

УДК 539.3

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТЕРМОМЕХАНІКИ, ЯКІ ОПИСУЮТЬ МЕХАНІЧНУ ПОВЕДІНКУ ТІЛ ЗА ОХОЛОДЖЕННЯ В ПРОЦЕСІ ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО ВІДПАЛЮВАННЯ

Олександр ГАЧКЕВИЧ¹, Віра МИХАЙЛИШИН²

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 36, 79053 Львів, Україна

²Політехніка Опольська,
вул. Станіслава Миколайчука, 5, 45-271 Ополь, Польща

Сформульовано задачі термомеханіки для тіл при високотемпературному відпалюванні на стадії охолодження. Запропоновано наближену методику розв'язування задачі про температурні напруження на основі методу скінченних елементів для апроксимованої по кроках ітераційно уточнюваної лінеаризованої задачі. Вивчено вплив зміцнюваності матеріалу в рамках модельних наближень ідеального, ізотропно зміцнюваного та матеріалу з ізотропно-кінематичним зміцненням на поточні та залишкові напруження в пластинці при охолодженні.

Ключові слова: термомеханіка, високотемпературне відпалювання, залишкові напруження.

Температурна обробка відпалюванням є одним із способів зняття чи пониження залишкових напружень у виробках. Вона полягає в нагріванні виробу від початкової температури до підвищеної при забезпеченні в кінці етапу нагрівання відомого її розподілу в зоні наявності залишкових напружень, витримці заданий час при цьому розподілі температури і подальшому охолодженні до природного стану [9]. В кінці етапу витримки (за температури витримки $T_{\text{вирт}} \equiv T^{(0)}$) досягається найнижчий рівень

напружень (розподіл яких позначимо $\{\hat{\sigma}_{\text{вирт}}\} \equiv \{\hat{\sigma}^{(0)}\}$). Розподіли температури $T^{(0)}$ і напружень $\{\hat{\sigma}^{(0)}\}$ є початковими при наступному процесі охолодження.

Залежно від умов теплообміну тіла з зовнішнім середовищем при охолодженні може відбутись пластичне деформування матеріалу, яке може привести до збільшення напружень $\{\hat{\sigma}^{(0)}\}$. Тому для прогнозування термомеханічної поведінки виробів на стадії охолодження потрібна ефективна методика дослідження фізико-механічних процесів при охолодженні тіл з врахуванням початкових локальних розподілів температури (за наявності підвищених температур) і напружень, а також можливості пружно-пластичного деформування.

При побудові згаданої методики тіло вважаємо ізотропним з границею Γ_0 (що обмежує ділянку Ω_0 вихідної конфігурації тіла в декартовій системі

координат (x_1, x_2, x_3)). Процес деформування приймаємо квазістатичним. Тоді відповідну математичну модель наявних фізико-механічних процесів формуємо за два етапи.

На першому етапі задача теплопровідності для термочутливих тіл описує тепловий режим охолодження від підвищеної температури $T^{(0)}$ до температури середовища T_C при конвективному теплообміні з зовнішнім середовищем (за коефіцієнта тепловіддачі β). Вона охоплює відоме рівняння теплопровідності для температури $T(x, t)$ за відповідних початкової та граничних умов [4] (t – час).

На другому етапі формуємо задачу для тіла з початковими напруженнями $\{\hat{\sigma}^{(0)}\}$ про визначення температурних напружень $\{\hat{\sigma}\}$, зумовлених нестационарним температурним полем $T(x, t)$, можливими механічними навантаженнями $\{P_n\}$ на частині поверхні $\Gamma_{0\sigma} \subset \Gamma_0$, масовими силами $\{X\}$, а також заданими переміщеннями $\{u^*\}$ на частині $\Gamma_{0u} \subset \Gamma_0$ ($\Gamma_{0\sigma} \cup \Gamma_{0u} = \Gamma_0$, $\Gamma_{0\sigma} \cap \Gamma_{0u} = \emptyset$). В тілі можуть виникати великі переміщення, пластичне течіння матеріалу при його зміцненні за рахунок підвищення межі текучості σ_T . Приймаємо, що матеріал тіла не зазнає фазових перетворень за підвищених температур охолодження після витримки. Задача другого етапу охоплює рівняння рівноваги, геометричні лінійні співвідношення [5] і рівняння стану [8] теорії пластичного неізотермічного течіння з ізотропно-кінематичним зміцненням при відповідних граничних умовах. Це рівняння стану

$$\begin{aligned} \{d\sigma\} &= [D^{ep}]^{t+dt} (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^T\}) + \\ &+ [dD^{ep}] (\{\varepsilon\}^t - \{\varepsilon^p\}^t - \{\varepsilon^T\}^t) + \{Q\}^{t+dt} dT \end{aligned} \quad (1)$$

описує поведінку анізотропно зміцнюваних термочутливих матеріалів. Тут

$$\begin{aligned} [D^{ep}]^{t+dt} &= [D]^{t+dt} - (l^t)^2 (M^t)^{-1} [D]^{t+dt} \{\bar{s}\}^t \{\bar{s}\}^t [D]^{t+dt}, \\ [dD^{ep}]^{t+dt} &= [dD]^{t+dt} - (l^t)^2 (M^t)^{-1} [D]^{t+dt} \{\bar{s}\}^t \{\bar{s}\}^t [dD]^{t+dt}, \\ \{Q\}^{t+dt} &= l^t (M^t)^{-1} [D]^{t+dt} \{\bar{s}\}^t \frac{\partial \tilde{\sigma}_i^t}{\partial T}, \end{aligned} \quad (2)$$

де $[D]^{t+dt}$ і $[dD]$ – відповідно матриця ізотермічних пружних модулів та її приріст у зв'язку зі зміною температури; $\tilde{\sigma}_i^t$ – інтенсивність напружень Коші; $\{\bar{s}\}^t$ – вектор у просторі напружень, приведених до центру поверхні

текучості $\{\gamma\}^t$ девіаторних компонент вектора напружень $\{\sigma\}^t = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}^t$ (символ “ $'$ ” означає операцію транспонування)

$$\{\bar{s}\}^t = \{\bar{\sigma}\}^t - \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}' \bar{\sigma}_0^t,$$

$$\{\bar{\sigma}\}^t = \{\sigma\}^t - \{\gamma\}^t,$$

$$\bar{\sigma}_0^t = \frac{1}{3} \{1, 1, 1, 0, 0, 0\} (\{\sigma\}^t - \{\gamma\}^t).$$

У формулах (2) введено позначення $l^t = \frac{3}{2} \frac{\bar{\sigma}_0^t}{\bar{\sigma}_i^t}$ ($\bar{\sigma}_i^t$ – інтенсивність приведених до $\{\gamma\}^t$ напружень), $M^t = H^t + 3 G^{t+dt}$ (H^t – поточне значення тангенса кута нахилу ізотермічної кривої “інтенсивність напружень – інтенсивність деформацій”, G^{t+dt} – модуль пружності при зсуві). В зв'язку з Лагранжевим підходом до формулювання задачі компонентами векторів повної $\{\varepsilon\}^t = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}\}^t$, пластичної $\{\varepsilon^p\}$ і температурної $\{\varepsilon^T\}$ деформацій є компоненти відповідних тензорів деформацій Гріна; компонентами вектора напружень $\{\sigma\}^t$ є компоненти тензора напружень Піоли-Кірхгофа другого роду. Верхні індекси t і $t + dt$ відповідають значенням величин для моментів деформування t і $t + dt$ відповідно.

З використанням модифікованої на випадок ізотропно-кінематичного зміцнення умови текучості Мізеса [8] запропоновано еквівалентний їй аналог

$$\sqrt{\frac{3}{2} \{\bar{s}\}^t' \{\bar{s}\}^t} = \sigma_T + \beta^* b (\varepsilon_i^{pt})^m \quad (0 \leq \beta^* \leq 1). \quad (3)$$

При $\beta^* = 0$ розміром поверхні текучості є σ_T і при $\{\gamma\}^t = 0$ для всіх $t \geq 0$ умова (3) описує ідеальні, а для $\{\gamma\}^t \neq 0$ ($t > 0$) – кінематично зміцнювані матеріали. При $0 < \beta^* \leq 1$ – ізотропно-кінематичне зміцнення при $\{\gamma\}^t \neq 0$ для $t > 0$, ізотропне зміцнення – при $\{\gamma\}^t = 0$ для всіх $t \geq 0$. За допомогою параметрів матеріалу β^* , b , m можна досягнути доброї узгодженості експериментальної й описуваної формулою (3) кривої деформування “інтенсивність напружень – інтенсивність деформацій”. Зміцнення центру поверхні опишемо правилом Ціглера [12]

$$\{d\gamma\} = d\mu (\{\sigma\}^t - \{\gamma\}^t)$$

з множником [3]

$$d\mu = \frac{3\{\bar{s}\}^t \{d\sigma\} - 2\bar{\sigma}_i^t \beta^* b m (\varepsilon_i^{pt})^{m-1} d\varepsilon_i^p}{3\{\bar{s}\}^t (\{\sigma\}^t - \{\gamma\}^t)}$$

Запропонуємо наближену методику розв'язування цих задач. Вона опирається на еквівалентні варіаційні формулювання із застосуванням методу скінченних елементів (МСЕ) [6]. Ця методика для розв'язування задачі I етапу (задачі теплопровідності) описана в [1]. Для задачі II етапу вихідним (еквівалентним до сформульованої задачі про температурні напруження) є принцип віртуальної роботи [7]

$$\iiint_{\Omega_0} \{\delta\varepsilon\}' \{\sigma\} d\Omega - \iint_{\Gamma_{\sigma\sigma}} \{\delta u\}' \{P_n\} d\Gamma - \iiint_{\Omega_0} \{\delta u\}' \{X\} d\Omega = 0, \quad (4)$$

визначений на множині кінематично допустимих переміщень із простору Соболева $W_2^1(\Omega_0)$ і отриманий з варіаційного рівняння [2] в припущенні самозрівноваженості початкових перед охолодженням напружень $\{\sigma^{(0)}\}$.

Покрокова апроксимація. В зв'язку з неінтегрованістю фізичного рівняння (1) вихідна математична задача з визначення напружень зведена до послідовності апроксимованих за відомим методом "кроків" для проміжку деформування $[t_N, t_{N+1}]$ ($N = 0, 1, 2, \dots, N^* - 1$). Математичний вираз принципу віртуальної роботи (4) (масовими силами $\{X\}$ нехтуємо) для дискретного кроку $(\Delta t)_N$ при його адаптації до розглядуваної фізичної моделі анізотропно зміцнюваних термочутливих матеріалів з рівнянням стану (1) набуває вигляду [3]

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega_0} \{\delta\Delta u\}'_N [B]' [D^{ep}]_{N+1} [B] \{\Delta u\}_N d\Omega = \\ & = \iint_{\Gamma_{\sigma\sigma}} \{\delta\Delta u\}'_N \{\Delta P_n\}_N d\Gamma + \iiint_{\Omega_0} \{\delta\Delta u\}'_N [B]' [D^{ep}]_{N+1} \{\Delta\varepsilon^T\}_N d\Omega - \\ & - \iiint_{\Omega_0} \{\delta\Delta u\}'_N [B]' [\Delta D^{ep}]_N (\{\varepsilon\}_N - \{\varepsilon^p\}_N - \{\varepsilon^T\}_N) d\Omega - \\ & - \iiint_{\Omega_0} \{\delta\Delta u\}'_N [B]' \{Q\}_{N+1} (\Delta T)_N d\Omega + \varphi_{N+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Індексом N позначено прирости величин протягом кроку навантаження $[t_N, t_{N+1}]$ або значення величин у момент часу t_N , $[B]$ – матриця диференціальних операторів геометричних співвідношень. Отримана

послідовність покроково апроксимованих задач (5) ($N = 0, 1, 2, \dots, N^* - 1$), також нелінійних на підставі нелінійності рівняння стану (1).

Лінеаризація. Відповідно до формалізму методу змінних параметрів пружності (МЗПП) [11] для лінеаризованого фізичного рівняння

$$\begin{aligned} \{\Delta\sigma\}_N^j &= [D^{ep}]_{N+1}^{j-1} (\{\Delta\varepsilon\}_N^j - \{\Delta\varepsilon^T\}_N) + \\ &+ [\Delta D^{ep}]_{N+1}^{j-1} (\{\varepsilon\}_{N+1}^{j-1} - \{\varepsilon^p\}_{N+1}^{j-1} - \{\varepsilon^T\}_N) + \{Q\}_{N+1}^{j-1} (\Delta T)_N \end{aligned} \quad (6)$$

ітераційний процес побудований шляхом уточнення змінних значень для матриць $[D^{ep}]_{N+1}$, $[\Delta D^{ep}]_N$ і вектора $\{Q\}_{N+1}$ на кожній j -й ітерації, враховуючи досягнутий рівень напружень на $(j-1)$ -й ітерації при відповідних початкових наближеннях, відомих у кінці попереднього кроку $[t_{N-1}, t_N]$. У [7] наведено формули для початкових наближень величин, які входять у рівняння стану, а також формули для ітераційного уточнення значень $[D^{ep}]_{N+1}^{j-1}$, $[\Delta D^{ep}]_{N+1}^{j-1}$ і $\{Q\}_{N+1}^{j-1}$.

При лінеаризації за методом додаткових навантажень (МДН) [11] вихідна задача опирається на співвідношення

$$\begin{aligned} \{\Delta\sigma\}_N^j &= [D]_{N+1} (\{\Delta\varepsilon\}_N^j - \{\Delta\varepsilon^T\}_N) + \\ &+ [\Delta D]_N (\{\varepsilon\}_N - \{\varepsilon^p\}_N - \{\varepsilon^T\}_N) - [D^p]_{N+1}^{j-1} (\{\Delta\varepsilon\}_N^j - \{\Delta\varepsilon^T\}_N) - \\ &- [\Delta D^p]_{N+1}^{j-1} (\{\varepsilon\}_N - \{\varepsilon^p\}_N - \{\varepsilon^T\}_N) + \{Q\}_{N+1}^{j-1} (\Delta T)_N, \end{aligned} \quad (7)$$

що є лінеаризованим варіантом рівняння (1) і впливає із можливості подання тензорів $[D^{ep}]$ і $[dD^{ep}]$ у вигляді різниці лінійних членів $[D]$ і $[dD]$ та нелінійних членів $[D^p]$ і $[dD^p]$ відповідно. Значенням "додаткових напружень", спричинених "додатковими навантаженнями", формально відповідають значення останніх трьох членів у формулі (7). Для сформованої послідовності лінійних задач в ітераційному процесі уточнення "додаткових напружень" відбувається з початковими наближеннями, відомими з кінця кроку $[t_{N-1}, t_N]$ при ітераційному уточненні $[D^p]_{N+1}^{j-1}$, $[\Delta D^p]_{N+1}^{j-1}$ і $\{Q\}_{N+1}^{j-1}$ [7].

На підставі лінеаризованих за МЗПП та МДН варіантів розв'язувальних рівнянь (6) і (7) при варіаційному формулюванні апроксимованих по кроках вихідних задач отримані відповідні лінеаризовані рівняння методу скінченних елементів.

У розробленому з використанням запропонованої методики програмному забезпеченні реалізуються алгоритми МСЕ для кожного покроково апроксимованого ітераційно уточнюваного наближення вихідної фізично нелінійної задачі.

Як приклад розглянемо процес деформування достатньо довгої пластинки (з розмірами поперечного перерізу $h \cdot a$) при її охолодженні за рахунок конвективного теплообміну через вільні поверхні від температури $T_{\text{внтр}} = T^* = \text{const}$ до температури середовища T_C . Напружений стан проаналізуємо в центральному поперечному перерізі, в якому є найвищі градієнти температур. При симетрії теплових факторів стосовно центрального поздовжнього перерізу термомеханічні поля досліджують в ділянці $\Omega_0 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : -\frac{h}{2} \leq x_1 \leq \frac{h}{2}, 0 \leq x_2 \leq \frac{a}{2}, x_3 = 0 \right\}$.

Задача теплопровідності в ділянці Ω_0 охоплює залежне від координат x_1, x_2 рівняння теплопровідності [4] з початковою умовою $T|_{t=0} = T^*$ і граничними умовами теплообміну за Ньютоном через поверхні $x_1 = \pm \frac{h}{2}$ і $x_2 = \frac{a}{2}$. Задача визначення температурних напружень при охолодженні розв'язана при відсутності зовнішніх механічних навантажень.

У початковий момент часу $t = 0$ пластинка має розміри поперечного перерізу $h = 1$ мм, $a = 5$ мм. Розрахунки температурного поля і термонапружень у пластинці зі сталі 0X13 зроблено при $T_0 = T_{\text{внтр}} = 1000^\circ\text{C}$, $T_N = 20^\circ\text{C}$ та залежних від температури коефіцієнті теплопровідності λ_T , модулі Юнга E , коефіцієнті Пуассона ν [10]. Межа текучості σ_T лінійно спадає від 96 МПа при 20°C [8] до 1 МПа при 1000°C . Питома об'ємна теплосмість $C = 3\,592,44$ кДж/(м³·К) [10], коефіцієнт лінійного температурного видовження $\alpha_T = 11,0 \cdot 10^{-6}$ 1/К⁻¹, коефіцієнт тепловіддачі $\beta = 200$ кВт/(м²·град).

Розрахунки зроблено за допомогою МЗПП при точності обчислень $\delta_0 = 0,1 \cdot 10^{-4}$. Ділянка Ω_0 розбита за допомогою 103 вузлів на 20 8-вузлових елементів серендипової сім'ї [С.] (рис. 1). Напружений стан до кінцевого моменту остигання проаналізовано протягом 198 кроків. Із розрахунків випливає, що при теплообміні з коефіцієнтом $\beta = 200$ кВт/(м²·град.) температура досягла значення 20°C за час $t^* \approx 0,2$ с. Таке швидке охолодження можливе за рахунок спеціальних способів відбору тепла.

Досліджено поточний і залишковий напружено-деформовані стани для ідеального матеріалу ($\beta^* = 0$, $\{\gamma\}^t = 0$ у функції текучості (3)), ізотропно зміцнюваного ($\beta^* = 0,515$, $b = 2208$ МПа, $m = 0,435$ [8] і $\{\gamma\}^t = 0$ у

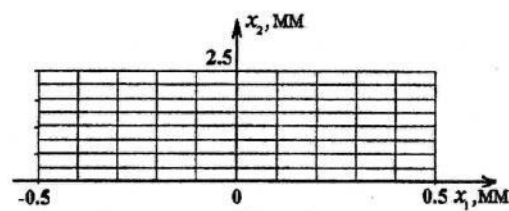


Рис. 1

співвідношенні (3)) та матеріалу з ізотропно-кінематичним зміцненням ($\beta^* = 0,515$, $b = 2208$ МПа, $m = 0,435$ і $\{\gamma\}^t \neq 0$ для $t > 0$ у формулі (3)).

Рис. 2 ілюструє еволюцію напружень $\sigma_{22} \approx \sigma_{33}$ та інтенсивності напружень σ_i по товщині пластинки вздовж координати x_1 при $x_2 = 0$ для двох моментів часу остигання. На цьому ж рисунку на лівих графіках показано розподіл температури для вибраних часових моментів. Видно, що неврахування зміцнення матеріалів приводить до суттєвого зниження рівня залишкових напружень, зумовлених охолодженням після витримки в процесі високотемпературного відпалювання.

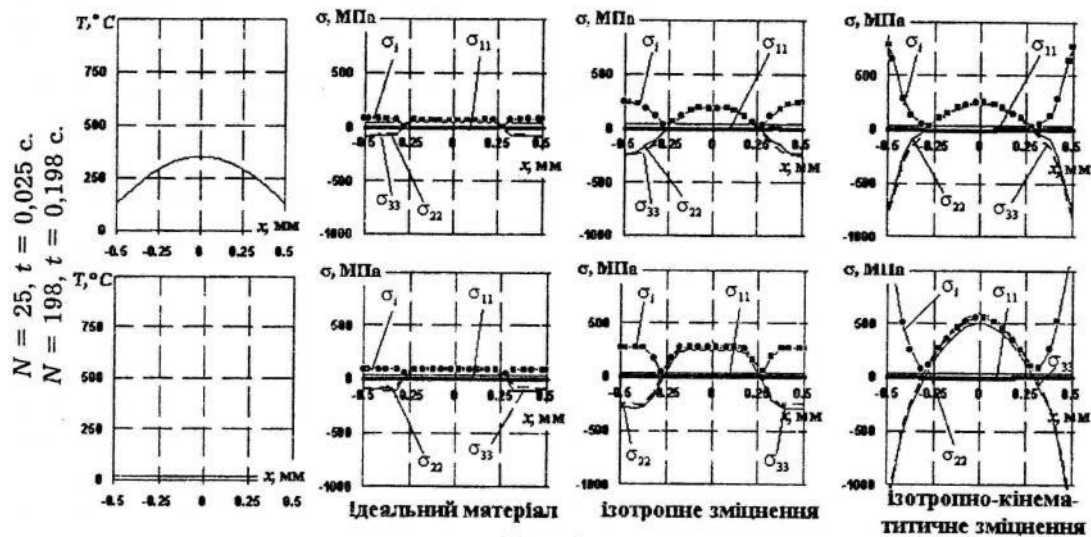


Рис. 2

1. Будз С.Ф., Дробенко Б.Д., Михайлишин В.С. Компьютерное моделирование термоупругопластического поведения механических систем. препринт № 34 – 84. – Львов, 1992.
2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. Пер. с англ. – М., 1987.
3. Гачкевич О.Р., Михайлишин В.С. Математичне моделювання і дослідження напруженого стану тіл у процесі охолодження при високотемпературному відпалі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47. – № 3. – С.186–198.
4. Коваленко А.Д. Термоупругость. – К., 1975.
5. Колтунов М.А., Кравчук А.С., Майборода В.П. Прикладная механика деформируемого твердого тела. – М., 1983.

6. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общ. ред. Сахарова А.С. и Альтенбаха И. – К., 1982.
7. Михайлишин В.С. Ітераційні процедури для задач неізотермічної пружнопластичності з ізотропно-кінематичним зміцненням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – Т. 35. – № 4. – С. 102–112.
8. Морозов Е.М., Никишков Г.П., Черныш Т.А. Неизотермическая модель упругопластического тела с комбинированным законом упрочнения и ее применение для МКЭ-расчета тел с трещинами // Аналитические и численные методы решения краевых задач пластичности и вязкоупругости. – Свердловск. Уральск. научн. центр, АН СРСР. – 1986. – С. 87–94.
9. Напряжения и деформации при сварке / Б.С. Касаткин, В.М. Прохоренко, И.М. Чертов. – К., 1987.
10. Теплотехнический справочник / Под ред. Юренева В.Н., Лебедева П.Д. В 2-х т. – М., 1976. – Т. 2.
11. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: Справ. пособие // Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. – К., 1981.
12. Ziegler H. A modification of Prager's hardening rule // Quart. Appl. Math. – 1959. – Vol. 17. – P. 55–65.

METHODOLOGY OF SOLVING OF THERMOMECHANICAL PROBLEMS DESCRIBING MECHANICAL BEHAVIOR OF SOLIDS ON THE COOLING UNDER HIGHTEMPERATURE ANNEALING

Olexandr Hachkevych¹, Vira Mykhailyshyn²

¹*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3b, 79053 Lviv, Ukraine*

²*Technical University of Opole,
Stanislawa Mikolajchuka Str., 5, 45-271 Opole, Poland*

Thermomechanical problem for solids under hightemperature annealing on the cooling stage is set. Approximate approach to solving the problem about temperature stresses on the base of finite element method for step-approximated iterative adjustable linearized problem is proposed. The influence of material hardening in model assumptions of ideal, isotropic hardenable material and material with isotropic-kinematic hardening on the current and residual stresses in plate under cooling is studied.

Key words: thermomechanic, hightemperature annealing, residual stresses.

Стаття надійшла до редколегії 17.08.2005
Прийнята до друку 22.11.2006