ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2006. Вип. 65. С.93-105

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Mat. 2006. Vol.65. P.93-105

УДК 539.3

ДИНАМІКА ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ ПРИ НОРМАЛЬНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Віталій ГАЛАЗЮК, Андрій КРУПНИК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Запропоновано метод поліномів Лагерра для розв'язку динамічної задачі про дію поступового нормального навантаження на границі пружного півпростору, за допомогою якого знайдене поле напружень і переміщень точок півпростору.

Ключові слова: пружний півпростір, динамічна задача, поліноми Лагерра, напружено-деформований стан.

Традиційним методом розв'язування початково-крайових задач для рівняння в часткових похідних із незалежними від часу коефіцієнтами є зведення її за допомогою інтегрального перетворення Лапласа [3] за часом до крайової задачі в просторі зображень. Перехід від зображень до оригіналів у випадку складних крайових умов може бути виконаний тільки за допомогою числового обернення інтегрального перетворення Лапласа.

Відомий розв'язок класичної задачі Лемба, одержаний за допомогою схеми Cagniard-de Hoop [4], та інтегральне перетворення Лапласа дає змогу проаналізувати тільки вертикальні переміщення границі півпростору. При аналізі динамічних процесів по глибині півпростору або в плоско-паралельному шарі ця схема не може бути реалізована.

Ми пропонуємо метод поліномів Лагерра для розв'язання динамічної задачі про дію поступового нормального навантаження на границі пружного півпростору. Метод ґрунтується на застосуванні до початково-крайової задачі інтегрального перетворення Лагерра [1], [3] за часом і зведенні її до трикутної послідовності крайових задач, в результаті чого розв'язок вихідної задачі подаємо у вигляді ортогонального ряду за поліномами Лагерра. Метод дає змогу проводити обчислення та дослідження переміщень і напружень різних точок півпростору. Тому дослідження динамічних процесів у тілах тим методом є актуальним.

Розглянемо ізотропний пружний півпростір, віднесений до циліндричної системи координат $(R\alpha, \beta, R\gamma)$, де R – параметр, що має розмірність довжини. Вважатимемо, що під дією зовнішнього навантаження площини $\gamma = 0$ у півпросторі реалізується осесиметричний напружено-деформований стан. Запишемо для ненульових компонент вектора пружного переміщення $Ru_\alpha(\alpha, \gamma, \tau)$ і $Ru_\gamma(\alpha, \gamma, \tau)$ систему диференціальних рівнянь руху пружного тіла стосовно функцій об'ємної деформації $\theta(\alpha,\ \gamma,\ \tau) = div\,\mathbf{u}$ і $\omega_\beta(\alpha,\ \gamma,\ \tau) = \frac{1}{2}(rot\,\mathbf{u})_\beta$

$$\kappa^2 \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + 2\frac{\partial \omega_\beta}{\partial \gamma} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \tau^2}, \qquad (1)$$

$$\kappa^2 \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} - \frac{2}{\alpha}\frac{\partial(\alpha\omega_\beta)}{\partial \alpha} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial \tau^2}, \qquad (2)$$

де в циліндричній системі координат в осесиметричному випадку

$$\theta = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha}(\alpha\ u_\alpha) + \frac{\partial\ u_\gamma}{\partial\ \gamma};\ \omega_\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \gamma} - \frac{\partial u_\gamma}{\partial \alpha}\right), \qquad (3)$$

і $\kappa^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$; c_1, c_2 – швидкості поширення повздовжніх та поперечних хвиль у матеріалі середовища відповідно; ν – коефіцієнт Пуассона; $\tau = \frac{c_1 t}{R}$ – безрозмірний час.

Подіємо оператором $\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha}\alpha$ на рівняння (1), оператором $\frac{\partial}{\partial \gamma}$ на рівняння (2), складемо трансформовані таким способом рівняння, використавши означення (3) функції $\theta(\alpha,\ \gamma,\ \tau)$, отримаємо, що

$$\nabla^2\theta + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \gamma^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2}. \qquad (4)$$

Тут $\nabla^2 = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)$ – оператор Бельтрамі в осесиметричному випадку. Отже, функція $\theta(\alpha,\ \gamma,\ \tau)$ є розв'язком початково-крайової задачі для хвильового рівняння (4). Введемо ключову функцію $\Phi(\alpha,\ \gamma,\ \tau)$ як $2\omega_\beta = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$ і подіємо оператором $\frac{\partial}{\partial \gamma}$ на рівняння (1), а оператором $\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha}$ на рівняння (2) і віднімемо трансформовані рівняння. Тоді, враховуючи означення (3) функції $\omega_\beta(\alpha,\ \gamma,\ \tau)$, отримаємо

$$\nabla^2\Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma^2} = \kappa^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}, \qquad (5)$$

тобто функція $\Phi(\alpha, \gamma, \tau)$ є розв'язком початково-крайової задачі для хвильового рівняння (5).

Введемо ключову функцію $P(\alpha, \gamma, \tau)$ як $u_\alpha(\alpha, \gamma, \tau) = \dfrac{\partial P}{\partial \alpha}$, тоді на підставі означення (3) функції $\theta(\alpha, \gamma, \tau)$ отримаємо таке диференціальне співвідношення:

$$\nabla^2 \mathrm{P} = \theta - \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma}, \tag{6}$$

а на підставі означення (3) функції $\omega_\beta(\alpha, \gamma, \tau)$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial P}{\partial \gamma} - u_\gamma - \Phi\right) = 0, \tag{7}$$

звідки випливає, що

$$u_\gamma = \frac{\partial P}{\partial \gamma} - \Phi. \tag{8}$$

Якщо вираз (8) підставити у співвідношення (6), то для визначення функції $P(\alpha, \gamma, \tau)$ отримаємо рівняння Пуассона

$$\nabla^2 \mathrm{P} + \frac{\partial^2 P}{\partial \gamma^2} = \theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma},$$

яке після подвійного диференціювання за часом набуде вигляду

$$\left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2}\right)\frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} + \frac{\acute{\iota}}{\partial \gamma}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}\right). \tag{9}$$

Якщо в праву частину диференціального співвідношення (8) підставити рівняння (4) і (5), то отримаємо простий зв'язок між функцією $P(\alpha, \gamma, \tau)$ та ключовими функціями $\theta(\alpha, \gamma, \tau)$ і $\Phi(\alpha, \gamma, \tau)$

$$\left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2}\right)\left[\frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} - \left(\theta + \kappa^{-2}\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}\right)\right] = 0,$$

причому для виконання цієї рівності достатньо, щоб

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} - \left(\theta + \kappa^{-2}\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}\right) = 0. \tag{10}$$

Отож, якщо ключові функції $\theta(\alpha,\gamma,\tau)$ і $\Phi(\alpha,\gamma,\tau)$ визначені розв'язками відповідних початково-крайових задач, то обезрозмірені компоненти вектора пружного переміщення $u_\gamma(\alpha,\gamma,\tau)$ і $u_\alpha(\alpha,\gamma,\tau)$, а також єдину відмінну від нуля компоненту вектора обертання $\boldsymbol{\Omega}=\frac{1}{2}rot\,\mathbf{u}$ знаходимо за формулою (8) та за формулами

$$u_\alpha(\alpha,\gamma,\tau)=\frac{\partial P}{\partial\alpha},\ \omega_\beta(\alpha,\gamma,\tau)=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}. \tag{11}$$

Позаяк крайові умови динамічної задачі теорії пружності можуть формулюватися в напруженнях, то необхідно подати компоненти тензора напружень через ключові функції $\theta(\alpha,\gamma,\tau)$ і $\Phi(\alpha,\gamma,\tau)$. Оскільки відповідно до закону Гука

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma,\tau)=\mu\left[\left(\kappa^2-2\right)\,\theta+2\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}\right],\ \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma,\tau)=\mu\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial\gamma}+\frac{\partial u_\gamma}{\partial\alpha}\right), \tag{12}$$

де μ – стала Ламе, то, враховуючи співвідношення (8), матимемо рівність

$$\sigma_{\gamma\gamma}=\mu\left[\left(\kappa^2-2\right)\,\theta+2\,\left(\frac{\partial^2 P}{\partial\gamma^2}-\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right)\right],$$

яку двічі продиференціюємо за часом

$$\frac{\partial^2\sigma_{\gamma\gamma}}{\partial\tau^2}=\mu\left[\left(\kappa^2-2\right)\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial\gamma^2}-\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right)\right]$$

і використаємо рівняння (4), (5) та (10)

$$\frac{\partial^2\sigma_{\gamma\gamma}}{\partial\tau^2}=\mu\left[\left(\kappa^2-2\right)\,\left(\nabla^2\theta+\frac{\partial^2\theta}{\partial\gamma^2}\right)+2\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\left(\theta+\kappa^{-2}\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}\right)-\right.$$

$$\left.-2\kappa^{-2}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\nabla^2\Phi+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma^2}\right)\right]=\mu\left[\left(\kappa^2-2\right)\,\nabla^2\theta+\kappa^2\frac{\partial^2\theta}{\partial\gamma^2}+-2\kappa^{-2}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\nabla^2\Phi\right)\right]. \tag{13}$$

Підставимо означення (11) функції $P(\alpha,\gamma,\tau)$ та рівність (8) у друге співвідношення (12), після чого матимемо

$$\sigma_{\alpha\gamma}=\mu\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(2\frac{\partial P}{\partial\gamma}-\Phi\right). \tag{14}$$

Отже, формули (13) і (14) виражають компоненти тензора напружень через ключові функції $\theta(\alpha,\gamma,\tau)$, $\Phi(\alpha,\gamma,\tau)$ і $P(\alpha,\gamma,\tau)$.

Нехай на границі $\gamma = 0$ пружного півпростору в початковий момент часу починає діяти нормальне навантаження (рис. 1), тоді для визначення ключових функцій $\theta(\alpha, \gamma, \tau)$ і $\Phi(\alpha, \gamma, \tau)$, які є розв'язками хвильових рівнянь (4) і (5), можна сформулювати таку початково-крайову задачу:

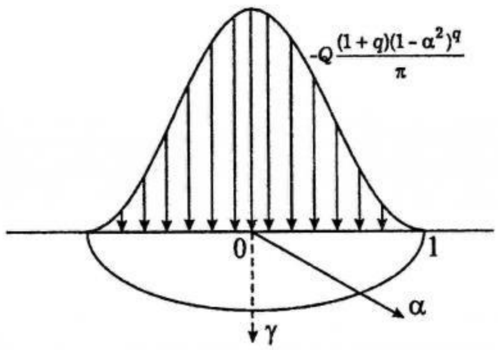

Рис. 1

$$u_\alpha(\alpha, \gamma, 0) = \frac{\partial u_\alpha(\alpha, \gamma, 0)}{\partial \tau} = 0, \ u_\gamma(\alpha, \gamma, 0) = \frac{\partial u_\gamma(\alpha, \gamma, 0)}{\partial \tau} = 0, \tag{15}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, 0, \tau) = -Q\frac{(1+q)(1-\alpha^2)^q}{\pi} S_+(1-\alpha)(1-\exp(-a\tau))^2, \ q > 1, a > 0,$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, 0, \tau) = 0, \tag{16}$$

$$\lim_{(\alpha,\gamma)\to\infty} u_\alpha(\alpha, \gamma, \tau) = 0, \ \lim_{(\alpha,\gamma)\to\infty} u_\gamma(\alpha, \gamma, \tau) = 0, \tag{17}$$

де $S_+(\tau) = \begin{cases} 1, \ \tau \ge 0 \\ 0, \ \tau < 0 \end{cases}$ – асиметрична функція Гевісайда.

Якщо інтеграл

$$f_n(\alpha, \gamma) = \int_0^\infty f(\alpha, \gamma, \tau)\exp(-\lambda\tau) L_n(\lambda\tau) d\tau \tag{18}$$

є інтегральним перетворенням Лагерра [1, 3] функції $f(\alpha, \gamma, \tau)$ з додатним параметром λ, то формулою його обернення слугує ортогональний ряд

$$f(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\alpha, \gamma) L_n(\lambda\tau), \tag{–}$$

де $L_n(\lambda\tau)$ – поліноми Лагерра, які утворюють повну й ортогональну систему функцій на проміжку $[0, \infty)$. Якщо ввести

$$\overline{\theta}_n(\xi,\ \gamma)=\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\alpha\theta(\alpha,\gamma,\tau)\ J_0(\xi\alpha)\,d\alpha\right]\exp(-\lambda\tau)L_n(\lambda\tau)\,d\tau\,, \tag{20}$$

$$\overline{\Phi}_n(\xi,\ \gamma)=\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\alpha\Phi(\alpha,\gamma,\tau)\ J_0(\xi\alpha)\,d\alpha\right]\exp(-\lambda\tau)L_n(\lambda\tau)\,d\tau \tag{21}$$

зображення шуканих ключових функцій $\theta(\alpha,\ \gamma,\ \tau)$ і $\Phi(\alpha,\ \gamma,\ \tau)$ за Ганкелем і Лагерром, де $J_0(\xi\alpha)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку, то для визначення функцій $\overline{\theta}_n(\xi,\ \gamma)$ і $\overline{\Phi}_n(\xi,\ \gamma)$ на підставі рівнянь (4) і (5) можна записати такі послідовності [1] звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d^2\overline{\theta}_n}{d\gamma^2}-\xi^2\overline{\theta}_n=\lambda^2\sum_{m=0}^{n}(n-m+1)\ \overline{\theta}_m\ \ , \tag{22}$$

$$\frac{d^2\overline{\Phi}_n}{d\gamma^2}-\xi^2\overline{\Phi}_n=\kappa^2\lambda^2\sum_{m=0}^{n}(n-m+1)\overline{\Phi}_m\ \ , \tag{23}$$

загальними розв'язками яких є алгебричні згортки [1]

$$\overline{\theta}_n(\xi,\ \gamma)=\sum_{j=0}^{n}\left[A_{n-j}(\xi)\ G_j(1,\ \xi,\ \gamma)+B_{n-j}(\xi)W_j(1,\ \xi,\ \gamma)\right], \tag{24}$$

$$\overline{\Phi}_n(\xi,\ \gamma)=\sum_{j=0}^{n}\left[C_{n-j}(\xi)\ G_j(\kappa,\ \xi,\ \gamma)+D_{n-j}(\xi)W_j(\kappa,\ \xi,\ \gamma)\right], \tag{25}$$

де функції $G_j(1,\ \xi,\ \gamma)$, $\mathrm{W}_j(1,\ \xi,\ \gamma)$ і $G_j(\kappa,\ \xi,\ \gamma)$, $W_j(\kappa,\ \xi,\ \gamma)$ – фундаментальні системи розв'язків відповідно до рівнянь (22) і (23), для яких відомі [2] такі подання:

$$G_j(x,\ \xi,\ \gamma)=\sum_{k=0}^{j}a_{j,k}(x,\ \xi)\ \left(\sqrt{\xi^2+\lambda^2x^2}\gamma\right)^k\exp\left(-\sqrt{\xi^2+\lambda^2x^2}\gamma\right), \tag{26}$$

$$W_j(x,\ \xi,\ \gamma)=\sum_{k=0}^{j}\mathrm{a}_{j,k}(x,\ \xi)\ \left(\sqrt{\xi^2+\lambda^2x^2}\gamma\right)^k\exp\left(+\sqrt{\xi^2+\lambda^2x^2}\gamma\right), \tag{27}$$

$x\in\{1;\kappa\}$, $a_{j,k}(x,\xi)$ – коефіцієнти, які обчислюють за рекурентною формулою

$$a_{j,k+1} = \frac{k+2}{2} a_{j,k+2} - \\ -\frac{\lambda^2 x^2}{2\left(\xi^2+\lambda^2 x^2\right)\left(k+1\right)} \sum_{l=k}^{j-1} \left(j-l+1\right) a_{l,k}, \left(j=\overline{1,n},\ k=\overline{0,j-1}\right), \tag{28}$$

причому $a_{p,0}$ – довільні і визначаються умовами нормування функцій $G_j(x,\ \xi,\ \gamma)$ і $W_j(x,\ \xi,\ \gamma)$.

Відповідно до умов на безмежності (17) у поданнях (24) та (25) всі константи $B_{n-j}(\xi)=0$ і $D_{n-j}(\xi)=0$, а для визначення констант $A_{n-j}(\xi)$ і $C_{n-j}(\xi)$ запишемо співвідношення (10), (13), (14) і крайові умови (16) в просторі зображень

$$\overline{P}_n = \lambda^{-2}\left(\overline{f}_n - 2\overline{f}_{n-1} + \overline{f}_{n-2}\right),\quad \overline{f}_n = \overline{\theta}_n + \kappa^{-2}\frac{d\overline{\Phi}_n}{d\gamma}, \tag{29}$$

$$\frac{\lambda^2}{\mu}\sum_{m=0}^{n}\left(n-m+1\right)\overline{\sigma}_{\gamma\gamma,m} = \kappa^2\frac{d^2\overline{\theta}_n}{d\gamma^2} - \left(\kappa^2-2\right)\xi^2\overline{\theta}_n + 2\kappa^{-2}\xi^2\frac{d\overline{\Phi}_n}{d\gamma}, \tag{30}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma,n} = \mu\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(2\frac{\partial P_n}{\partial\gamma} - \Phi_n\right), \tag{31}$$

$$\overline{\sigma}_{\gamma\gamma,n} = -\frac{2^q Q\Gamma(q+2)J_{q+1}(\xi)}{\pi\xi^{q+1}}\left[\frac{1}{\lambda}\delta_{n,0} - \frac{2a^n}{(\lambda+a)^{n+1}} + \frac{(2a)^n}{(\lambda+2a)^{n+1}}\right], \text{ при } \gamma=0,$$
$$\overline{\sigma}_{\alpha\gamma,n} = 0, \text{ при } \gamma = 0, \tag{32}$$

де $\delta_{n,0}$ – функція Кронекера, зокрема з формули (31) й умови (32) випливає, що

$$\overline{\Phi}_n = 2\frac{d\overline{P}_n}{d\gamma} \text{ при } \gamma=0, \tag{33}$$

а, отже,

$$\overline{\Phi}_n = \frac{2}{\lambda^2}\frac{d}{d\gamma}\left(\overline{f}_n - 2\overline{f}_{n-1} + \overline{f}_{n-2}\right),\quad \overline{f}_n = \overline{\theta}_n + \kappa^{-2}\frac{d\overline{\Phi}_n}{d\gamma} \text{ при } \gamma=0. \tag{34}$$

Підставимо у співвідношення (30) і (34) подання зображень ключових функцій $\overline{\theta}_n(\xi,\ \gamma)$ і $\overline{\Phi}_n(\xi,\ \gamma)$ (24) і (25) при $\gamma=0$, після чого отримаємо систему рівнянь стосовно невідомих констант $A_n(\xi)$ і $C_n(\xi)$, $n = 0,\ 1,\ 2...$

$$\begin{cases} -\left(2\xi^2+\kappa^2\lambda^2\right)A_n+2\kappa^{-2}\xi^2\sqrt{\xi^2+\kappa^2\lambda^2}\,C_n=F_n^{(1)}, \\ 2\sqrt{\xi^2+\lambda^2}\,A_n-\kappa^{-2}\left(2\xi^2+\kappa^2\lambda^2\right)C_n=F_n^{(2)}, \end{cases} \tag{35}$$

де

$$F_n^{(1)}(\xi)=-\frac{\lambda^2}{\mu}\sum_{m=0}^{n}(n-m+1)\,\overline{\sigma}_{\gamma\gamma,m}+$$

$$+\kappa^2\sum_{j=1}^{n}A_{n-j}G_j^{\cdot\cdot}(1,\ \xi,\ 0)+2\kappa^{-2}\xi^2\sum_{j=1}^{n}C_{n-j}G_j^{\cdot}(\kappa,\ \xi,\ 0),$$

$$F_n^{(2)}(\xi)=2\psi_n(\xi)-4\varphi_{n-1}(\xi)+2\varphi_{n-2}(\xi),$$

$$\psi_n(\xi)=\sum_{j=1}^{n}\left[A_{n-j}G_j^{\cdot}(1,\ \xi,\ 0)+\kappa^{-2}C_{n-j}G_j^{\cdot\cdot}(\kappa,\ \xi,\ 0)\right],$$

$$\varphi_n(\xi)=\sum_{j=0}^{n}\left[A_{n-j}G_j^{\cdot}(1,\ \xi,\ 0)+\kappa^{-2}C_{n-j}G_j^{\cdot\cdot}(\kappa,\ \xi,\ 0)\right],$$

$$G_j^{\cdot}(x,\xi,0)\equiv\left.\frac{dG_j(x,\xi,\gamma)}{d\gamma}\right|_{\gamma=0};\ G_j^{\cdot\cdot}(x,\xi,0)\equiv\left.\frac{d^2G_j(x,\xi,\gamma)}{d\gamma^2}\right|_{\gamma=0},\quad x\in\{1,\kappa\}.$$

Будемо вимагати, щоб функції $G_j(x,\ \xi,\ \gamma)$ при $\gamma=0$ задовольняли такі умови: $G_0(x,\ \xi,\ 0)=1$, $G_j(x,\ \xi,\ 0)=0$ при $j=1,\ 2,\ 3\ldots$, тоді, враховуючи співвідношення (26), довільні коефіцієнти $a_{p,0}(x,\ \xi)=\delta_{p,0}$ і

$$G_j^{\cdot}(x,\ \xi,\ 0)=\sqrt{\xi^2+\lambda^2x^2}\left(a_{j,1}(x,\ \xi)-a_{j,0}(x,\ \xi)\right),$$

$$G_0^{\cdot\cdot}(x,\ \xi,\ 0)=\xi^2+\lambda^2x^2,\ G_j^{\cdot\cdot}(x,\ \xi,\ 0)=\lambda^2x^2(j+1),\ j=1,\ 2,\ldots$$

Розв'язавши систему рівнянь (35), отримаємо формули для визначення констант $A_n(\xi)$ і $C_n(\xi)$

$$A_n=\frac{\left(2\xi^2+\kappa^2\lambda^2\right)F_n^{(1)}+2\xi^2\sqrt{\xi^2+\kappa^2\lambda^2}\,F_n^{(2)}}{D(\xi)}, \tag{36}$$

$$C_n=\frac{2\kappa^2\sqrt{\xi^2+\lambda^2}\,F_n^{(1)}+\kappa^2\left(2\xi^2+\kappa^2\lambda^2\right)F_n^{(2)}}{D(\xi)}, \tag{37}$$

де

$$D(\xi)=4\xi^2\sqrt{\xi^2+\kappa^2\lambda^2}\sqrt{\xi^2+\lambda^2}-\left(2\xi^2+\kappa^2\lambda^2\right)^2, \tag{38}$$

які дають змогу однозначно знайти зображення ключових функцій $\overline{\theta}_n(\xi,\gamma)$ і $\overline{\Phi}_n(\xi,\gamma)$, а отже, записати компоненти вектора пружного переміщення $u_\alpha(\alpha,\gamma,\tau)$, і $u_\gamma(\alpha,\gamma,\tau)$, а також $\omega_\beta(\alpha,\gamma,\tau)$.

На підставі формул обернення інтегрального перетворення Лагерра (19) і Ганкеля, співвідношення (11), остаточно визначимо поле переміщень у півпросторі та вираз єдиної ненульової компоненти вектора обертання $\Omega(\alpha,\gamma,\tau)$

$$u_\alpha(\alpha,\gamma,\tau)=-\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^\infty \xi^2\overline{P}_n(\xi,\gamma)J_1(\xi\alpha)\,d\xi\right]L_n(\lambda\tau), \tag{39}$$

$$u_\gamma(\alpha,\gamma,\tau)=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^\infty \xi\left[\frac{d\overline{P}_n(\xi,\gamma)}{d\gamma}-\overline{\Phi}_n(\xi,\gamma)\right]J_0(\xi\alpha)\,d\xi\right]L_n(\lambda\tau), \tag{40}$$

$$\omega_\beta(\alpha,\gamma,\tau)=-\frac{\lambda}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^\infty \xi\overline{\Phi}_n(\xi,\gamma)\,J_1(\xi\alpha)\,d\xi\right]L_n(\lambda\tau). \tag{41}$$

Визначимо вирази напружень $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma,\tau)$, $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma,\tau)$. Із закону Гука (12) та співвідношень (6), (39), (40) маємо

$$\frac{\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma,\tau)}{\mu}=\kappa^2\theta(\alpha,\gamma,\tau)-2\nabla^2P(\alpha,\gamma,\tau)=$$

$$=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^\infty \xi\left(\kappa^2\overline{\theta}_n(\xi,\gamma)+2\xi^2\overline{P}_n(\xi,\gamma)\right)J_0(\xi\alpha)d\xi\right]L_n(\lambda\tau), \tag{42}$$

$$\frac{\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma,\tau)}{\mu}=\frac{\partial u_\alpha}{\partial\gamma}+\frac{\partial u_\gamma}{\partial\alpha}=$$

$$=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^\infty \xi\left(\xi\overline{\Phi}_n(\xi,\gamma)-(1+\xi)\frac{d\overline{P}_n(\xi,\gamma)}{d\gamma}\right)J_1(\xi\alpha)d\xi\right]L_n(\lambda\tau). \tag{43}$$

Функції $\overline{\theta}_n(\alpha,\gamma)$, $\overline{\Phi}_n(\alpha,\gamma)$ і $\overline{P}_n(\alpha,\gamma)$ визначають з формул (24), (25) і (29).

Для аналітичного аналізу результатів при $\tau\to 0$ і $\tau\to\infty$ застосуємо граничні співвідношення інтегрального перетворення Лапласа [3], яке отримуємо з перетворення Лагерра при $n=0$

$$u_\gamma(\alpha,\gamma,0)=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda u_{\gamma,0}(\alpha,\gamma)=0\,, \tag{44}$$

$$u_\gamma(\alpha,\gamma,\infty)=\lim_{\lambda\to 0}\lambda u_{\gamma,0}(\alpha,\gamma)=$$
$$=\frac{2^{q-1}Q\Gamma(q+2)}{\pi\mu(\kappa^2-1)}\int_0^\infty\frac{(\kappa^2+\gamma\xi\kappa^2-\gamma\xi)J_{q+1}(\xi)J_0(\xi\alpha)\exp(-\xi\gamma)d\xi}{\xi^{1+q}}\,, \tag{45}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma,0)=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\sigma_{\gamma\gamma,0}(\alpha,\gamma)=0\,, \tag{46}$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma,\infty)=\lim_{\lambda\to 0}\lambda\sigma_{\gamma\gamma,0}(\alpha,\gamma)=$$
$$=-\frac{2^q Q\Gamma(q+2)}{\pi}\int_0^\infty\frac{(1+\xi\gamma)J_{q+1}(\xi)J_0(\xi\alpha)\exp(-\xi\gamma)d\xi}{\xi^q}\,, \tag{47}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma,0)=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\sigma_{\alpha\gamma,0}(\alpha,\gamma)=0\,, \tag{48}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma,\infty)=\lim_{\lambda\to 0}\lambda\sigma_{\alpha\gamma,0}(\alpha,\gamma)=$$
$$=-\frac{2^q Q\Gamma(q+2)}{\pi}\gamma\int_0^\infty\frac{J_{q+1}(\xi)J_0(\xi\alpha)\exp(-\xi\gamma)d\xi}{\xi^{1-q}}\,. \tag{49}$$

Співвідношення (45), (47), (49) повністю збігаються з розв'язками відповідної статичної задачі, що підтверджує істинність формул (40)–(43). Табулюючи функції $\sigma_{\gamma\gamma,\text{стат}}(\alpha,\gamma)\equiv\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma,\infty)$, $\sigma_{\alpha\gamma,\text{стат}}(\alpha,\gamma)\equiv\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma,\infty)$ залежно від $\gamma\in[0;10]$ при значенні параметра $q=2$ і фіксованих α, отримуємо, що абсолютні величини $\sigma_{\gamma\gamma,\text{стат}}(\alpha,\gamma)$ при $\alpha>0{,}7$ є зростаючими

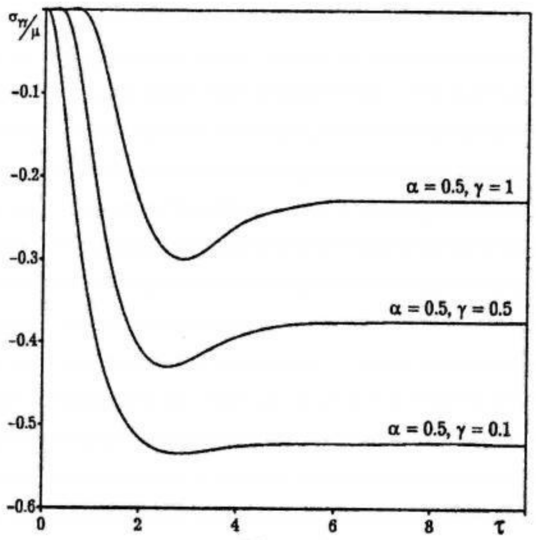

Рис. 2

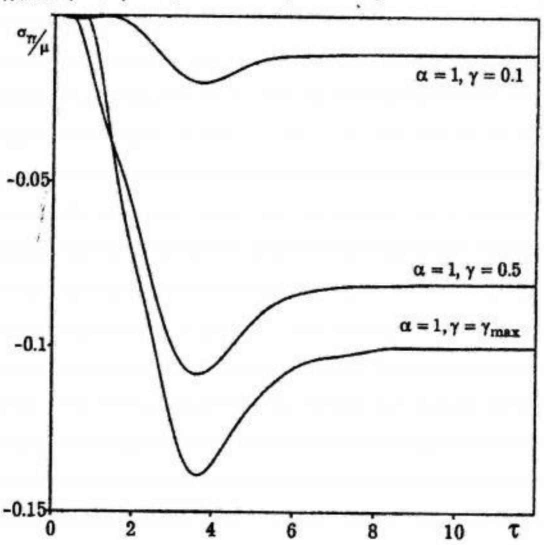

Рис. 3

функціями до деякого $\gamma_{\max}$ (див. табл.), після чого спадають до 0. Абсолютні величини $\sigma_{\alpha\gamma,\text{стат}}(\alpha,\gamma)$ поводять себе аналогічно за будь-яких $\alpha > 0$.

	$\sigma_{\gamma\gamma,\text{стат}}(\alpha,\gamma)$	$\sigma_{\alpha\gamma,\text{стат}}(\alpha,\gamma)$
$\alpha = 0{,}5$	$\gamma_{\max} = 0$	$\gamma_{\max} = 0{,}32$
$\alpha = 1$	$\gamma_{\max} = 0{,}91$	$\gamma_{\max} = 0{,}58$
$\alpha = 2$	$\gamma_{\max} = 2{,}31$	$\gamma_{\max} = 1{,}52$

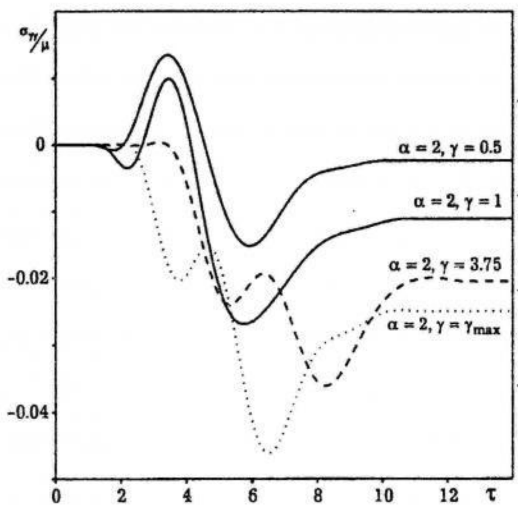

Рис. 4.

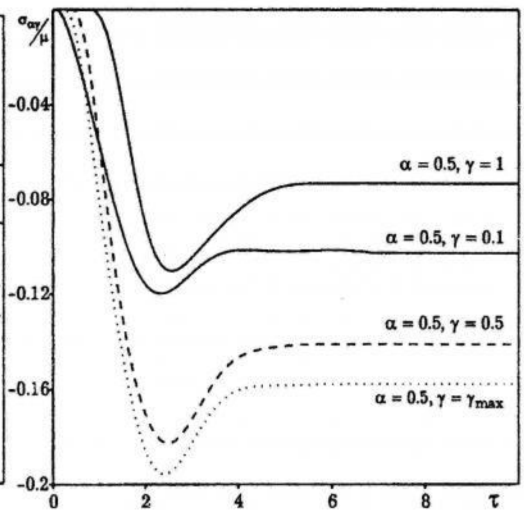

Рис. 5.

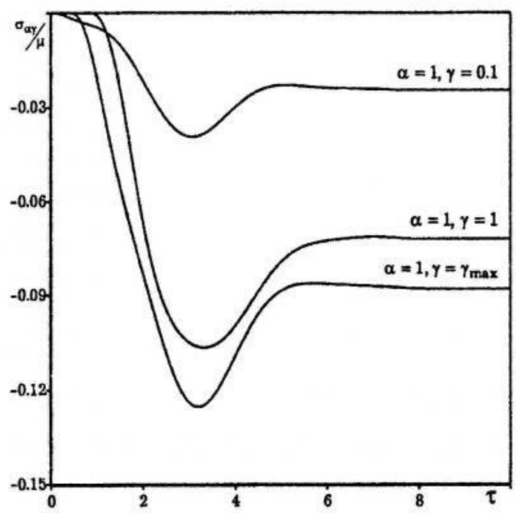

Рис. 6.

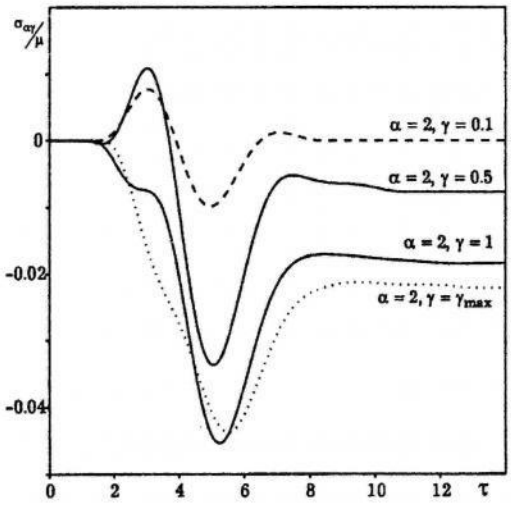

Рис. 7.

Числовий аналіз запропонованої задачі виконали при $\nu = 0,25$ для значень параметрів $q = 2$, $a = 2$ і $Q/\mu = 1$. При фіксованих значеннях α будемо збільшувати γ, рухаючись у глибину півпростору.

Із рис. 2–7 випливає, що при великих часах як і нормальні $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma,\tau)$, так і дотичні $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma,\tau)$ напруження виходять на положення статичної рівноваги, які збігаються з відповідними розв'язками аналогічної статичної задачі. Як видно з рис. 2–7, практично у всіх випадках у деякий момент часу напруження досягають максимального значення, яке значно перевищує значення статичної рівноваги. Це підтверджує важливість отриманої картини динамічних процесів і недостатність аналізу розв'язків відповідної статичної задачі. При $\alpha = 2$ (рис. 4, 7) напруження в точках, близьких до поверхні півпростору, змінюють знак, тобто поза ділянкою навантаження існує відрізок часу, коли матеріал працює на розтяг, а це означає, що в приповерхневому шарі матеріалу виникають розтягуючі напруження, які можуть призвести до викришування.

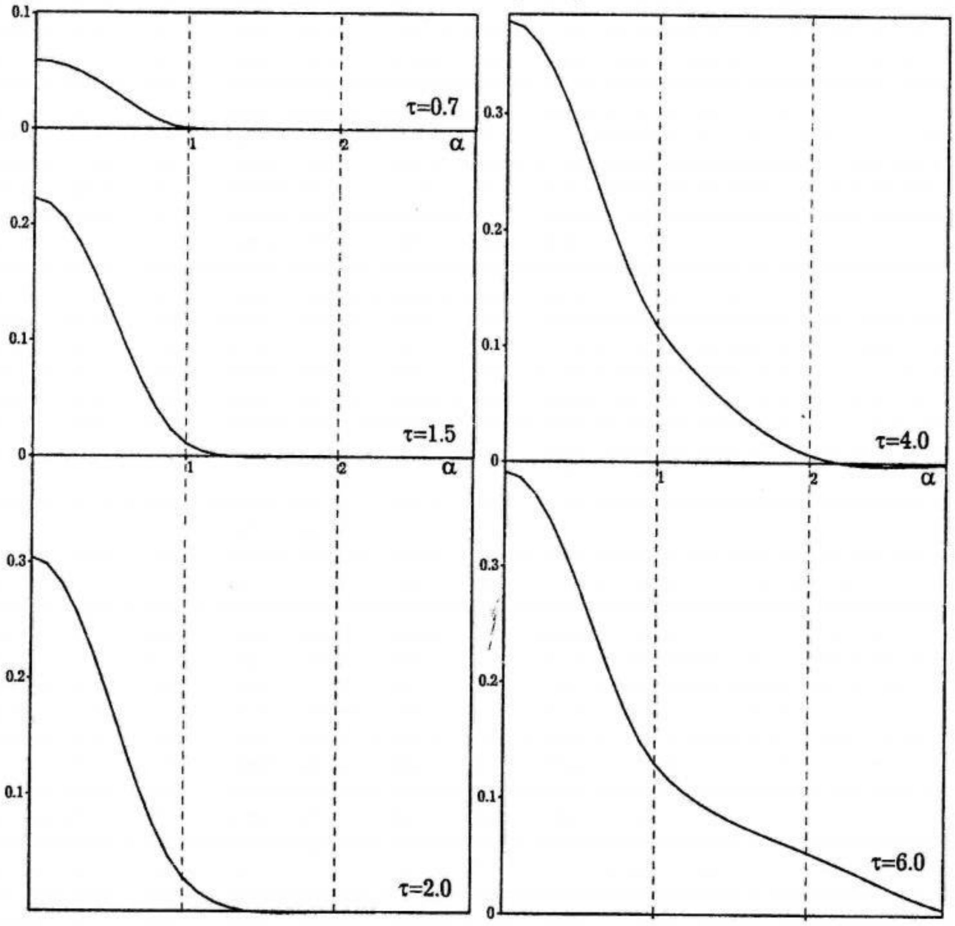

Рис. 8

На рис. 8 зображені вертикальні переміщення на поверхні півпростору $u_\gamma(\alpha,0,\tau)$ залежно від α при фіксованих значеннях τ. З часом вертикальні переміщення зростають, досягаючи максимуму, який збігається з положенням статичної рівноваги.

Зауважимо, що при великих q, зокрема при $q \geq 25$ як частковий випадок отримуємо задачу, наближену до задачі про локальне навантаження межі півпростору (задача Лемба) [4].

---

1. *Галазюк В.А.* Метод полиномов Чебышева–Лагерра в смешанной задаче для линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэфициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 3–7.
2. *Галазюк В.А., Горечко А.Н.* Об одном методе решения динамических задач теории упругости в сферических и цилиндрических координатах // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 6. – С. 41–44.
3. *Онищук В.Я.* Інтегральні перетворення в задачах механіки твердого деформівного тіла. – Львів, 1998.
4. *Achenbach J.D.* Wave propagation in elastic solids. – Amsterdam: North-Holland, 1973.

NONSTATIONARY VIBRATIONS OF ELASTIC HALF-SPACE DUE TO NORMAL LOADINGS

Vitaliy Halazyuk, Andriy Krupnik

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

The method of Laguerre polynomials for the solution of a dynamic problem on operating a normal loading on border of an elastic half-space is offered, with the help which one the pressure stresses and displacements of half-space points are retrieved.

Key words: elastic halfspace, dynamic task, polynomials of Laguerre, tensely-deformed state.

Стаття надійшла до редколегії 05.07.2005
Прийнята до друку 22.11.2006