

УДК 539.3

КОНТАКТНА ЗАДАЧА КОЧЕННЯ З УРАХУВАННЯМ ТЕПЛОУТВОРЕННЯ

Володимир ПАУК

*Технічний Університет Кельце,
Ал. 1000-річчя Польської держави, 7, 25-314 Кельце, Польща*

Запропоновано нову математичну модель для опису теплоутворення внаслідок тертя при коченні двох термопружних циліндрів. Модель враховує взаємну залежність швидкості проковзування, ширину ділянки проковзування і контактний тиск. Додатково враховано неідеальний тепловий контакт між тілами.

Ключові слова: кочення, тертя, проковзування, теплоутворення.

Теплоутворення внаслідок дії сил тертя є явищем, яке відбувається в різних галузях техніки. Це явище добре вивчене у випадку тертя ковзання, див. огляд [1]. Головною тезою при терті ковзання є пропорційна залежність теплових потоків від сили тертя і відносної швидкості ковзання тіл, яка є незмінною на ділянці контакту. Подібні задачі достатньо вивчені у випадку тертя обертання. Мета нашої праці – обговорити явища теплоутворення при терті кочення.

Багато авторів [2–6] спрощує задачу теплоутворення при русі кочення, зводячи її до задачі теплоутворення при ковзанні зі сталою швидкістю, за яку приймають швидкість кочення, зменшену в величину коефіцієнта відносного проковзування. Такі формулювання задач, на думку автора, не розкривають сутності руху кочення, а їхні розв'язки можна використати щонайбільше до оцінки середнього рівня генерованої температури.

Коротко обговоримо рух кочення. Звичним є припущення, що тіла котяться без проковзування. Проте відсутність помітного проковзування не означає досконалої причепності поверхонь тіл у спільній ділянці контакту. Відомо [7], що при коченні пружних тіл ділянка контакту складається з зон, на яких поверхні дотичних тіл зчеплені, і з ділянок проковзування. Якщо у зонах зчеплення відносна швидкість між поверхнями нульова, то на ділянках проковзування швидкість додатна та змінна і її треба визначити при розв'язуванні задачі. Зауважимо, що поділ ділянки контакту на ділянки зчеплення і ковзання є невідомим. В умовах сухого тертя відносно ковзання поверхонь спричиняє теплоутворення тільки в зонах проковзування (а не по всій ширині ділянки контакту), а термічні деформації змінюють не тільки контактний тиск і ширину контактної зони, як це відбувається при русі ковзання, а й також відносну швидкість контактних поверхонь і розміри ділянок зчеплення і проковзування. Це робить задачу теплоутворення при коченні нелінійною. У такому

формулюванні контактну задачу кочення з теплоутворенням від тертя вперше розглядали в [8] для випадку одного термопружного тіла. Додатково приймаємо, що обидва тіла є термопружними, а тепловий контакт між ними неідеальний згідно з умовами з [9].

Формулювання задачі. Нехай два термопружні циліндри дотикаються бічними поверхнями і котяться один по одному під дією дотичної сили Q (рис. 1). Вважається, що тіла перебувають у плоскій деформації, а розглядувані термопружні процеси є усталеними. Така пружна задача відома в літературі як задача Картера [10]. Її характерна особливість – поділ спільної ділянки контакту $(-a, a)$ на передню зону зчеплення $(-a, c)$ і зону проковзування (c, a) , яка локалізована поблизу вихідного кінця. Положення точки c невідоме. Варто зазначити, що цей поділ відбувається при додатковому припущенні про ідентичність механічних властивостей матеріалів тіл. Відносна швидкість між поверхнями тіл у зоні проковзування дорівнює [7]

$$v(x) = V \left(\xi_x - \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial x} \right), \quad x \in (c, a), \quad (1)$$

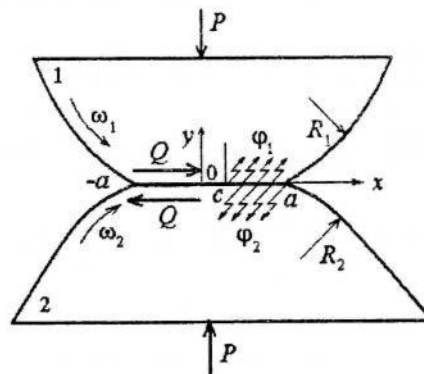


Рис. 1

де V – лінійна швидкість входження поверхонь в область стику; ξ_x – невідомий коефіцієнт відносного ковзання; U_1, U_2 – горизонтальне переміщення поверхонь, відповідно, першого і другого тіла.

Відносний рух поверхонь в умовах сухого тертя спричиняє теплоутворення, тобто у зоні проковзування виникають теплові потоки φ_1, φ_2 , скеровані у контактуючі тіла. Тепловий контакт в зоні зчеплення неідеальний, а поверхні тіл поза нею вважаються теплоізованими. В задачі варто визначити ці теплові потоки, розподіл температур у тілах T_1, T_2 , розподіли нормальних $p(x)$ і дотичних $q(x)$ напружень на ділянці контакту, її ширину та величини зон зчеплення і проковзування.

Граничні умови сформульованої задачі мають вигляд

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = q(x)v(x), \quad x \in (c, a), \quad (2)$$

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = h(T_1(x) - T_2(x)), \quad x \in (c, a), \quad (3)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial y}(x) = 0, \quad x \notin (c, a), \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x} = -\frac{x}{R}, \quad x \in (-a, a), \quad (5)$$

$$v(x) = 0, \quad x \in (-a, c), \quad q(x) < fp(x), \quad x \in (-a, c), \quad (6)$$

$$v(x) > 0, \quad x \in (c, a), \quad q(x) = fp(x), \quad x \in (c, a). \quad (7)$$

Тут h – теплопровідність зони контакту в умові неідеального теплового контакту (3) взятій з [9]; f – коефіцієнт тертя Кулона, $1/R=1/R_1+1/R_2$; R_1, R_2 – радіуси циліндрів; V_1, V_2 – вертикальні переміщення поверхонь тіл.

Інтегральні рівняння. До опису полів температур і переміщень у контактуючих тілах використаємо відомі розв'язки задачі термопружності для півпростору про рухомі зі сталою швидкістю V поверхневі нормальні і дотичні навантаження, а також розподілені теплові потоки у формі [7, 11]

- поверхневі температури

$$T_i(x) = \frac{1}{\pi K_i} \int_c^a M_i(x'-x) \varphi_i(x') dx', \quad (8)$$

$$M_i(z) = K_0 \left(\frac{V|z|}{2k_i} \right) \exp \left(-\frac{Vz}{2k_i} \right); \quad (9)$$

- нормальні пружні переміщення

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{2(1-\nu)}{\pi\mu} \int_{-a}^a \frac{p(x') dx'}{x'-x}; \quad (10)$$

- дотичні пружні переміщення

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{\pi\mu} \int_{-a}^a \frac{q(x') dx'}{x'-x}; \quad (11)$$

- нормальні термічні переміщення

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x} = \int_c^a [N_1(x'-x) \varphi_1(x') + N_2(x'-x) \varphi_2(x')] dx', \quad (12)$$

$$N_i(z) = \frac{(1+\nu)\alpha_i}{K_i} \left[I_0 \left(\frac{Vz}{2k_i} \right) - I_1 \left(\frac{Vz}{2k_i} \right) \right] \exp \left(-\frac{Vz}{2k_i} \right) H(z); \quad (13)$$

- дотичні термічні переміщення

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_c^a [L_1(x' - x)\varphi_1(x') - L_2(x' - x)\varphi_2(x')] dx', \quad (14)$$

$$L_i(z) = \frac{(1 + \nu)\alpha_i}{K_i} \left\{ -\frac{2k_i}{Vz} + \left[K_0 \left(\frac{V|z|}{2k_i} \right) + K_1 \left(\frac{V|z|}{2k_i} \right) \operatorname{sgn}(z) \right] \exp \left(-\frac{Vz}{2k_i} \right) \right\}. \quad (15)$$

Тут індекс $i = 1, 2$ описує властивості кожного з тіл, ν і μ є коефіцієнтом Пуассона і модулем Юнга, K_i , k_i , і α_i є, відповідно, коефіцієнтами теплопровідності, температуропровідності і лінійного теплового розширення тіл.

Задовольняючи за допомогою цих інтегральних подань граничні умови (2), (3), (5), (6)₁, (7)₂, отримаємо систему інтегральних рівнянь задачі

$$\begin{aligned} \Delta(x) - \frac{h}{2\pi K_1} \int_c^a M(x' - x)\Delta(x') dx' &= \frac{f}{2\pi K_1} \int_c^a M_0(x' - x)v(x')p(x') dx', x \in (c, a) \\ \frac{2(1 - \nu)}{\pi\mu} \int_{-a}^a \frac{p(x') dx'}{x' - x} + \frac{f}{2} \int_c^a N(x' - x)v(x')p(x') dx' + \\ &+ \frac{h}{2} \int_c^a R(x' - x)v(x')\Delta(x') dx' = \frac{x}{R}, x \in (-a, a), \\ \frac{2(1 - \nu)}{\pi\mu} \int_{-a}^a \frac{q(x') dx'}{x' - x} + \frac{f}{2\pi} \int_c^a L(x' - x)v(x')p(x') dx' + \\ &+ \frac{h}{2\pi} \int_c^a Q(x' - x)v(x')\Delta(x') dx' = \xi_x, x \in (-a, c), \end{aligned} \quad (16)$$

де введено невідому функцію стрибка температури

$$\Delta(x) = T_1(x) - T_2(x), \quad x \in (c, a), \quad (17)$$

і ядра

$$M(z) = M_1(z) + \frac{K_1}{K_2} M_2(z), \quad M_0(z) = M_1(z) - \frac{K_1}{K_2} M_2(z), \quad (18)$$

$$N(z) = N_1(z) + N_2(z), \quad R(z) = N_1(z) - N_2(z), \quad L(z) = L_1(z) + L_2(z),$$

$$Q(z) = L_1(z) - L_2(z).$$

Цю систему треба замкнути умовами рівноваги тіл

$$\int_{-a}^a p(x)dx = P, \int_{-a}^a q(x)dx = Q. \quad (19)$$

Швидкість проковзування поверхонь (1) з врахуванням розв'язків (8)–(16) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{v(x)}{V} = & \xi_x - \frac{2(1-\nu)}{\pi\mu} \int_{-a}^a \frac{q(x')dx'}{x'-x} - \frac{f}{2\pi} \int_c^a [L(x'-x) - f\pi N(x'-x)] \times \\ & \times v(x')p(x')dx' - \frac{h}{2\pi} \int_c^a [Q(x'-x) - f\pi R(x'-x)] \times \\ & \times v(x')\Delta(x')dx', x \in (c, a). \end{aligned} \quad (20)$$

Як бачимо, система інтегральних рівнянь задачі (16) нелінійна через інтегральну залежність (20) швидкості проковзування $v(x)$, яка входить у цю систему, від шуканих нормальних, дотичних тисків і стрибка температури. Додатковим ускладненням є те, що функція дотичних напружень $q(x)$ невідома на всій ділянці контакту, водночас третє інтегральне рівняння системи (16) записане тільки в ділянці проковзування. Для того щоб обійти це ускладнення, шукані дотичні напруження подамо у такому вигляді

$$q(x) = fp(x) + \begin{cases} q_0(x), & -a < x < c, \\ 0, & c < x < a, \end{cases} \quad (21)$$

де введено нову невідому функцію $q_0(x)$, яку називатимемо коригуючими дотичними напруженнями в області проковзування. Треба звернути увагу, що зображення (21) автоматично виконує решту граничних умов задачі. З фізичної вимоги неперервності функції дотичного тиску на поверхні тіл впливають додаткові умови на коригуючі напруження

$$q_0(-a) = q_0(c) = 0. \quad (22)$$

Фізичними умовами на функцію нормального тиску є умови

$$p(\pm a) \stackrel{!}{=} 0, \quad (23)$$

які впливають з припущення про гладкість поверхонь тіл в ділянці контакту.

Підставляючи зображення (21) до інтегрального рівняння (16)₃, за певними перетвореннями отримаємо інтегральне рівняння на коригуючі напруження

$$\begin{aligned} & \frac{2(1-\nu)}{\pi\mu} \int_{-a}^c \frac{q_0(x')dx'}{x'-x} + \frac{f}{2\pi} \int_c^a [L(x'-x) - f\pi N(x'-x)]v(x')p(x')dx' + \\ & + \frac{h}{2\pi} \int_c^a [Q(x'-x) - f\pi R(x'-x)]v(x')\Delta(x')dx' = \xi_x + \frac{fx}{R}, -a < x < c. \end{aligned} \quad (24)$$

Умова рівноваги (19)₂ з врахуванням зображення (21) набуде вигляду

$$\int_{-a}^c q_0(x)dx = Q - fP, \quad (25)$$

а функцію відносної швидкості проковзування $v(x)$ обчислюємо з рівняння

$$\begin{aligned} \frac{v(x)}{V} = \xi_x + \frac{fx}{R} - \frac{2(1-\nu)}{\pi\mu} \int_{-a}^c \frac{q_0(x')dx'}{x'-x} - \\ - \frac{f}{2\pi} \int_c^a [L(x'-x) - f\pi N(x'-x)]v(x')p(x')dx' - \\ - \frac{h}{2\pi} \int_c^a [Q(x'-x) - f\pi R(x'-x)]v(x')\Delta(x')dx', c < x < a. \end{aligned} \quad (26)$$

Таким способом отримуємо замкнуту систему інтегральних рівнянь (16)₁, (16)₂, (24), (26), (19)₁, (25) стосовно невідомих функцій $p(x)$, $q_0(x)$, $v(x)$, яку треба замкнути фізичними умовами (22), (23).

Розв'язування інтегральних рівнянь і результати. З огляду на нелінійність отриманих інтегральних рівнянь, запропоновано ітераційну схему її розв'язування. На першому її кроці швидкість проковзування вважається відомою з відповідного розв'язку пружної задачі кочення [10]. Тоді можна отримати числовий розв'язок системи інтегральних рівнянь (16)₁, (16)₂, (24), (19)₁, (25). Для апроксимації інтегралів типу Коші варто використати відомі квадратурні формули Гауса-Чебишова [12]. Додаткова невідома – положення точки поміж зонами зчеплення і проковзування визначається ітераційно з фізичної умови (22). Після того, як таким способом визначено перші наближення шуканих функцій $p(x)$, $q_0(x)$, $\Delta(x)$, з інтегрального рівняння типу Фредгольма (26) визначається друге наближення функції швидкості проковзування, яке підставляється до системи інтегральних рівнянь (16)₁, (16)₂, (24), (19)₁, (25). Розв'язуючи її описаним способом, одержимо такі наближення шуканих функцій. Цю процедуру продовжуємо доти, доки різниця між розв'язками з двох послідовних наближень не буде перевищувати заданої. Проведені обчислення засвідчили добру збіжність запропонованої ітераційної схеми.

Отриману систему інтегральних рівнянь контактної задачі розв'язували у безрозмірних величинах, введених співвідношеннями

$$\begin{aligned}
 p^*(s) &= \frac{a}{P} p(x), \quad \Delta^*(s) = \frac{aK_1\mu}{2(1-\nu)fVP^2} \Delta(x), \quad q_0^*(s) = \frac{a}{P} q_0(x), \\
 v^*(s) &= \frac{a\mu}{2(1-\nu)PV} v(x), \quad c_0 = \frac{c}{a}, \quad \xi_x^* = \frac{a\mu\xi_x}{2(1-\nu)P}, \quad Pe = \frac{Va}{2k_1}, \\
 H &= \frac{2(1+\nu)\alpha_1 k_1 P}{aK_1}, \quad Q^* = \frac{Q}{fP}, \quad K = \frac{K_1}{K_2}, \quad k = \frac{k_1}{k_2}, \quad h^* = \frac{ah}{K_1}.
 \end{aligned} \quad (27)$$

Мета проведених обчислень – показати вплив безрозмірних параметрів задачі на рівень і характер генерованої внаслідок тертя теплоти. Найперше дослідимо розкладення температури поверхонь тіл у випадку ідеального теплового контакту в зоні проковзування. Цей випадок контакту отримуємо при безмежній провідності ділянки контакту, $h \rightarrow \infty$. З рис. 2 видно розподіл температур поверхонь контактуючих тіл в області контакту ($-1 < s < 1$) і поза нею ($s < -1$, $s > 1$) при $Q^* = 0,5$, $K = 0,2$, $k = 0,2$ і для кількох значень числа Пекле Pe . Хоча на ділянці проковзування поверхневі температури рівні, але поза нею вони суттєво різняться, з огляду на різницю термічних властивостей циліндрів. До вищої температури прогривається тіло з вищою провідністю. Як і можна було очікувати, збільшення швидкості кочення зменшує рівень генерованої температури. Це можна пояснити зменшенням часу, протягом якого відбувається теплоутворення.

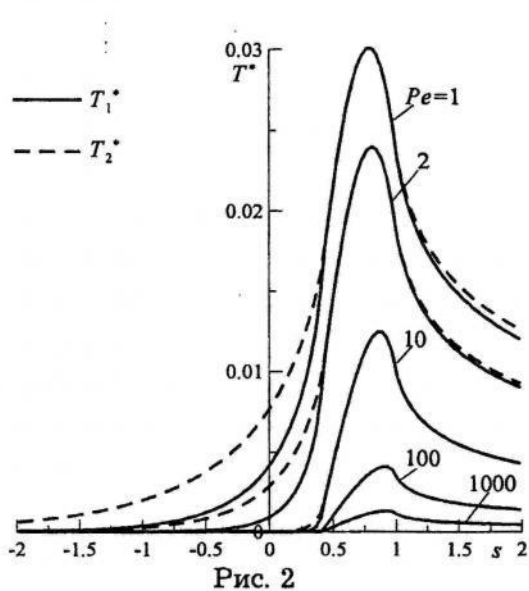


Рис. 2

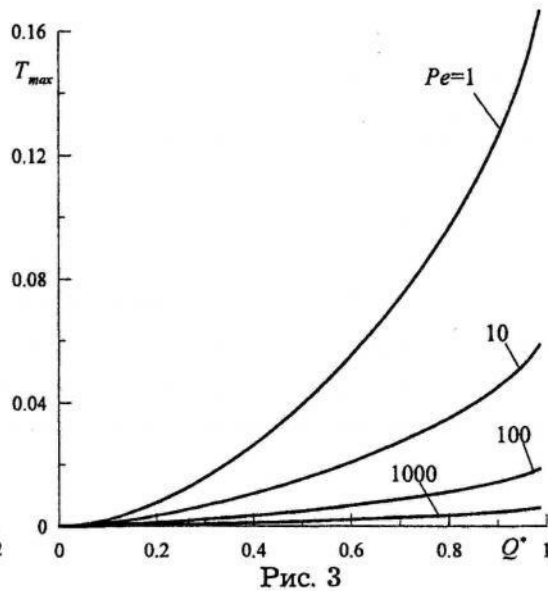


Рис. 3

На рис. 3 показано залежність максимальної безрозмірної температури тертя від дотичної сили для тих самих термічних властивостей циліндрів і для кількох значень числа Пекле. Видно, що збільшення дотичної сили різко збільшує рівень генерованої температури. Нагадаємо, що згідно з

теорією Картера [10] при $Q^*=0$ тіла котяться без проковзування, а при $Q^*=1$ ($Q=fP$) отримуємо пробуксовування, тобто рух ковзання.

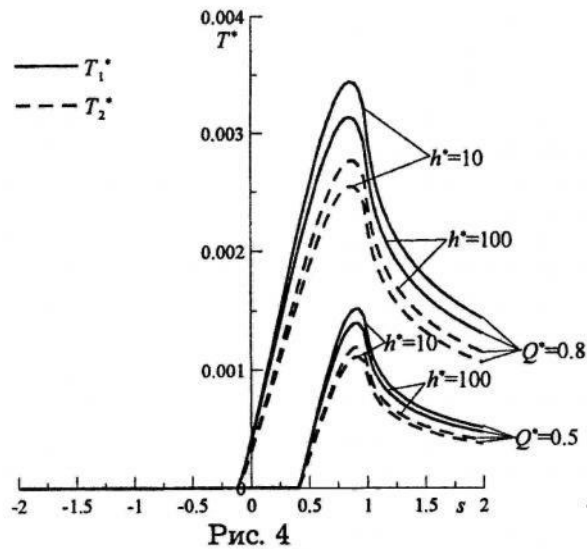


Рис. 4

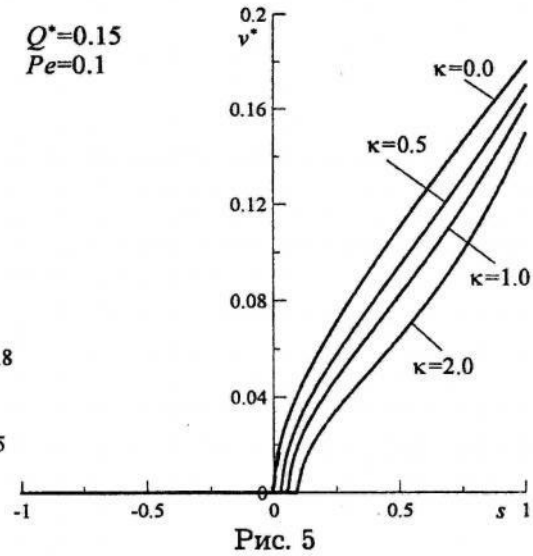


Рис. 5

У випадку неідеального теплового контакту стрибок поміж функціями поверхневих температур залежить від коефіцієнта провідності ділянки контакту h і показаний на рис. 4 для $Pe=1\ 000$, $K=0,5$, $k=0,75$ і при двох значеннях дотичної сили.

Вкінці покажемо розвинення швидкості проковзування від коефіцієнта $\kappa=fPeH$ для $Q^*=0,75$, рис. 5. Як видно, теплоутворення хоч і незначно, але зменшує швидкість проковзування при коченні.

1. Гриліцький Д.В., Євтушенко О.О. Контактні задачі термопружності з врахуванням теплоутворення // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1992. – Вип. 35. – С. 93–100.
2. Cameron A., Gordon A.N., Symm G.T. Contact temperature in rolling/sliding surfaces // Proceedings of the Royal Society of London, Series A. – 1965. – Vol. 286. – P. 46–61.
3. Tanvir M.A. Temperature rise due to slip between wheel and rail – an analytical solution for Hertzian contact // Wear. – 1980. – Vol. 61. – P. 295–308.
4. Knothe K., Liebelt S. Determination of temperature for sliding contact with applications for wheel-rail system // Wear. – 1995. – Vol. 189. – P. 91–99.

5. *Fischer F.D., Werner E., Yan W.Y.* Thermal stresses for frictional contact in wheel-rail system // *Wear.* – 1997. – Vol. 211. – P. 156–163.
6. *Gupta V., Hahn G.T., Bastias P.S., Rubin C.A.* Calculation of the frictional heating of a locomotive wheel attending rolling plus sliding // *Wear.* – 1996. – Vol. 191. – P. 237–241.
7. *Johnson K.L.* Contact mechanics. Cambridge. Cambridge University Press. – 1985.
8. *Pauk V.J., Zastrau B.W.* 2D Rolling contact problem involving frictional heating // *International Journal of Mechanical Sciences.* – 2002. – Vol. 44. – P. 2573–2584.
9. *Гриліцький Д.В., Баран В.П.* Про постановку контактних задач термопружності при неідеальному тепловому контакті тіл // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* – 1987. – Вип. 27. – С. 10–13.
10. *Carter F.W.* On the action of a locomotive driving wheel // *Proceedings of the Royal Society of London, Series A.* – 1926. – Vol. 112. – P. 151–157.
11. *Barber J.R.* Thermoelastic displacements and stresses due to a heat source moving over the surface of a half-plane // *ASME Journal of Applied Mechanics.* – 1984. – Vol. 51. – P. 636–640.
12. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М., 1985.

ROLLING CONTACT PROBLEM INVOLVING HEAT GENERATION

Volodymyr Pauk

*Technical University of Kielce,
Avenue of 1 000-year the Polish state, 7, 25-314 Kielce, Poland*

New mathematical model describing frictional heating in the rolling contact is proposed. This model involves effects of the contact pressure on the slipping velocity as well as on the slip zone size. In addition, it takes into account the non-ideal thermal contact between the rolling bodies.

Key words: rolling, friction, slipping, heat generation.

Стаття надійшла до редколегії 03.06.2005
Прийнята до друку 22.11.2006