває під дією однорідного поля напружень на нескінченності, між берегами тріщин існує певна взаємодія, що призводить до перерозподілу поля напружень і деформацій в ній. Аналіз умов повного контакту берегів тріщини по дузі кола розглянуто в [1]. Напружений стан пластини з двома розрізами, які симетрично

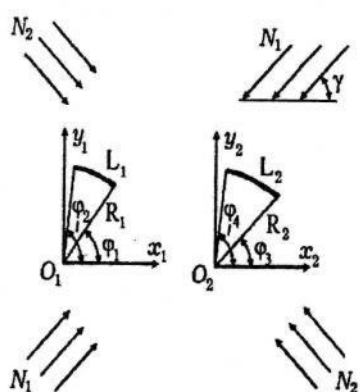


Рис. 1. Схема розміщення тріщин у пластині

розміщені стосовно осей координат уздовж дуг одного кола, краї яких повністю змикаються, досліджено в [2]. Контакт берегів різних завдовжки тріщин, які розміщені уздовж дуги одного кола та різних концентричних кіл, розглянуто в працях [3, 4].

Мета нашої праці – провести аналіз напружено-деформованого стану ізотропної пластини з двома тріщинами різної довжини, які розміщені уздовж дуг неконцентричних кіл за умови, що береги тріщин зазнають гладкого контакту вздовж усієї довжини під дією однорідного поля зусиль на нескінченності.

Формулювання задачі. Нехай ізотропна пластинка містить дві тріщини уздовж дуг неконцентричних кіл і перебуває під дією однорідного поля зусиль на нескінченності N_1 і N_2 , причому

головна вісь, що відповідає N_1 , утворює кут γ з віссю Ox , крім того, для стискування $N_j > 0$. Центри кіл, уздовж дуг яких розміщені тріщини, позначимо через O_j . Тут і надалі індекс j набуває двох значень 1 та 2.

Виберемо початок j -ї декартової системи координат $O_j x_j y_j$ в центрі j -го кола радіуса R_j , спрямувавши осі $O_j x_j$ уздовж відрізка $O_1 O_2$ (див. рис. 1). Центральні кути, які відповідають кінцям тріщин, позначимо через φ_i ($i = \overline{1,4}$), дуги, вздовж яких розміщені тріщини, – через L_j .

Згідно з формулюванням задачі крайові умови матимуть вигляд

$$\sigma_{rrj}^+ = \sigma_{rrj}^- = \sigma_{r\vartheta j}, \quad \sigma_{r\vartheta j}^+ = \sigma_{r\vartheta j}^- = 0, \quad u_{rj}^+ - u_{rj}^- = 0, \quad \text{на } L_j, \quad (1)$$

де σ_{rrj} , $\sigma_{r\vartheta j}$ – компоненти тензора напружень у полярній системі координат $(r_j)(\vartheta_j)$ з полюсом у центрі кола радіуса R_j і полярною віссю Ox_j ; u_{rj} , $u_{\vartheta j}$ – проекції вектора переміщення відповідно на осі (r_j) і (ϑ_j) ; значками “+”, “-” позначено граничні значення відповідних функцій при прямуванні точки пластини до лінії L_j при $r_j \rightarrow R_j \mp 0$.

Побудова розв’язку задачі. Введемо до розгляду комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі [5], тоді для визначення напружено-деформованого стану пластини матимемо співвідношення [6]

$$\sigma_{rrj} + i\sigma_{\vartheta\vartheta j} = 4\Gamma + 2\sum_{n=1}^2 (\Phi_n(z_n) + \overline{\Phi_n(z_n)}), \quad (2)$$

$$\sigma_{r\vartheta j} + i\sigma_{\vartheta r j} = 2\Gamma - \frac{\bar{z}_j}{z_j} \bar{\Gamma}' + \sum_{n=1}^2 \left\{ \Phi_n(z_n) + \overline{\Phi_n(z_n)} - \frac{\bar{z}_j}{z_j} (z_n \overline{\Phi_n'(z_n)} + \overline{\Psi_n(z_n)}) \right\}, \quad (3)$$

$$2\mu \partial \left((u_{rj} + iu_{\vartheta j}) e^{i\vartheta_j} \right) / \partial \vartheta_j = iz_j \left((\kappa - 1)\Gamma + \bar{z}_j / z_j \bar{\Gamma}' + \sum_{n=1}^2 [\kappa \Phi_n(z_n) - \overline{\Phi_n(z_n)} + \bar{z}_j / z_j (\overline{\Psi_n(z_n)} + z_n \overline{\Phi_n'(z_n)})] \right), \quad (4)$$

де $\Gamma = -0,25(N_1 + N_2)$, $\Gamma' = 0,5(N_1 - N_2)e^{-2i\gamma}$, $\mu = E/(2(1 + \nu))$ – модуль зсуву; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, $z_j = x_j + iy_j$; i – уявна одиниця, причому $z_1 = z_2 + x_0$.

Введемо до розгляду функції [6]

$$\Omega_j(z_j) = -\bar{\Phi}_j(R_j^2/z_j) + R_j^2/z_j \bar{\Phi}_j'(R_j^2/z_j) + R_j^2/z_j^2 \bar{\Psi}_j(R_j^2/z_j), \quad (5)$$

тоді функції $\Phi_j(z_j)$ і $\Omega_j(z_j)$ в околі безмежно віддаленої точки та нуля можна подати у вигляді [6]

$$\Phi_j(z_j) = \begin{cases} O(1/z_j^2), & z_j \rightarrow \infty, \\ A_{1j} + O(z_j), & z_j \rightarrow 0, \end{cases} \quad \Omega_j(z_j) = \begin{cases} -\bar{A}_{1j} + O(1/z_j^2), & z_j \rightarrow \infty, \\ O(1), & z_j \rightarrow 0. \end{cases} \quad (6)$$

Тут A_{1j} – невідома комплексна стала.

Враховавши (5), залежності (2)–(4) перепишемо у вигляді

$$\sigma_{rj} + i\sigma_{r\vartheta j} = 2\Gamma - \bar{z}_j/z_j \bar{\Gamma}' + \sum_{n=1}^2 \{ \Phi_n(z_n) - \tilde{\Omega}_n(z_j, z_n) \}, \quad (7)$$

$$2\mu \frac{\partial((u_{rj} + iu_{\vartheta j})e^{i\vartheta j})}{\partial\vartheta_j} = iz_j \left[(\kappa - 1)\Gamma + \frac{\bar{z}_j}{z_j} \bar{\Gamma}' + \sum_{n=1}^2 [\kappa\Phi_n(z_n) + \tilde{\Omega}_n(z_j, z_n)] \right], \quad (8)$$

де $\tilde{\Omega}_n(z_j, z_n) = (\bar{z}_j/z_j)(R_n^2/\bar{z}_n^2)\Omega_n(R_n^2/\bar{z}_n) - (1 - (\bar{z}_j/z_j)(R_n^2/\bar{z}_n^2))\overline{\Phi_n(z_n)} + \bar{z}_j/z_j(1 - R_n^2/r_n^2)z_n\overline{\Phi_n'(z_n)}$.

Беручи до уваги (7), з крайової умови (1) отримаємо

$$(\Phi_j(t_j) + \Omega_j(t_j))^+ - (\Phi_j(t_j) + \Omega_j(t_j))^- = 0, \quad t_j \in L_j. \quad (9)$$

Враховуючи (6) та розв'язуючи задачу лінійного спряження (9), матимемо

$$\Omega_j(z_j) = -\Phi_j(z_j) - \bar{A}_{1j}. \quad (10)$$

Підставивши (10) у (8) та враховавши останню крайову умову (1), прийдемо до задач лінійного спряження для знаходження функцій $\Phi_j(z_n)$, розв'язавши які, отримаємо

$$\Phi_j(z_n) = \frac{B}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{1}{t_j} \frac{\partial}{\partial u_j} (e^{iu_j} (u_{\vartheta j}^+ - u_{\vartheta j}^-)) \frac{dt_j}{t_j - z_n}, \quad t_j = R_j e^{iu_j}, \quad n = 1, 2, \quad (11)$$

де $B = 2\mu/(\kappa + 1)$.

На основі (11) можемо записати

$$\begin{aligned} \Phi_j^+(t_j) + \Phi_j^-(t_j) &= -\frac{B}{\pi R_j} \int_{L_j^*} \frac{\partial}{\partial u} (u_{\vartheta j}^+ - u_{\vartheta j}^-) L_n \left| \sin \frac{\vartheta_j - u}{2} \right| du - \\ &\quad - \frac{iB}{2\pi R_j} \int_{L_j^*} \frac{\partial}{\partial u} (u_{\vartheta j}^+ - u_{\vartheta j}^-) \left(\operatorname{ctg} \frac{\vartheta_j - u}{2} + u \right) du, \quad t_j \in L_j, \end{aligned} \quad (12)$$

де $L_j^* = [\varphi_{2j-1}, \varphi_{2j}]$.

Підставивши (10) у (7) і задовольнивши крайові умови (1), отримаємо

$$\sigma_{rj} = 2\Gamma - \bar{t}_j/t_j \bar{\Gamma}' + \Phi_j^+(t_j) + \Phi_j^-(t_j) + \bar{A}_{1j} + \tilde{R}_{3-j}(t_j), \quad t_j \in L_j. \quad (13)$$

Тут

$$\begin{aligned} \tilde{R}_j(t_{3-j}) &= 2 \operatorname{Re}(\Phi_j(t_j^*)) + \overline{t_{3-j} t_{3-j}^{-1}} R_j^2 \overline{t_j^*}^{-2} \left[\Phi_j(R_j^2/\overline{t_j^*}) + \overline{A_{1j}} - \overline{\Phi_j(t_j^*)} \right] - \\ &- \overline{t_{3-j} t_{3-j}^{-1}} \left(1 - R_j^2/(\overline{t_j^*} t_j^*) \right) \overline{t_j^*} \overline{\Phi_j'(t_j^*)}, \quad t_j^* = t_{3-j} - R_j \gamma_j, \quad \gamma_j = (-1)^j x_0/R_j. \end{aligned}$$

Підставивши (12) у (13), виділивши уявну та дійсну частини та ввівши позначення $y_j(\vartheta_j) = B/((N_1 - N_2)R_j) \partial(u_{\vartheta_j}^+ - u_{\vartheta_j}^-)/\partial\vartheta_j$, з одержаної залежності отримаємо сингулярні інтегральні рівняння для визначення шуканих функцій $y_j(\vartheta_j)$

$$\int_{L_j^*} y_j(u) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_j - u}{2} du + \int_{L_{3-j}^*} y_{3-j}(u) Q_{3-j}(\vartheta_j, u) du = \pi \sin 2(\gamma - \vartheta_j), \quad \vartheta_j \in L_j^*, \quad (14)$$

і вираз для визначення контактних напружень σ_{rrj}

$$\begin{aligned} \sigma_{rrj} &= 2\Gamma - \frac{1}{2}(N_1 - N_2) \cos 2(\gamma - \vartheta_j) - \frac{(N_1 - N_2)}{2\pi} \times \\ &\times \left(2 \int_{L_j^*} y_j(u) \operatorname{Ln} \left| \sin \left(\frac{\vartheta_j - u}{2} \right) \right| du - \int_{L_{3-j}^*} y_{3-j}(u) W_{3-j}(\vartheta_j, u) du \right), \quad \vartheta_j \in L_j^*, \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} Q_j(\vartheta, u) &= d_{3-j}^2 \alpha_{03-j}^{-2} \left\{ 2(\alpha_{3-j} K_{2j}(\vartheta, u) - \beta_{3-j} K_{1j}(\vartheta, u)) + \right. \\ &\quad \left. + (d_j^2 \alpha_{03-j} - 1)(\alpha_{3-j} K_{4j}(\vartheta, u) - \beta_{3-j} K_{3j}(\vartheta, u)) \right\}, \\ W_j(\vartheta, u) &= -\operatorname{Ln} |G_j(\vartheta, u)| + d_{3-j}^2 \alpha_{03-j}^{-2} \left\{ 2((d_j^2 \alpha_{03-j}^2 - \alpha_{3-j}) K_{1j}(\vartheta, u) - \right. \\ &\quad \left. - \beta_{3-j} K_{2j}(\vartheta, u)) - (d_j^2 \alpha_{03-j} - 1)(\alpha_{3-j} K_{3j}(\vartheta, u) + \beta_{3-j} K_{4j}(\vartheta, u)) \right\}, \\ \alpha_{0j} &= 1 + \gamma_j^2 + 2\gamma_j \cos \vartheta_j, \quad \alpha_j = 1 + \gamma_j^2 \cos 2\vartheta_j + 2\gamma_j \cos \vartheta_j, \\ \beta_j &= -\gamma_j^2 \sin 2\vartheta_j - 2\gamma_j \sin \vartheta_j, \quad d_j = R_{3-j}/R_j, \\ K_{1j}(\vartheta, u) &= (1 + \gamma_j \cos u - d_j \cos(\vartheta - u))/G_j(\vartheta, u), \\ K_{2j}(\vartheta, u) &= (\gamma_j \sin u + d_j \sin(\vartheta - u))/G_j(\vartheta, u), \\ K_{3j}(\vartheta, u) &= (1 + \gamma_j^2 \cos 2u + 2\gamma_j \cos u + d_j^2 \cos 2(\vartheta - u) - \\ &\quad - 2d_j (\cos(\vartheta - u) + \gamma_j \cos(\vartheta - 2u)))/G_j^2(\vartheta, u), \\ K_{4j}(\vartheta, u) &= (\gamma_j^2 \sin 2u + 2\gamma_j \sin u - d_j^2 \sin 2(\vartheta - u) + \\ &\quad + 2d_j (\sin(\vartheta - u) + \gamma_j \sin(\vartheta - 2u)))/G_j^2(\vartheta, u), \\ G_j(\vartheta, u) &= 1 + d_j^2 - 2d_j \cos(\vartheta - u) + \gamma_j^2 + 2\gamma_j (\cos u - d_j \cos \vartheta). \end{aligned}$$

Рівняння (14) доповнимо співвідношеннями, які виражають однозначність переміщень при обході контурів тріщин

$$\int_{L_j^*} y_j(t) dt = 0. \quad (16)$$

Числові результати та висновки. Систему інтегральних рівнянь (14), (16) розв'язуємо чисельно за допомогою методу механічних квадратур [7]. У результаті прийдемо до такої системи алгебричних рівнянь для знаходження вузлових значень шуканих функцій

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^M U_i(t_m) G_{ij}(t_m, x_r) &= \sin 2(\gamma - a_j x_r - b_j), \quad r = \overline{1, M-1}, \\ \sum_{m=1}^M U_j(t_m) &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} x_r &= \cos \frac{\pi r}{M}, \quad t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi, \quad U_j(t) = y_j(a_j t + b_j) \sqrt{1-t^2}, \\ G_{jj}(t, x) &= a_j \operatorname{ctg} \frac{a_j(x-t)}{2}, \quad G_{ij}(t, x) = a_i Q_i(a_i t + b_i, a_j x + b_j), \\ a_j &= (\varphi_{2j} - \varphi_{2j-1})/2, \quad b_j = (\varphi_{2j} + \varphi_{2j-1})/2. \end{aligned}$$

Коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) знайдемо за формулами [7]

$$K_{1j}^{\pm} = 0, \quad K_{2j}^{\pm} = \mp \sqrt{R_j a_j} \tilde{U}_j(\pm 1), \quad (j = 1, 2), \quad (18)$$

де

$$\tilde{U}_j(\pm 1) = \frac{(\pm 1)^{M+1}}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} U_j(t_m) \operatorname{ctg}^{\pm 1} \frac{2m-1}{4M} \pi.$$

Враховуючи (15), контактні напруження можна подати у вигляді

$$\sigma_{\pi j} = 2\Gamma - 0,5(N_1 - N_2)(\cos 2(\gamma - \vartheta_j) - B(\vartheta_j)), \quad \vartheta_j \in L_j^*, \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} B(\vartheta_j) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left\{ 2a_j U_j(t_m) \operatorname{Ln} \left| \sin \frac{\vartheta_j - t_{jm}}{2} \right| - a_{3-j} U_{3-j}(t_m) W_{3-j}(\vartheta_j, t_{3-j m}) \right\}, \\ t_{jm} &= a_j t_m + b_j. \end{aligned}$$

Для визначення залежності між кутами розкриття тріщин і напруженим станом на нескінченності, за якого відбуватиметься повний контакт берегів тріщин, подамо контактні напруження $\sigma_{\pi j}(\vartheta_j)$ (19) у вигляді

$$\sigma_{\pi j}^* = \sigma_{\pi j}(\vartheta_j)/N_1 = -1 - \lambda_j(\vartheta_j) + \tilde{\nu} \lambda_j(\vartheta_j), \quad \tilde{\nu} = N_2/N_1, \quad j = 1, 2, \quad (20)$$

де

$$\lambda_j(\vartheta_j) = 0,5(-1 + \cos 2(\gamma - \vartheta_j) + B(\vartheta_j)). \quad (21)$$

Користуючись (21), знайдемо максимальне та мінімальне значення $\lambda_j(\vartheta_j)$, коли $\varphi_{2j-1} < \vartheta_j < \varphi_{2j}$, позначимо їх відповідно $\lambda_{j \max}$ та $\lambda_{j \min}$.

Введемо позначення

$$\nu_{j \max} = 1 + 1/\lambda_{j \max}, \quad \nu_{j \min} = 1 + 1/\lambda_{j \min}, \quad j = 1, 2. \quad (22)$$

Як видно з (20), контактні напруження лінійно залежать від \tilde{v} , тому береги j -ї тріщини зазнаватимуть гладкого контакту вздовж усієї довжини, якщо \tilde{v} задовольняє нерівність $\nu_{j \min} \leq \tilde{v} \leq \nu_{j \max}$ і $\nu_{j \min} < \nu_{j \max}$, в протилежному випадку, якщо $\tilde{v} > \nu_{j \max}$ або $\tilde{v} < \nu_{j \min}$.

Зробили числовий аналіз задачі, який подано на рис. 2-7. Зауважимо, що у часткових випадках результати збігаються з числовими значеннями, які отримали у працях [1-4].

Розглянемо дві однакові завдовжки тріщини, коли $\varphi_1 = -\varphi$, $\varphi_2 = \varphi$, $\varphi_3 = \pi - \varphi$, $\varphi_4 = \pi + \varphi$, $R_1 = R_2 = R$.

Рис. 2 та 3 побудовані для випадку, коли $\varphi = 45^\circ$, $\gamma = 0$, $x_0/R = 3$, при цьому $\nu_{1 \max} = \nu_{2 \max} = \nu_{\max} = 12,95$, $\nu_{1 \min} = \nu_{2 \min} = \nu_{\min} = -0,63$. На рис. 2 зображено розподіл контактних напружень $\sigma_{r1}^* = \sigma_{r1}/N_1$ уздовж берегів

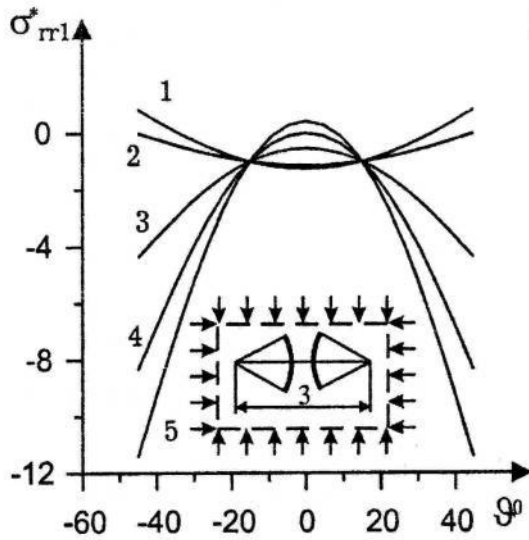


Рис. 2

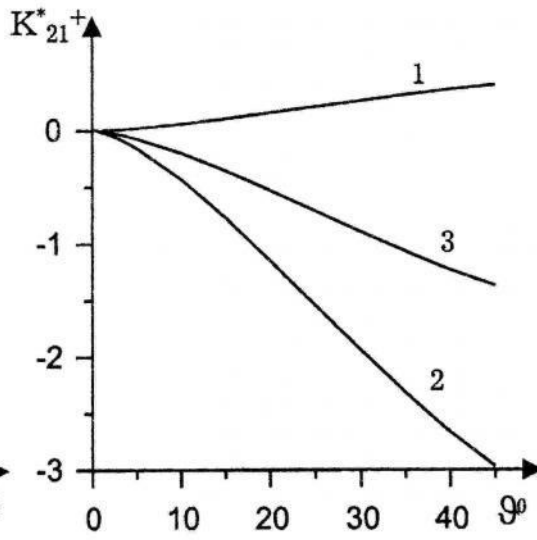


Рис. 3

першої тріщини. Криві 1-5 побудовано відповідно при $\tilde{v} = -2 < \nu_{\min}$, $\tilde{v} = \nu_{\min}$, $\tilde{v} = 6,5$, $\tilde{v} = \nu_{\max}$, $\tilde{v} = 18 > \nu_{\max}$. Як видно з рис. 2, при $\tilde{v} = \nu_{\min}$ величина σ_{r1}^*

перетворюється в нуль на кінцях тріщин, а при $\tilde{v} = v_{\max}$ – у центрі, якщо $v_{\min} \leq \tilde{v} \leq v_{\max}$, то береги обох тріщин контактуватимуть уздовж усієї своєї довжини, якщо ця нерівність не виконується, то контактні напруження змінюють знак, тобто треба розглянути задачу в іншому формулюванні, враховуючи відставання берегів тріщин.

На рис. 3 показано графічну залежність приведених КІН $K_{21}^{*\pm} = K_{21}^{\pm}/N_1$. Крива 1 побудована при $\tilde{v} = v_{\min} = -0,63$, крива 2 – при $\tilde{v} = 6,5$, крива 3 – при $\tilde{v} = v_{\max} = 12,95$. Зауважимо, що для заданого випадку $K_{21}^{*+} = K_{22}^{*+}$ і $K_{2j}^{*+} = -K_{2j}^{*-}$.

На рис. 4 зображено графічну залежність граничних значень головних напружень на нескінченності $\tilde{v} = N_2/N_1$, за яких береги тріщин зазнаватимуть повного контакту, від зміни кута γ для $\varphi = 45^\circ$. Зауважимо таке: якщо $\gamma \leq 74,5^\circ$, то береги тріщин контактуватимуть, коли \tilde{v} виберемо з діапазону $v_{\min} \leq \tilde{v} \leq v_{\max}$, а для $\gamma > 74,5^\circ$ – якщо $\tilde{v} > v_{\min}$ або $\tilde{v} < v_{\max}$. Якщо γ змінювати від 90° до 180° то криві для v_{\min} і v_{\max} будуть симетричними відносно прямої $\gamma = 90^\circ$.

На рис. 5 зображено графічну залежність K_{21}^{*-} від зміни кута γ при $\tilde{v} = 0,07$. Крива 1 побудована при $\varphi = 30^\circ$, криві 2 і 3 – при $\varphi = 45^\circ$ та $\varphi = 60^\circ$ відповідно. Як видно з рис. 5, коефіцієнти інтенсивності напружень спочатку зростають до деякого числа, а потім спадають і міняють знак. Зазначимо, що $K_{21}^{*+} = K_{22}^{*+}$, $K_{2j}^{*+} = -K_{2j}^{*-}$ і криві для K_{2j}^{*+} є симетричними до

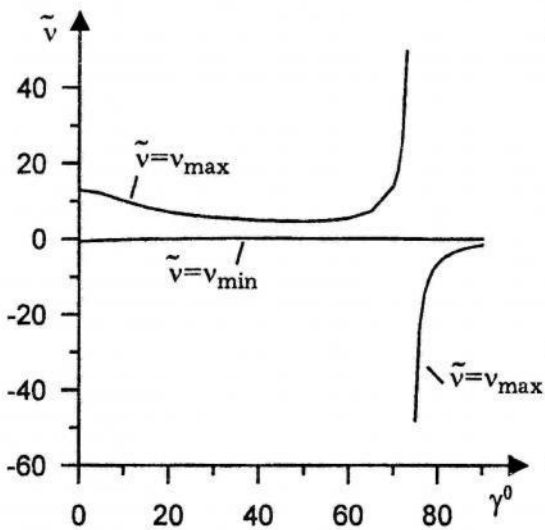


Рис. 4

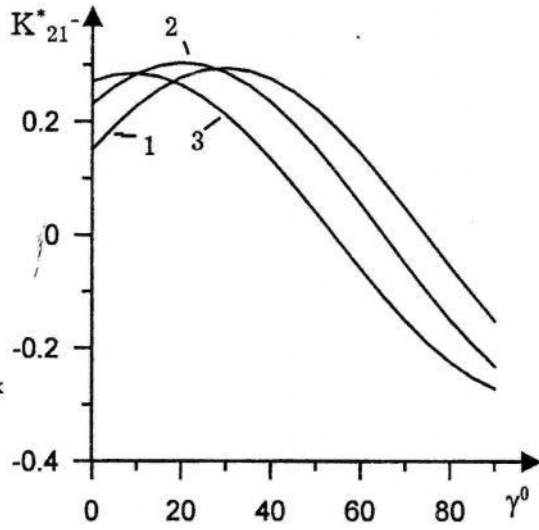


Рис. 5

K_{2j}^{*-} стосовно прямої $\gamma = 45^\circ$, тому графічної залежності для них не наводимо.

Рис. 6, 7 побудовані для випадку, коли $\varphi_1 = \varphi_3 = -60^\circ$, $\varphi_2 = \varphi_4 = 60^\circ$, $\gamma = 0$, $R_1 = R_2 = R$. На рис. 6 зображено залежність граничних значень \tilde{v} від відстані між центрами кіл $x_0^* = x_0/R$. Кривим 1 і 2 відповідають $v_{1 \max}$ та $v_{2 \max}$, а кривим 3, 4 – $v_{1 \min}$ та $v_{2 \min}$ відповідно. На підставі рис. 6 можна зробити висновки, що береги обох тріщин зазнаватимуть контакту уздовж усієї своєї довжини, якщо \tilde{v} задовольнятиме нерівність $v_{1 \min} \leq \tilde{v} \leq v_{1 \max}$, коли $v_{1 \max} < \tilde{v} \leq v_{2 \max}$ (або $v_{2 \min} \leq \tilde{v} < v_{1 \min}$), то береги другої тріщини контактуватимуть уздовж усієї довжини, а на першій тріщині буде відставання у центрі тріщини (на кінцях). Якщо $\tilde{v} > v_{2 \max}$, то у центрі обох тріщин береги не будуть контактувати, а при $\tilde{v} < v_{2 \min}$ – на кінцях обидвох

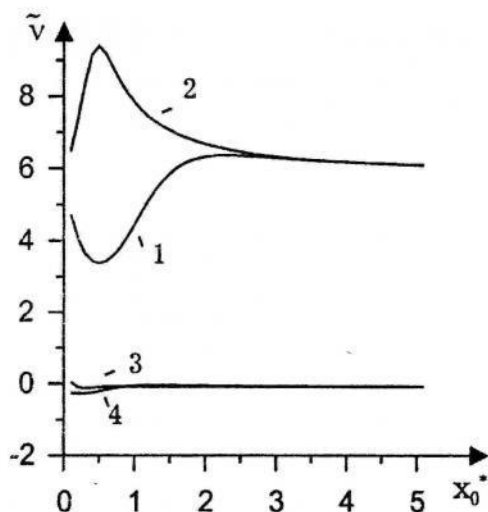


Рис. 6

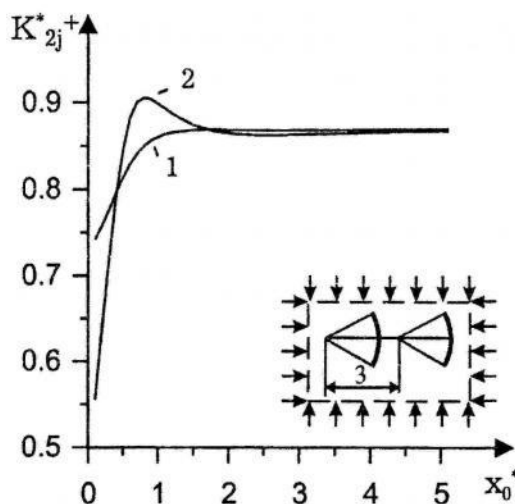


Рис. 7

тріщин буде відставання.

На рис. 7 показано графічну залежність приведених КІН від x_0^* при $\tilde{v} = 4$. Кривій 1 відповідає K_{21}^{*+} , кривій 2 – K_{22}^{*+} . Як видно з рис. 7, для малих x_0^* коефіцієнти інтенсивності напружень менші за величиною від відповідних значень для однієї тріщини, при цьому для певних x_0^* K_{22}^{*+} перевищують це значення.

З рис. 6, 7 можна зробити висновки, що при збільшенні відстані між центрами кіл максимальні граничні значення головних напружень на нескінченності та коефіцієнти інтенсивності напружень прямують до однакової величини і збігаються з результатами для однієї тріщини.

1. Опанасович В.К. Аналіз умов повного контакту берегів тріщини по дузі кола // Праці наукового товариства ім. Шевченка. – 1997. – Т. 1. – С. 483–493.
2. Гриліцький Д.В., Луцишин Р.М. Напруження в пластинах з коловою лінією розмежування граничних умов. – Львів, 1975.
3. Опанасович В., Копоть Н. Контактна задача для пластини з двома тріщинами різних довжин уздовж дуги кола // Вісн. Львів. ун.-ту. Сер. мех.-мат. – 2002. – Вип. 60. – С. 155–160.
4. Опанасович В., Копоть Н. Контактна задача для пластини з тріщинами уздовж дуг концентричних кіл // Математичні методи механіки неоднорідних структур. – Львів, 2003. – С. 328–331 (564).
5. Мухелишвили И.Н. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966.
6. Пруссов И.А. Некоторые задачи термоупругости. – Минск, 1972.
7. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К., 1976.

CONTACT PROBLEM FOR A PLATE WITH TWO CRACKS ON ARCHES OF NONCONCENTRIC CIRCLES

Viktor Opanasovych, Nataliya Kopot', Nazar Kotsyumbas

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

In the paper the stress state of a isotropic plate containing two unequal cracks on arches of nonconcentric circles is considered. It is assumed that the faces of the cracks are in smooth contact on all length of the cracks under the influence of a homogeneous load field on infinity. Using the methods of the theory of functions of complex variable and complex potentials the solution of this problem is reduced to a system of singular integral equations, which is solved by numerical method with by help of method of mechanical quadratures. The stress intensity factors and components of stress tensor are investigated on the circle where the cracks are located.

Key words: isotropic plate, crack, smooth contact, complex potentials, stress intensity factors.

Стаття надійшла до редколегії 12.05.2005
Прийнята до друку 22.11.2006