

УДК 539.4:624.012

## ТЕРМОПРУЖНА РІВНОВАГА ПІВБЕЗМЕЖНОЇ ПЛАСТИНИ З НЕРОЗТЯГЛИВОЮ ГНУЧКОЮ НАКЛАДКОЮ В МОДЕЛЬНОМУ ФОРМУЛЮВАННІ

Микола КУНДРАТ, Георгій СУЛИМ

Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

В умовах плоскої задачі досліджується термопружна рівновага півбезмежної пластини з нерозтяжливою гнучкою скінченної міцності на розрив нагрітою накладкою за умов ідеального теплового контакту та дії розтягуючого навантаження на пластину. Уздовж межі пластина-накладка розвиваються локалізовані зони передруйнування (ослабленого контакту). Аналітичний розв'язок задачі отримано через комплексні потенціали зведенням до задачі спряження. З використанням деформаційного критерію з'ясовано граничні навантаження та температура можливого відшарування накладки чи її розриву. Досліджено взаємовплив силового та температурного навантажень на розвиток зон передруйнування.

*Ключові слова:* накладка, термопружність, граничне навантаження, двофазова зона передруйнування.

Дослідження та огляд праць плоскої контактної задачі Мелана [1] для ідеально пружного тіла виконано в монографіях [2–5] та ін. Запропоновані у них пружні розв'язки містять механічно некоректні сингулярності напружень в околах кінців накладок, підкріплень. Вплив малих зон пластичності матеріалу ізотропної півплощини в околі країв накладки на розподіл контактних напружень дослідив Ю.І. Кудишин [6], використовуючи ітераційний метод пружних розв'язків О.А. Ільюшина. Отримано обмежені напруження біля кінців підкріплюючого ребра. Однак усі ці підходи розглядали доволі сильно ідеалізовані схеми, які не враховували можливостей ані розриву накладки, ані виникнення в області її кінців часто спостережуваних зон ослабленого контакту з пластиною. Відповідну модельну пружно-пластичну задачу для ортотропної півплощини з підкріпленням розглядали у [7]. У пропонуваній праці модельна схема [7] застосована до аналізу граничної рівноваги в системі “півбезмежна пластина—нагріта накладка”. Тепловий контакт між нерозтяжливою гнучкою обмеженої міцності на розрив накладкою та пластиною ідеальний. Розглядається два можливих механізми руйнування композиції (відшаруванням накладки та її розривом) і для кожного обчислено граничне навантаження.

**Формулювання задачі та її розв'язок.** За умов плоскої задачі теорії термопружності розглянемо півбезмежну пластину, що розтягується на нескінченності зусиллями інтенсивності  $\sigma_{xx}^{\infty} = N_1$  паралельно до її краю (рис. 1). Пластина підкріплена нагрітою до температури  $T_1$  абсолютно

жорсткою, але скінченної міцності на розрив  $P_{ut}$  накладкою завдовжки  $2a$ . Тепловий контакт між накладкою та пластиною ідеальний, температура вільного краю пластини дорівнює  $T_0 = 0$ . Осі декартової системи координат  $xOy$  збігаються з осями геометричної симетрії композиції.

Для пластини найбільша концентрація напружень виникає в околах

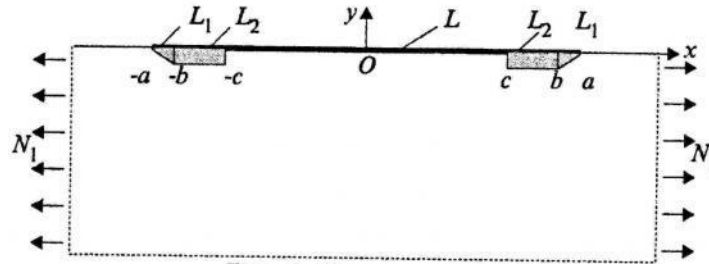


Рис. 1. Схема задачі

кінців накладки, де насамперед і треба чекати появи зон передруйнування. Їм можуть відповідати області накопичення пошкоджень, пластичного деформування (проковзування), часткового розриву зв'язку між пластиною й накладкою та ін. Під час досягнення переміщеннями внаслідок пластичного проковзування матеріалу під накладкою певної граничної межі у зонах передруйнування може порушитися зв'язок між матеріалами, тобто накладка відшарується, зберігаючи контакт з пластиною. З іншого боку, різниця температурних коефіцієнтів розширення матеріалів пластини й накладки, передача дії прикладених зовнішніх зусиль спричиняють у накладці осеві зусилля розтягу. Вони при досягненні межі міцності накладки можуть спричинити її розрив.

Припускаємо, що зони передруйнування розвиваються уздовж межі пластина-накладка від краю до її центру і складаються з двох ділянок: зони розпушення  $L_1 = (-a, -b) \cup (b, a)$  та зони пластичності  $L_2 = (-b, -c) \cup (c, b)$ . У зонах передруйнування виконуються такі крайові умови: на ділянках розпушення (ослабленого контакту) дотичні напруження лінійно зростають від нуля до свого граничного значення  $\tau_s^*$  –

$$\sigma_{xy}(x) = \tau_s^* \frac{a - |x|}{a - b} \operatorname{sign}(x) \quad (x \in L_1); \quad (1)$$

на ділянках пластичного деформування –

$$\sigma_{xy}(x) = \tau_s^* \operatorname{sign}(x) \quad (x \in L_2), \quad (2)$$

де  $\tau_s^*$  – зсувна межа міцності контактної межі пластина-накладка, а при пластичному деформуванні – її зсувний поріг пластичності;  $\sigma_{ij}$  – компоненти тензора напружень;  $\operatorname{sign}(x) = \{1 \text{ для } x > 0; -1 \text{ для } x < 0; 0 \text{ для } x = 0\}$ . Значення параметрів  $b$  та  $c$  наперед невідомі і знаходять з додаткових механічних умов. Зазначимо, що запроваджена так зона передруйнування

дає змогу уникнути особливостей напружень в околах кінців накладки та отримати обмежені напруження в усіх точках композиції, які дають механічно коректну картину деформування конструкції, що задовольняє також і закон парності дотичних напружень.

На проміжку  $|x| < c$  пружного деформування зберігається ідеальний контакт, тому переміщення дорівнюють

$$u(x) = T_1 \alpha_p x \quad (x \in L), \quad (3)$$

де  $\alpha_p$  — температурний коефіцієнт лінійного видовження матеріалу накладки;  $u, v$  — компоненти вектора переміщень у напрямках осей  $Ox$  та  $Oy$  відповідно.

Напруження на нескінченності

$$\sigma_{xx}^\infty = N_1, \quad \sigma_{yy}^\infty = \sigma_{xy}^\infty = 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Оскільки накладка вважається абсолютно гнучкою, то дії нормальних контактних зусиль під накладкою немає. Оскільки вільний край пластини теж не навантажений, то по всьому краю пластини  $\sigma_{yy} = 0$  ( $y = 0$ ).

Для розв'язування задачі використаємо відомі [8, 9] подання Колосова-Мусхелішвілі для напружень і деформацій

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \\ 2G \partial(u + iv)/\partial x &= \kappa \Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} + \beta \Psi_0(z). \end{aligned} \quad (5)$$

Тут  $z = x + iy$ ;  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ,  $\beta = 4G\alpha_0$  для плоского напруженого стану (ПНС);  $\kappa = 3 - 4\nu$ ,  $\beta = 4G(1 + \nu)\alpha_0$  в умовах плоскої деформації (ПД);  $\alpha_0, G, \nu$  — температурний коефіцієнт лінійного розширення, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини. Зазначимо, що за плоского напруженого стану вільні поверхні пластини вважають теплоізовльованими.

Функція  $\Psi_0(z)$  визначається співвідношеннями [8, 9]

$$2 \operatorname{Re} \Psi_0(z) = T, \quad \Psi_0(z) = F_0(z) - \bar{F}_0(z), \quad F_0(z) - F_0(\bar{z}) = T + i\eta,$$

де  $\eta$  — дійсна функція;  $F_0(z)$  — визначена в областях  $D^*$  ( $y < 0$ ) та  $D$  ( $y > 0$ ) аналітична функція. Звідси отримуємо, що

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2} T_0 + \frac{T_1 - T_0}{2\pi i} \ln \frac{z + a}{z - a}. \quad (6)$$

Функцію  $\Phi(z)$  знайдемо після підставлення формул (5) у крайові умови (1)–(3). З урахуванням виразу (6), це приведе до задачі спряження з кусково-неперервними коефіцієнтами

$$\begin{aligned} \Phi^+(x) - g(x)\Phi^-(x) &= f(x), \\ g(x) &= \begin{cases} -1 & (x \in L), \\ 1 & (x \in L_1 \cup L_2); \end{cases} \\ f(x) &= \begin{cases} f_1(x) = -i\tau_s^*(a - |x|)/(a - b)\operatorname{sign}(x) & (x \in L_1), \\ f_2(x) = -i\tau_s^*\operatorname{sign}(x) & (x \in L_2), \\ f_3(x) = 2[G\alpha_p T_1 - \beta \operatorname{Re} \Psi_0^+(x)] & (x \in L). \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Загальним розв'язком крайової задачі (7) з урахуванням умови на нескінченності (4) буде функція

$$\Phi(z) = \frac{f_3(z)}{2} + \frac{zB_4(z, a, b, c)}{X(z)} + \frac{\tau_s^*}{2\pi(a-b)} f_6(z, a, b, c), \quad (8)$$

де

$$B_4(z, a, b, c) = N_1/4 - f_3(z)/2 - \tau_s^* f_5(a, b, c)/[\pi(a-b)], \quad X(z) = \sqrt{z^2 - c^2},$$

$$\begin{aligned} f_5(a, b, c) &= \sqrt{b^2 - c^2} - \sqrt{a^2 - c^2} - b \cdot \ln\left[\frac{b + \sqrt{b^2 - c^2}}{c}\right] + \\ &+ a \cdot \ln\left[\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{c}\right], \end{aligned}$$

$$f_6(z, a, b, c) = b\Gamma_1(z, b, c) - a\Gamma_1(z, a, c) + z[\Gamma_2(z, a, c) - \Gamma_2(z, b, c)],$$

$$\Gamma_1(z, \omega, c) = \ln(\zeta^-/\zeta^+), \quad \zeta^\pm = \omega\sqrt{z^2 - c^2} \pm z\sqrt{\omega^2 - c^2},$$

$$\Gamma_2(z, \omega, c) = \ln(\xi^-/\xi^+), \quad \xi^\pm = \sqrt{\omega^2 - c^2} \pm \sqrt{z^2 - c^2}.$$

Формули (5), (6), (8) цілком описують поле напружень і деформацій у тілі з накладкою, дають змогу дослідити умови його руйнування.

**Деформаційний критерій руйнування.** З умови, що напруження у вершинах лінійних пластичних зон ( $x = \pm c$ ) неперервні (обмежені), отримаємо нелінійне рівняння

$$\frac{N_1}{4} - \frac{2GT_1}{\kappa + 1}(\alpha_p - k\alpha_0) - \frac{\tau_s^*}{\pi(a-b)} f_5(a, b, c) = 0, \quad (9)$$

де  $k = 1$  в умовах ПНС та  $k = 1 + \nu$  за ПД.

Використаємо для опису зони передруйнування безрозмірні параметри довжини  $\varepsilon = (a - c)/a$  та навантаження

$$S = N_1 - 8GT_1(\alpha_p - k\alpha_0)/(\kappa + 1). \quad (10)$$

На рис. 2 зображено залежність довжини зон передруйнування від параметра  $S/(2\tau_s^*)$ . Номери біля ліній відповідають різним довжинам зони

розпушення  $\gamma = (a - b)/a$ , яка може вважатися залежним від структури матеріалів додатковим механічним параметром контактної взаємодії пари пластина-накладка: 1 -  $\gamma = 10^{-10}$  (зони розпушення практично немає); 2 -  $\gamma = 0,05$ ; 3 - 0,1; 4 - 0,15; 5 - 0,2. Збільшення зони розпушення за фіксованого рівня навантаження загалом видовжує зону передруйнування,

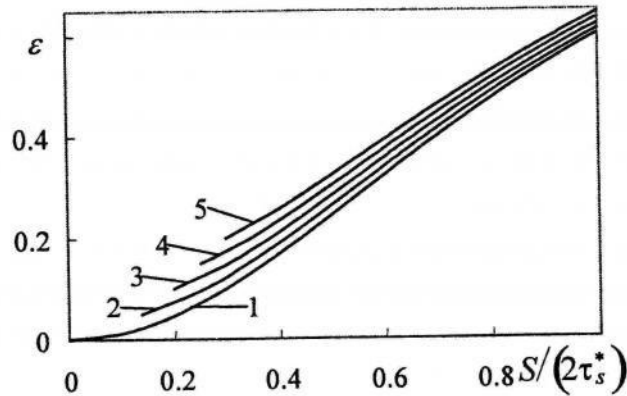


Рис. 2. Довжина зон передруйнування

хоча область пластичності зменшується.

Простий аналітичний вираз для довжини лінії пластичності отримаємо при незначних зонах розпушення, спрямовуючи їхню довжину  $\gamma$  до нуля ( $b=a$ )

$$\varepsilon = \frac{a - c}{a} = 1 - 1/\operatorname{ch}\left(\frac{\pi S}{4\tau_s^*}\right), \quad (11)$$

або в першому наближенні після розвинення у формулі (9) у ряд за степенями  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \pi^2 S^2 / (8\tau_s^{*2}). \quad (12)$$

Якщо силове навантаження таке, що  $N_1 = 8GT_1(\alpha_p - k\alpha_0)/(\kappa + 1)$ , то згідно з рівнянням (9) за комбінованої дії зусиль і температури виконується умова  $c = b = a$ , зони передруйнування не виникають. Подібно, задаючи на накладці залежну від зусиль розтягу температуру  $T_1 = N_1(\kappa + 1)/[8G(\alpha_p - k\alpha_0)]$ , також можна уникнути виникнення зон передруйнування біля кінців накладки. Якщо  $\alpha_p = k\alpha_0$ , то саме лише нагрівання накладки ( $N_1 = 0$ ) не спричинятиме появи зон передруйнування. За умови  $\alpha_p < k\alpha_0$  впливи навантаження розтягу і температурного чинника взаємно посилюються, а за  $\alpha_p > k\alpha_0$  температурні напруження послаблюють дію зусиль розтягу на розвиток зон передруйнування.

На відміну від зон пружного контакту у смугах пластичності та розпушення ( $c \leq |x| < a$ ) відбувається зміщення (проковзування) точок матеріалу пластини стосовно накладки. Інтегруванням у третій формулі (5) з урахуванням результатів (8) знаходимо переміщення під накладкою

$$u(x) = u^t(x) + u^c(x), \quad u^t(x) = T_1 \alpha_p x, \quad u^c(x) = \frac{(\kappa + 1) \tau_s^*}{8\pi G(a-b)} f_8(x, a, b, c),$$

де

$$f_8(x, a, b, c) = (a^2 + x^2) \Gamma_2(x, a, c) + 2x[b\Gamma_2(x, b, c) - a\Gamma_1(x, a, c)] - \\ - (b^2 + x^2) \Gamma_2(x, b, c) - 2\sqrt{x^2 - c^2} (\sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{b^2 - c^2}).$$

Звідси випливає, що зміщення точок пластини під накладкою найбільші у точках  $x = \pm a$

$$u(a) = -u(-a) = u^t(a) + u^c(a), \\ u^t(a) = T_1 \alpha_p a, \quad u^c(a) = \frac{(\kappa + 1) \tau_s^*}{4\pi G(a-b)} f_9(a, b, c). \quad (13)$$

Тут

$$f_9(a, b, c) \equiv f_8(a, a, b, c) = 2a^2 \ln(a/c) + ab\Gamma_1(a, b, c) - \\ - 0,5(a^2 + b^2) \Gamma_2(a, b, c) + c^2 - a^2 + \sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}.$$

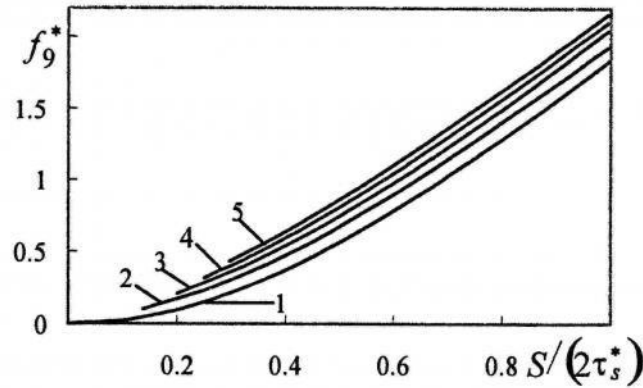
Коли ці максимальні переміщення  $u(a)$  досягають граничного значення  $\delta_{2c}$ , яке є характеристикою зсувної контактної міцності системи "пластина-накладка" та з'ясовується експериментально, то втрачається безпосередній механічний зв'язок між накладкою й пластиною – відбувається руйнування. Критеріальна умова

$$u(a) = \delta_{2c}, \quad (14)$$

що характеризує початок відшарування накладки, аналогічна до відомої [10] умови  $\delta_c$ -моделі. З (13), (14) отримуємо залежність

$$\left( \frac{\delta_{2c}}{a} - T_1 \alpha_p \right) \frac{\pi G a}{(\kappa + 1) \tau_s^*} = \frac{f_9(a, b, c)}{4(a-b)}. \quad (15)$$

Система рівнянь (9), (15) описує стан граничної рівноваги композиції, коли можливе розшарування між накладкою й пластиною, а її розв'язок дає значення граничного навантаження  $N_1 = N_1^*$  та температури  $T_1 = T_1^*$ .


 Рис. 3. Зміна функції  $f_9^*$ 

На рис. 3 зображено значення функції  $f_9^* \equiv f_9(a, b, c)/[a(a - b)]$  залежно від параметра навантаження  $S/(2\tau_s^*)$ . Номери біля ліній відповідають тим самим значенням довжини зон розпушення  $\gamma$ , що і на рис. 2. При сталих навантаженні та фізико-механічних характеристиках зі збільшенням зони розпушення зміщення точок матеріалу пластини стосовно накладки збільшується. Інакше кажучи, при фіксованому  $\delta_{2c}$  зі збільшенням зони розпушення допустиме граничне навантаження розшарування зменшується.

Розподіл дотичних напружень  $\sigma_{xy}$  під накладкою згідно з другою формулою (5) та результатами (8)

$$\sigma_{xy}(x) = \text{Im}[f_3(x) - 2\Phi(x)] = 2\tau_s^* f_7(x, a, b, c)/[\pi(a - b)] \quad (x \in L), \quad (16)$$

де

$$f_7(x, a, b, c) = a \arctg \frac{x\sqrt{a^2 - c^2}}{a\sqrt{c^2 - x^2}} - b \arctg \frac{x\sqrt{b^2 - c^2}}{b\sqrt{c^2 - x^2}} + x \left( \arctg \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} - \arctg \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{\sqrt{b^2 - c^2}} \right).$$

Параметри  $c$  та  $b$  визначають із системи рівнянь (9), (15) за відомим силовим і температурним навантаженням.

На рис. 4 зображено розподіл контактних дотичних напружень уздовж правої половини накладки (на лівій — картина симетрична) при фіксованому навантаженні  $S/(2\tau_s^*) = 0,2$ : для лінії 1 —  $\gamma = 10^{-10}$  (згідно з рівнянням (9) довжина зони передруйнування  $\varepsilon = 0,0474$ ); 2 —  $\gamma = 0,05$  ( $\varepsilon = 0,0723$ ); 3 —  $0,1$  ( $\varepsilon = 0,10035$ ). Основна частина дотичних зусиль

передається підкріпленню в околах його кінців і з наближенням до центральної частини накладки напруження швидко зменшуються: в околах точок  $x = \pm c$  і у центральній області накладки вони вже порівняно

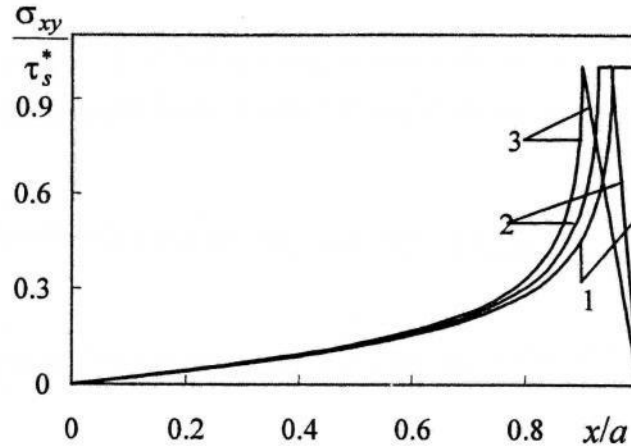


Рис. 4. Контактні напруження

невеликі. Зміна довжини зони розпушення  $y$  впливає на розподіл контактних напружень біля кінців накладки, не змінюючи картину розподілу в середній частині.

**Розрив накладки.** Дотичні напруження вздовж поверхні зчеплення пластини з накладкою (16), (1), (2) спричиняють появу у поперечному перерізі її осевого зусилля  $P(x) = \int_x^a \sigma_{xy}(x) dx$ , яке під час перевищення деякого граничного значення може її розірвати. Розподіл осевих зусиль на різних ділянках контакту накладки з півплощиною обчислюється за формулами

$$P(x) = \begin{cases} 0,5\tau_s^* (a-x)^2 / (a-b) & (b \leq |x| \leq a) , \\ 0,5\tau_s^* (a+b-2x) & (c \leq |x| \leq b) , \\ (\tau_s^* / \pi) f_{10}(x, a, b, c) / (a-b) & (0 \leq |x| \leq c) , \end{cases} \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} f_{10}(x, a, b, c) = & 2x \left( b \cdot \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{b^2 - c^2}}{b\sqrt{c^2 - x^2}} - a \cdot \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{a^2 - c^2}}{a\sqrt{c^2 - x^2}} \right) + \\ & + (b^2 + x^2) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{\sqrt{b^2 - c^2}} + \sqrt{c^2 - x^2} (\sqrt{b^2 - c^2} - \sqrt{a^2 - c^2}) + \\ & + 0,5\pi (a^2 - b^2) - (a^2 + x^2) \operatorname{arctg} \left( \sqrt{(c^2 - x^2) / (a^2 - c^2)} \right). \end{aligned}$$



Силове навантаження пластини та температура накладки сюди входять опосередковано через значення параметрів  $b, c$ .

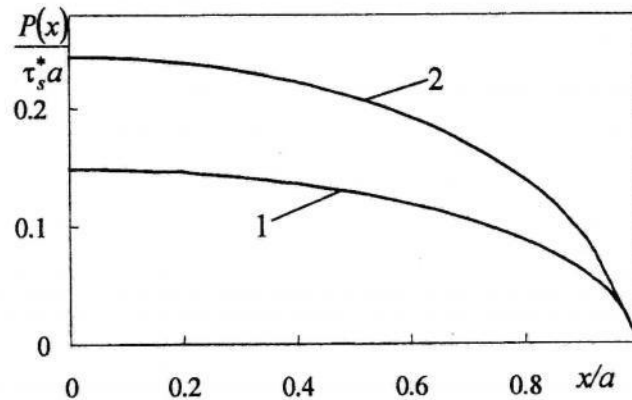


Рис. 5. Розподіл осьових зусиль у накладці

На рис. 5 зображено розподіл осьових зусиль уздовж правої половини накладки за  $\gamma = 0,01$ : для лінії 1 —  $S/(2\tau_s^*) = 0,15$ ; 2 —  $S/(2\tau_s^*) = 0,25$ .

Помітне існування області у центральній частині накладки, де розривні зусилля змінюються незначно. Наприклад, якщо не зважати на зміну зусиль у межах 5% (скажімо, похибки визначення сталих, обчислень, математичної моделі тощо), то така область становить більше третини довжини накладки, що свідчить про можливість за досить швидкої зміни навантаження одночасного множинного розриву підкріплюючого елемента у заданій зоні.

Найбільшого значення розривні зусилля досягають посередині накладки ( $x = 0$ )

$$P(0) = \left( \tau_s^* / \pi \right) f_{11}(a, b, c) / (a - b), \quad (18)$$

де

$$f_{11}(a, b, c) = c \left( \sqrt{b^2 - c^2} - \sqrt{a^2 - c^2} \right) + b^2 \operatorname{arctg} \left( \frac{c}{\sqrt{b^2 - c^2}} \right) - a^2 \operatorname{arctg} \left( \frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}} \right) + \frac{\pi}{2} (a^2 - b^2).$$

Зміна довжини зони розпушення дуже слабо впливає на значення максимальних осьових розривних зусиль у накладці. На рис. 6 подано їх величину залежно від параметра навантаження. Номери біля ліній відповідають тим самим значенням зони розпушення  $\gamma$ , що і на рис. 4. Лінії 2, 3 обриваються в нижній частині обмеженням на навантаження.

Зі збільшенням навантаження та розвитком ліній пластичності осьові зусилля також збільшуються. Збільшення розривних зусиль у накладці відбуватиметься до початку її відшарування чи, що те саме, до моменту досягнення відносними зсувами точок пластини стосовно накладки

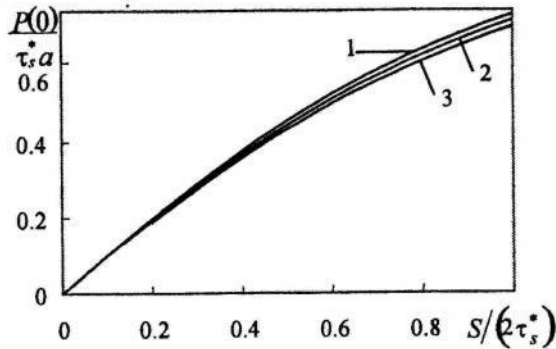


Рис. 6. Максимальні осьові зусилля у накладці

граничного значення  $\delta_{2c}$ . Тому максимальні осьові зусилля у накладці  $P_{\max}$ , на які треба орієнтуватися під час вибору накладки, знаходимо, розв'язуючи систему рівнянь (18), (15) та прийнявши  $P(0) = P_{\max}$ .

З іншого боку, міцність накладки на розрив обмежена. Для запобігання її розриву потрібно, щоб осьові зусилля не перевищували межі міцності накладки  $P_{ut}$ :  $P_{\max} \leq P_{ut}$ . Приймаючи цю умову за критеріальну та розв'язавши систему рівнянь (9), (18) за умови  $P(0) = P_{ut}$ , отримуємо граничні значення силового навантаження  $N_1 = N_1^{**}$  та температури  $T_1 = T_1^{**}$  розриву накладки.

Запроваджено зону передруйнування (ослабленого контакту) у композиції з накладкою за умов температурного та силового навантажень, що дало змогу уникнути сингулярності напружень в околах країв накладки та отримати механічно коректні обмежені напруження в усіх точках композиції.

За одночасної дії температурного та силового навантажень залежно від фізико-механічних характеристик композиції можливий їх взаємно підсилювальний та послаблювальний вплив на розвиток зон передруйнування. Якщо задана температура накладки, то завжди можна так підібрати силові навантаження, що розвиток зон передруйнування не відбуватиметься. І навпаки, задаючи відповідно температуру накладки, також можна уникнути виникнення цих зон.

З використанням деформаційного критерію отримано формули для граничних значень силового навантаження та температури, за яких відбуватиметься відшарування накладки. З умови, що зусилля розтягу у накладці не можуть перевищувати її міцності на розтяг, знайдено граничні зусилля на нескінченності та температуру, за яких накладка розірветься.

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen // Ingenieur. – Archiv. – 1932. – Bd. 3. – Heft 2. – S. 123–129.
2. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. – М., 1973.
3. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М., 1980.
4. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М., 1982.
5. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М., 1983.
6. Кудишин Ю.И. Задача о подкреплении полуплоскости ребром с учетом пластических свойств материала // Строительная механика и расчет сооружений. – 1982. – №2. – С. 25–28.
7. Кундрат М.М. Пружно-пластична рівновага ортотропної півплощини з накладкою // Машинознавство. – 2002. – №1. – С. 31–35.
8. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966.
9. Пруссов И.А. Некоторые задачи термоупругости. – Минск, 1972.
10. Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. – К., 1991.

## THERMOELASTIC EQUILIBRIUM OF SEMIINFINITE PLATE WITH NONTENSILE FLEXIBLE REINFORCEMENT PLATE IN MODELLING FORMULATION

**Mikola Kundrat, Georgij Sulym**

*Ivan Franko National University of Lviv,  
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

Thermoelastic equilibrium of semiinfinite plate with nontensile flexible and limited tensile strength reinforcement plate for the plane problem is investigated. The thermal contact between reinforcement and semiinfinite plate is perfect, stresses on infinity are parallel to its edge. Local prefracture zones are developed along interface border from tips to the center of reinforcement. Analytical decision of the problem is obtained using complex potentials. Limiting efforts and temperature for exfoliation of the reinforcement or its rupture are determined using the criterion of deformation. Interaction between temperature and efforts effects on the development of prefracture zones is investigated.

*Key words:* strength reinforcement, thermoelastic, limit loading, biphasе prefracture zone.

Стаття надійшла до редколегії 20.10.2005  
Прийнята до друку 22.11.2006