ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2006. Вип. 65. С.60-72

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Mat. 2006. Vol.65. P.60-72

УДК 539.3

НЕСТАЦІОНАРНИЙ РОЗІГРІВ ПРОСТОРУ ДИСКОВИМ ТЕПЛОВИДІЛЯЮЧИМ ЕЛЕМЕНТОМ

Віталій ГАЛАЗЮК, Вікторія КОЦЮБАЙЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Сформульовано задачу теплопровідності для простору, що розігрівається дисковим тепловиділяючим елементом. Запропоновано методику розв'язування задачі на підставі застосування методу інтегрального перетворення Чебишева-Лагерра, а також розглянуто традиційний аналітичний метод розв'язування за допомогою інтегрального перетворення Лапласа за часовою змінною.

Показано, що за умови $q_\gamma(\alpha,\pm 0)=0 \quad (1<\alpha<\infty)$ температурний потік q_α має логарифмічну особливість на краю включення $\alpha=1$, що суперечить фізиці явища. Проведено числовий аналіз задачі, на підставі якого побудовано відповідні графічні залежності.

Ключові слова: теплові потоки, регулярність, сингулярність.

Традиційним аналітичним методом розв'язання початково-крайової задачі для рівняння в частинних похідних з незалежними від часу коефіцієнтами полягає у зведенні її за допомогою інтегрального перетворення Лапласа за часовою змінною до крайової задачі у просторі зображень. До недоліків цього методу належать труднощі математичного характеру, які виникають при переході від зображення до оригіналу у випадках складних крайових умов, оскільки за відсутності точної формули обернення треба застосовувати наближені методи знаходження оригіналу розв'язку. Потрібно знайти розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма першого роду з гладким ядром, що є некоректною задачею.

Нижче, на прикладі початково-крайової задачі про нестаціонарний розігрів простору дисковим тепловиділяючим елементом, пропонуємо метод розв'язування, що передбачає застосування до вихідної початково-крайової задачі інтегрального перетворення Лагерра [1] і зведення її до нескінченної послідовності крайових задач, які залежать від деякого параметра. На підставі теореми про розвинення функції в ряд за поліномами Лагерра розв'язок вихідної початково-крайової задачі подається ортогональним рядом за поліномами Лагерра, коефіцієнтами якого є розв'язки послідовності крайових задач. Отож, запропонований метод — це побудова алгоритму знаходження коефіцієнтів ортогонального ряду за поліномами Лагерра.

Формулювання задачі. Розглянемо простір, віднесений до циліндричної системи координат $(R\alpha, \beta, R\gamma)$ з початком у центрі дискового включення радіуса R, яке є тепловиділяючим елементом і забезпечує осесиметричний стосовно осі γ розподіл температури $T(\alpha,\gamma,\tau)$ у просторі $|\gamma| \geq 0$. Тоді для визначення температурного поля у просторі треба розв'язати осесиметричну початково-крайову задачу, яка у безрозмірних змінних (α,γ) набуде вигляду

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\frac{\partial T}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial^2 T}{\partial\gamma^2}=\frac{\partial T}{\partial\tau}; \tag{1}$$

$$T(\alpha,\gamma,0)=0\,;\quad \frac{\partial T}{\partial\gamma}=\mp T_0 f\left(\alpha^2\right)g(\tau)\quad \forall\alpha\in[0,1)\quad \gamma=0; \tag{2}$$

$$\lim_{(|\alpha|,|\gamma|)\to\infty} q_\alpha(\alpha,\gamma,\tau)=0, \tag{3}$$

де $\alpha=\dfrac{r}{R}$, $\gamma=\dfrac{z}{R}$, $\tau=\dfrac{at}{R}$; a – коефіцієнт температуропровідності і $g(0)=0$.

Побудова розв'язку задачі методом поліномів Лагерра. До початково-крайової задачі (1)–(3) застосуємо інтегральне перетворення Лагерра [1] за часовою змінною τ

$$T_n(\alpha,\gamma)=\int_0^\infty T(\alpha,\gamma,\tau)e^{-\lambda\tau}L_n(\lambda\tau)\,d\tau\quad (n=0,1,2...), \tag{4}$$

де $L_n(\lambda\tau)$ — поліноми Лагерра [5], формула обернення якого має вигляд

$$T(\alpha,\gamma,\tau)=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}T_n(\alpha,\gamma)L_n(\lambda\tau). \tag{5}$$

У результаті отримаємо послідовність крайових задач

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\frac{\partial T_n}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial^2 T_n}{\partial\gamma^2}-\lambda T_n=\lambda\sum_{m=0}^{n-1}T_m; \tag{6}$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial\gamma}=\mp T_0 f\left(\alpha^2\right)g_n\quad \forall\alpha\in[0,1)\quad \gamma=0; \tag{7}$$

$$\lim_{(|\alpha|,|\gamma|)\to\infty}\frac{\partial T_n}{\partial\alpha}=0, \tag{8}$$

де $g_n=\int_0^\infty g(\tau)e^{-\lambda\tau}L_n(\lambda\tau)\,d\tau\quad (n=0,1,2...)$.

З використанням інтегрального перетворення Ганкеля за радіальною координатою α трикутну послідовність диференціальних рівнянь у частинних похідних (6) зведемо до послідовності звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2T_n^H}{d\gamma^2} - \left(\lambda + \xi^2\right)T_n^H = \lambda \sum_{m=0}^{n-1} T_m , \tag{9}$$

де

$$T_n^H(\gamma) = \int_0^\infty \alpha J_0(\xi\alpha) T_n(\alpha,\gamma)\, d\alpha \tag{10}$$

перетворення функції T_n^H по Ганкелю; $J_0(\xi\alpha)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Загальний розв'язок трикутної послідовності диференціальних рівнянь (9) запишемо у вигляді алгебричної згортки [2]

$$T_n^H(\xi,\gamma) = \sum_{j=0}^{n} A_{n-j}(\xi) G_j(\xi,\gamma), \tag{11}$$

де $A_{n-j}(\xi)$ – довільні функції, які визначають з трансформованих крайових умов (7), а $G_j(\xi,\gamma)$ – фундаментальна система розв'язків трикутної послідовності звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2G_j}{d\gamma^2} - \left(\lambda + \xi^2\right)G_j = \lambda \sum_{m=0}^{j-1} G_m . \tag{12}$$

Для визначення функцій $G_j(\xi,\gamma)$ подамо їх у вигляді

$$G_j(\xi,\gamma) = e^{-|\gamma|\sqrt{\lambda+\xi^2}} \sum_{m=0}^{j} b_{m,j}\gamma^m , \tag{13}$$

де коефіцієнти $b_{m,j}$ знаходять шляхом підстановки виразу (13) у рівняння (12) і прирівнювання до нуля коефіцієнтів при однакових степенях γ. Для кожного фіксованого значення j всі значення $b_{m,j}$ рекурентними співвідношеннями

$$b_{m,j+1} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda+\xi^2}}\left[(j+2)b_{m,j+2} - \frac{\lambda}{j+1}\sum_{k=j}^{m-1} b_{k,j}\right] \tag{14}$$

визначаються через $b_{0,j}$, які вибирають з умов нормування.

Застосувавши до рівності (11) обернене перетворення Ганкеля, одержимо інтегральне подання розв'язків трикутної системи диференціальних рівнянь у часткових похідних (6) у вигляді лінійної комбінації інтегралів Ганкеля –

$$T_n(\alpha,\gamma) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\infty} A_{n-j}(\xi) G_j(\xi,\gamma) \xi J_0(\xi\alpha) d\xi . \tag{15}$$

Якщо вираз (15) підставити у крайову умову (7), то для визначення функцій $A_{n-j}(\xi)$ отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{n} A_{n-j}(\xi) G_j'(\xi,0) \xi J_0(\xi\alpha) d\xi = \mp T_0 f(\alpha^2) g_n , \tag{16}$$

розв'язок якого шукатимемо у вигляді узагальненого ряду Неймана

$$-\xi \sum_{j=1}^{n} A_{n-j}(\xi) G_j'(\xi,0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{J_{2k-p+1}(\xi)}{\xi^p} , \tag{17}$$

розв'язок цієї системи стосовно функцій $A_{n-j}(\xi)$ можна суттєво спростити, якщо скористатися тим фактом, що функції $G_j(\xi,\gamma)$ визначають з точністю до довільних сталих $b_{0,j}$. Виберемо ці довільні сталі так, щоб виконувалися такі умови нормування:

$$G_0'(\xi,0) = -\xi \ , \ G_j'(\xi,0) = 0 \quad \forall j \in N \tag{18}$$

і зведемо систему (17) до діагонального вигляду

$$A_n(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{J_{2k-p+1}(\xi)}{\xi^{p+2}} . \tag{19}$$

Якщо подання (19) підставити в інтегральне рівняння (16) і обчислити розривний інтеграл Вебера–Шафгайтліна [4], то в області $(0 \le \alpha \le 1)$ отримаємо функційне рівняння

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(k-p+1) F\left(k-p+1,-k,1;\alpha^2\right)}{2^p \Gamma(k+1)} = T_0 f\left(\alpha^2\right) g_n . \tag{20}$$

Позаяк при $a=-k$ або $b=-k$ гіпергеометрична функція Гаусса $F\left(a;b;c;x^2\right)$ вироджується в поліном степеня $2k$ [4], то на підставі апроксимаційної теореми Вейєрштрасса рівняння (20) має єдиний розв'язок — набір коефіцієнтів a_k за довільної неперервної на проміжку $(0 \le \alpha \le 1)$ функції $f\left(\alpha^2\right)$.

Якщо коефіцієнти $A_{n-j}(\xi)$ відомі, то шуканий розв'язок початково-крайової задачі (1)-(3) матиме вигляд

$$T(\alpha,\gamma,\tau)=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}L_n(\lambda\tau)\sum_{j=0}^{n}\int_0^{\infty}A_{n-j}(\xi)G_j(\xi,\gamma)\xi J_0(\xi)d\xi\,, \tag{21}$$

де функції $G_j(\xi,\gamma)$ визначаються з (13).

Вираз (21) на підставі формул (13), (19) зведемо до вигляду

$$\begin{gathered}T(\alpha,\gamma,\tau)=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}L_n(\lambda\tau)\sum_{j=0}^{n}\left\{\sum_{m=0}^{j}b_{m,j}\gamma^m\times\right.\\ \left.\times\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int_0^{\infty}\frac{J_{2k-p+1}(\xi)J_0(\xi\alpha)}{\xi^{p+1}}e^{-|\gamma|\sqrt{\lambda+\xi^2}}d\xi\right]\right\}.\end{gathered} \tag{22}$$

Коефіцієнти розвинення в ряд за Лагерром теплових потоків у всьому просторі подамо формулами

$$\begin{gathered}q_{\alpha,n}(\alpha,\gamma)=\frac{\lambda_T}{R}\sum_{j=0}^{n}\left\{\sum_{m=0}^{j}b_{m,j}\gamma^m\times\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int_0^{\infty}\frac{J_{2k-p+1}(\xi)J_1(\xi\alpha)}{\xi^p}e^{-|\gamma|\sqrt{\lambda+\xi^2}}d\xi\right]\right\};\\ q_{\gamma,n}(\alpha,\gamma)=\frac{\lambda_T}{R}\cdot sign\,\gamma\times\\ \times\sum_{j=0}^{n}\left\{\sum_{m=0}^{j}b_{m,j}\gamma^m\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int_0^{\infty}\sqrt{\lambda+\xi^2}\,\frac{J_{2k-p+1}(\xi)J_0(\xi\alpha)}{\xi^{p+1}}e^{-|\gamma|\sqrt{\lambda+\xi^2}}d\xi\right]\right\}-\\ -\frac{\lambda_T}{R}\sum_{j=0}^{n}\left\{\sum_{m=1}^{j}m\cdot b_{m,j}\gamma^{m-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int_0^{\infty}\frac{J_{2k-p+1}(\xi)J_1(\xi\alpha)}{\xi^p}e^{-|\gamma|\sqrt{\lambda+\xi^2}}d\xi\right]\right\},\end{gathered} \tag{23}$$

які залежать від параметра p, λ_T — коефіцієнт температуропровідності.

Для знаходження меж зміни параметра p будемо вимагати виконання фізичної умови неперервності радіальної складової вектора теплового потоку на краю включення $\alpha=1$

$$\lim_{\alpha\to1-0}q_\alpha(\alpha,\pm0,\tau)=\lim_{\alpha\to1+0}q_\alpha(\alpha,\pm0,\tau). \tag{24}$$

Обчислимо радіальну складову $q_{\alpha,n}(\alpha,\pm0)$ вектора теплового потоку в області $(0\le\alpha\le1)$

$$q_{\alpha,n}(\alpha,\pm0)=\frac{\lambda_T}{R}\sum_{j=0}^{n}b_{0,j}\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{\alpha\Gamma\left(k-p+\frac{3}{2}\right)F\left(k-p+\frac{3}{2},-k+\frac{1}{2},2;\alpha^2\right)}{2^p\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2)}\right]; \tag{25}$$

а в області $(1<\alpha<\infty)$ отримаємо

$$q_{\alpha,n}(\alpha,\pm 0)=\frac{\lambda_T}{R}\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{n} b_{0,j}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\Gamma\left(k-p+\frac{3}{2}\right)F\left(k-p+\frac{3}{2},k-p+\frac{1}{2},2k-p+2;\frac{1}{\alpha^2}\right)}{2^p\alpha^{2k-2p+2}\Gamma(2k-p+2)\Gamma\left(-k+p+\frac{1}{2}\right)}\right]. \quad (26)$$

Гранична рівність (24) буде виконана, якщо

$$0<p<\frac{1}{2}. \quad (27)$$

Обмеження параметра p зверху забезпечує заникання потоків тепла на нескінченності. Разом з тим відповідно до другого виразу (23) нормальна складова $q_{\gamma,n}(\alpha,\pm 0)$ вектора теплового потоку має стрибок у площині $\gamma=0$, оскільки $sign\quad \gamma=+1$ при $\gamma>0$ і $sign\quad \gamma=-1$ при $\gamma<0$.

Якщо стрибка нормальної складової $q_{\gamma,n}(\alpha,\pm 0)$ вектора теплового потоку у площині включення поза його межами немає, то це можливо тільки при $p=0$. Тоді з першої формули (23) при $p=0$ одержимо, що в площині включення $\left(0\le\alpha\le 1,\ \gamma=0\right)$

$$q_{\alpha,n}(\alpha,\pm 0)=\frac{\lambda_T}{R}\sum_{j=0}^{n} b_{0,j}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\alpha\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)F\left(k+\frac{3}{2},-k+\frac{1}{2},2;\alpha^2\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2)}\right]; \quad (28)$$

і відповідно в області $\left(1<\alpha<\infty,\ \gamma=0\right)$

$$q_{\alpha,n}(\alpha,\pm 0)=\frac{\lambda_T}{R}\sum_{j=0}^{n} b_{0,j}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)F\left(k+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2},2k+2;\frac{1}{\alpha^2}\right)}{\alpha^{2k+2}\Gamma(2k+2)\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}\right)}\right]. \quad (29)$$

Оскільки за умови $c-a-b=0$ гіпергеометрична функція Гаусса $F(a,b,c;1)$ є логарифмічно сингулярною, то таку логарифмічну особливість матимуть відповідно до подань (28), (29) функції $q_{\alpha,n}(\alpha,\pm 0)$, а, отже, потік $q_\alpha(\alpha,\pm 0,\tau)$ на краю включення при $\alpha=1$, що фізично неможливо.

Зауважимо, що нестаціонарне температурне поле, яке визначається розв'язком задачі (1)-(3) при $\tau\to\infty$ асимптотично повинно прямувати до стаціонарного температурного поля, яке можна визначити за допомогою теореми про граничне значення для інтегрального перетворення Лагерра –

$$T(\alpha,\gamma,\infty)=\lim_{\lambda\to 0} T_0(\alpha,\gamma) \quad (30)$$

Приймемо, зокрема, $f\left(\alpha^2\right) \equiv 1$ і тоді з формули (20) одержимо, що

$$a_0 = \frac{2^p T_0}{\Gamma(1-p)}, \quad a_k = 0 \quad (k = 1,2,3,\ldots) \tag{31}$$

і відповідно з формул (23) при $\gamma = 0$ в області $(0 \le \alpha \le 1)$

$$\begin{aligned} q_\alpha(\alpha, \pm 0) &= \frac{\lambda_T}{R} a_0 \frac{\alpha \Gamma\left(\frac{3}{2} - p\right) F\left(\frac{3}{2} - p, \frac{1}{2}, 2; \alpha^2\right)}{2^p \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(2)}; \\ q_\gamma(\alpha, \pm 0) &= \frac{\lambda_T}{R} \cdot a_0 \frac{\Gamma(1-p) F\left(1-p, 0; 1; \alpha^2\right)}{2^p \Gamma(2)}, \end{aligned} \tag{32}$$

а в області $(1 < \alpha < \infty)$

$$\begin{aligned} q_\alpha(\alpha, \pm 0) &= \frac{\lambda_T}{R} a_0 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} - p\right) F\left(\frac{3}{2} - p, \frac{1}{2} - p, 2 - p; \frac{1}{\alpha^2}\right)}{2^p \alpha^{2-2p} \Gamma(2-p) \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}; \\ q_\gamma(\alpha, \pm 0) &= \frac{\lambda_T}{R} \cdot a_0 \frac{\Gamma(1-p) F\left(1-p, 1-p; 2-p; \frac{1}{\alpha^2}\right)}{2^p \alpha^{2-2p} \Gamma(2-p) \Gamma(p)}. \end{aligned} \tag{33}$$

Переконаємося, що за умови (27) справді виконується гранична рівність (24). Для цього обчислимо $q_\alpha(1, \pm 0)$ в областях $(0 \le \alpha \le 1)$ і $(1 < \alpha < \infty)$ відповідно за поданнями (32), (33)

$$q_\alpha(1, \pm 0) = \frac{\lambda_T}{R} a_0 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} - p\right) \Gamma(p)}{2^p \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}; \tag{34}$$

$$q_\alpha(1, \pm 0) = \frac{\lambda_T}{R} a_0 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} - p\right) \Gamma(p)}{2^p \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}. \tag{35}$$

Однакові праві частини у виразах (34), (35), одержані за умови $p > 0$, підтверджують виконання граничної рівності (24). Якщо вимагати виконання умови $q_\gamma(\alpha, \pm 0) = 0$ поза межами включення, тобто $(1 < \alpha < \infty)$, то це можливо тільки при $p = 0$. Як видно з виразів (34), (35), потік $q_\alpha(\alpha, \pm 0)$ у точці $\alpha = 1$ при $p = 0$ матиме логарифмічну сингулярність. Такий результат фізично суперечливий.

Побудова розв'язку задачі за допомогою інтегрального перетворення Лапласа. За допомогою інтегрального перетворення Лапласа по часу початково-крайову задачу (1)-(3) зведемо до крайової задачі

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\frac{\partial T^L}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial^2 T^L}{\partial\gamma^2}-sT^L=0\,; \tag{36}$$

$$\frac{\partial T^L}{\partial\gamma}=\mp T_0 f\left(\alpha^2\right)g^L(s)\quad \forall\alpha\in[0,1)\quad \gamma=0\,; \tag{37}$$

$$\lim_{(|\alpha|,|\gamma|)\to\infty}\frac{\partial T^L(\alpha,\gamma)}{\partial\alpha}=0\,, \tag{38}$$

де введені позначення

$$T^L(\alpha,\gamma)=\int_0^\infty T(\alpha,\gamma,\tau)e^{-s\tau}d\tau\,,\ g^L(s)=\int_0^\infty g(\tau)e^{-s\tau}d\tau\,.$$

Загальний розв'язок рівняння (36), що задовольняє умову (38), запишемо у вигляді інтеграла Ханкеля

$$T^L(\alpha,\gamma)=\int_0^\infty\frac{A(\xi,s)}{\sqrt{s+\xi^2}}e^{-\sqrt{s+\xi^2}|\gamma|}\xi J_0(\xi\alpha)d\xi \tag{39}$$

з невідомою функцією $A(\xi,s)$, яка визначається з крайової умови (37).

Якщо вираз (39) підставити у крайову умову (37), то отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_0^\infty \xi A(\xi)J_0(\xi\alpha)d\xi=T_0 f\left(\alpha^2\right)g^L(s)\,, \tag{40}$$

множину розв'язків якого побудуємо за допомогою розривних інтегралів Вебера-Шафгайтліна [4]. Якщо прийняти, що

$$\xi A(\xi)=g^L(s)\sum_{k=0}^\infty a_k\frac{J_{2k-p+1}(\xi)}{\xi^p}\,, \tag{41}$$

то отримаємо функційне рівняння стосовно невідомих коефіцієнтів a_k

$$\sum_{k=0}^\infty a_k\int_0^\infty\frac{J_0(\xi\alpha)J_{2k-p+1}(\xi)}{\xi^p}=T_0 f\left(\alpha^2\right)\quad(0\le\alpha\le1)\,.$$

Обчисливши розривний інтеграл Вебера-Шафгайтліна [4], отримаємо

$$\sum_{k=0}^\infty a_k\frac{\Gamma(k-p+1)F\left(k-p+1,-k,1;\alpha^2\right)}{2^p\Gamma(k+1)}=T_0 f\left(\alpha^2\right)\,. \tag{42}$$

Рівняння (42) дають змогу визначити при заданому $f\left(\alpha^2\right)$ всі коефіцієнти a_k і тоді згідно з формулами (41) і (39) у просторі зображень за Лапласом матимемо

$$T^L(\alpha,\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{\infty} \frac{g^L(s) e^{-\sqrt{s+\xi^2}|\gamma|}}{\sqrt{s+\xi^2}} \frac{J_0(\xi\alpha) J_{2k-p+1}(\xi)}{\xi^p} d\xi . \tag{43}$$

Відповідно до теореми про згортку оригіналом зображення $\dfrac{g^L(s) e^{-\sqrt{s+\xi^2}|\gamma|}}{\sqrt{s+\xi^2}}$ є функція

$$H(\xi,\gamma,\tau) = \int_0^{\tau} G(\xi,\gamma,x) g(\tau - x) dx , \tag{44}$$

де $G(\xi,\gamma,\tau)$ — оригінал зображення $\dfrac{e^{-\sqrt{s+\xi^2}|\gamma|}}{\sqrt{s+\xi^2}}$.

Якщо функцію $g(\tau)$ подати у вигляді $g(\tau) = \left(1 - e^{-a\tau}\right)$, то формула (44) набуде вигляду

$$H(\xi,\gamma,\tau) = \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \exp\left(-\xi^2 x - \frac{\gamma^2}{4x}\right) \{1 - \exp[-a(\tau - x)]\} dx . \tag{45}$$

Тоді розв'язком початково-крайової задачі (1)–(3), враховуючи подання (45) і (43), буде функція

$$T(\alpha,\gamma,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \exp\left(-\xi^2 x - \frac{\gamma^2}{4x}\right) \{1 - \exp[-a(\tau - x)]\} dx \right\} \times \\ \times \frac{J_0(\xi\alpha) J_{2k-p+1}(\xi)}{\xi^p} d\xi.$$

Не обмежуючи міркувань, змінимо порядок інтегрування та температурне поле подамо у вигляді

$$T(\alpha,\gamma,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \{1 - \exp[-a(\tau - x)]\} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{4x}\right) \times \\ \times \left\{ \int_0^{\infty} \exp\left(-\xi^2 x\right) \frac{J_0(\xi\alpha) J_{2k-p+1}(\xi)}{\xi^p} d\xi \right\} dx. \tag{46}$$

До формули (46) застосуємо такий відомий визначений інтеграл [5, с. 732]

$$\int_0^\infty x^{\lambda+1}\exp\left(-\alpha x^2\right)J_\mu(\beta x)J_\nu(\gamma x)dx=\frac{\beta^\mu\gamma^\nu\alpha^{-\frac{\mu+\nu+\lambda+2}{2}}}{2^{\nu+\mu+1}\Gamma(\nu+1)}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^\infty\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\lambda+1\right)}{m!\Gamma(m+\mu+1)}\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^m F\left(-m,-\mu-m;\nu+1;\frac{\gamma^2}{\beta^2}\right).$$

Тоді

$$\int_0^\infty \exp\left(-\xi^2 x\right)\frac{J_0(\xi\alpha)J_{2k-p+1}(\xi)}{\xi^p}d\xi=$$
$$=\frac{x^{p-1}}{2^{2-p}\Gamma(2-p)}\sum_{m=0}^\infty\frac{\Gamma(m-p+1)}{m!\Gamma(m+1)}\left(-\frac{\alpha^2}{4x}\right)^m F\left(-m,-m;2-p;\frac{1}{\alpha^2}\right)\quad. \tag{47}$$

Використавши формулу подання поліномів Якобі [5, с. 1049]

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{\Gamma(n+1+\beta)}{n!\Gamma(1+\beta)}\frac{(x-1)^n}{2^n}F\left(-n,-n-\alpha;\beta+1;\frac{x+1}{x-1}\right),$$

визначимо гіпергеометричну функцію через поліноми Якобі з аргументом $\left(\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)$, тобто

$$F\left(-m,-m;2-p;\frac{1}{\alpha^2}\right)=\frac{m!\Gamma(2-p)}{\Gamma(m+2-p)}\left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\right)^m P_m^{(0,1-p)}\left(\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\right). \tag{48}$$

Розв'язок (46), врахувавши подання (47) і (48), виконавши певні перетворення, можна подати у вигляді

$$T(\alpha,\gamma,\tau)=$$
$$=\frac{1}{2^{2-p}}\sum_{k=0}^\infty a_k\sum_{m=0}^\infty\frac{\left(\alpha^2-1\right)^m}{(m+1-p)\Gamma(m+1)}P_m^{(0,1-p)}\left(\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)\times \tag{49}$$
$$\times\int_0^\tau\frac{x^{p-1}}{\sqrt{\pi x}}\left(\frac{1}{4x}\right)^m\{1-\exp[-a(\tau-x)]\}\exp\left(-\frac{\gamma^2}{4x}\right)dx\quad.$$

Числовий аналіз задачі та висновки. Проведено числовий аналіз задачі, на рис. 1-4 зображено залежності від часової та просторової координат нестаціонарного температурного, поля та теплового потоку. Розрахунки виконані при таких значеннях функцій і параметрів:

$$g(\tau)=\left(1-e^{-a\tau}\right),\ f\left(\alpha^2\right)=1,\ p=\frac{1}{4}.$$

На рис. 1 показано залежність нестаціонарного температурного поля залежно від відстані від дискового включення за часовою змінною τ. Зі збільшенням величини γ температура спадає. Як видно з рис., з часом температурне поле у просторі виходить на стаціонарний режим. Розрахунок нестаціонарного температурного поля виконали за формулами (22), яку одержали за допомогою інтегрального перетворення Лагерра та (49), одержаною за допомогою інтегрального перетворення Лапласа.

Поліноми Лагерра рахували за рекурентними співвідношеннями [5], а параметр λ вибирали так, щоб $1 \leq \lambda\tau \leq 5$.

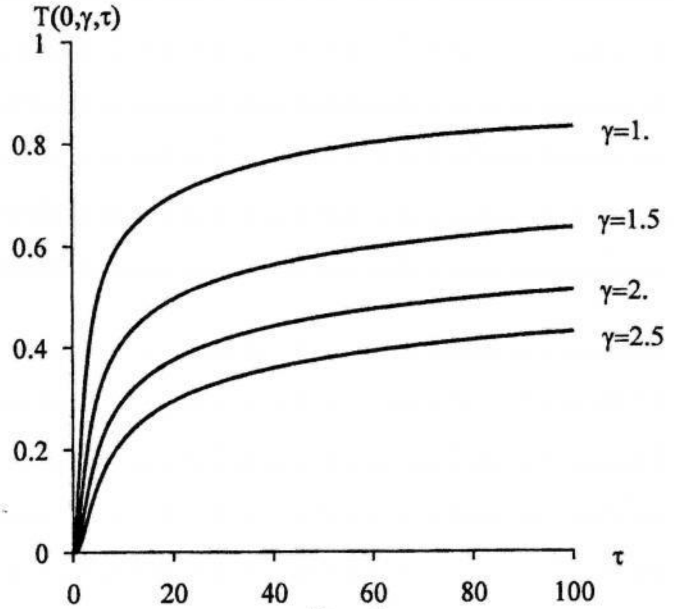

Рис. 1

За допомогою числового експерименту визначили, що при утриманні тридцяти і шестидесяти членів ряду похибка між результатами становить

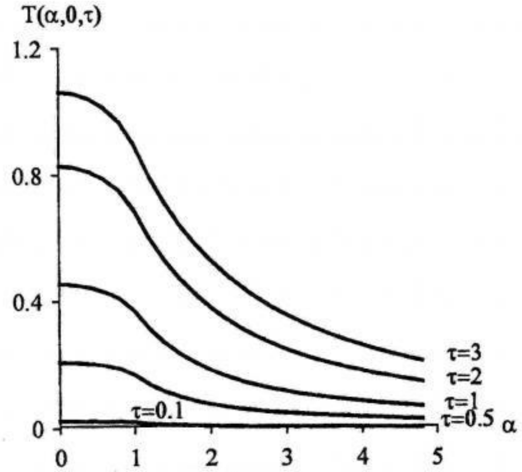

Рис. 2

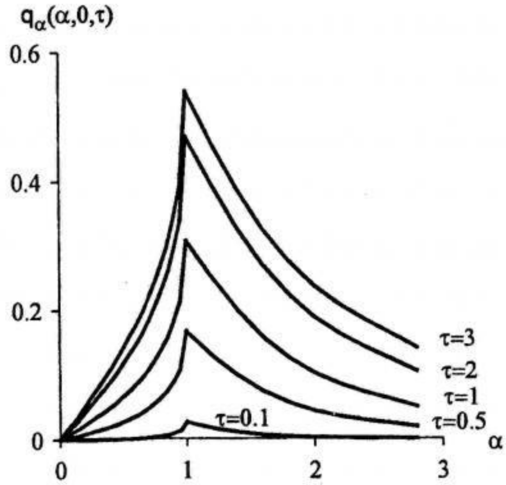

Рис. 3

близько 0,1%.

На рис. 2 зображено залежність температури в різні моменти часу τ від радіальної змінної α на поверхні включення. Температурне поле є неперервною функцією за змінною α і заникає при $\alpha \to \infty$.

Рис. 3 ілюструє залежність радіального теплового потоку на поверхні включення за змінною α. Тепловий потік є неперервною функцією за α, що забезпечується умовою неперервності теплового потоку (24) в радіальному напрямі.

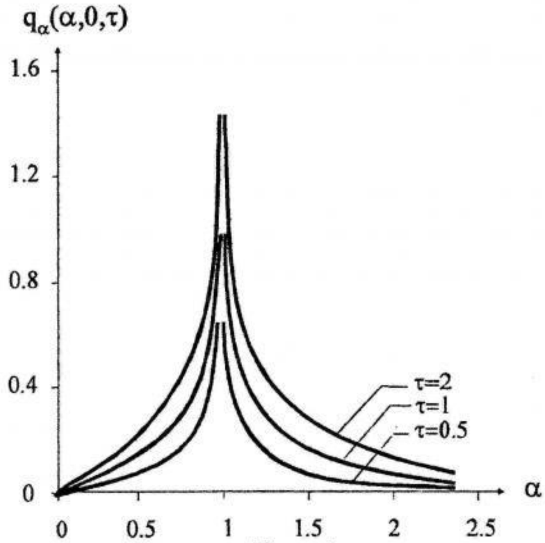

Рис. 4

На рис. 4 подано залежність теплового потоку за радіальною координатою α на поверхні включення $\gamma = 0$ за умови $q_\gamma(\alpha, \pm 0) = 0 \quad (1 < \alpha < \infty)$ при $p = 0$. З наведених результатів видно, що для такого випадку температурний потік терпить розрив другого роду на краю включення $\alpha = 1$, поза вклю-ченням є неперервною функцією і заникає за координатою α.

---

1. *Галазюк В. А.* Метод поліномів Чебишева-Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 3-7.

2. *Галазюк В. А., Горечко А. Н.* Общее решение бесконечной системы дифференциальных уравнений // Укр. матем. журнал. – 1982. – Т. 35. – № 6. – С. 742-745.

3. *Галазюк В. А., Коляно Я. Ю.* Исследование нестационарных температурных полей в телах сферической формы методом полиномов Чебышева-Лагерра // Инж.-физ. журн. – 1987. – Т. 52. – № 5. – С. 844-851.

4. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М., 1979.

5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. – М., 1963.

NONSTATIONARY WARMING UP OF SPACE DISK FUEL ELEMENT

Vitaliy Halazyuk, Viktoriya Kotsyubaylo

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

In work statement of a problem of heat conductivity for space which is warmed up disk fuel element is made. The offered technique of the decision of a problem on the basis of application of a method of integrated Laguerre transformation, and also the traditional analytical method of the decision with the help of integrated Laplace transformation on time replaceable is considered.

It is shown, that under condition $q_\gamma(\alpha,\pm 0)=0 \quad (1<\alpha<\infty)$ of a temperature stream q_α has logarithmic feature at edge of inclusion $\alpha=1$ which contradicts physics of the phenomenon. The numerical analysis of a problem is lead, on the basis of which constructed corresponding graphic dependences.

Key words: thermal streams, regularity, singularity.

Стаття надійшла до редколегії 22.09.2005
Прийнята до друку 22.11.2006