

УДК 539.3

ДВОСТОРОННІЙ ЗГИН ПЛАСТИНИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ ТА РАДІАЛЬНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

Віктор ОПАНАСОВИЧ, Микола СЛОБОДЯН

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна*

Досліджено двосторонній згин ізотропної пластини з круговим отвором і радіальною тріщиною з врахуванням контакту її берегів. Із використанням теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз контактного зусилля між берегами тріщини, коефіцієнтів інтенсивності моментів і зусиль.

Ключові слова: двосторонній згин, ізотропна пластинка, круговий отвір, радіальна тріщина, плоска задача теорії пружності, класична теорія згину, комплексні потенціали, контактне зусилля, коефіцієнти інтенсивності моментів і зусиль.

Пластини широко застосовують у машинобудуванні та інших галузях техніки. Їх дієздатність і експлуатаційні характеристики залежать від тріщиноподібних дефектів та отворів, які різко знижують діапазон допустимого навантаження. Під час експлуатації пластинчатих елементів важливо знати, як такі дефекти впливають на міцність і механічні характеристики конструкції.

Актуальною проблемою є вивчення напружено-деформованого стану пластини в умовах згину з врахуванням контакту берегів тріщиноподібних дефектів. Формулювання задач згину пластин з отворами та тріщинами і методи їх розв'язування подано в монографіях [1, 2, 5]. Проте в них не враховувався контакт берегів тріщиноподібних дефектів, хоча з фізичних міркувань зрозуміло, що він впливає на напружено-деформований стан пластини в цілому. В [8–10] розглянуто згин пластини з тріщиноподібними дефектами з врахуванням контакту її берегів, але немає досліджень, пов'язаних із взаємодією кругового отвору з прямолінійними тріщинами, береги яких контактують.

Мета нашої праці – дослідити двосторонній згин ізотропної пластини з круговим отвором і радіальною тріщиною з врахуванням контакту її берегів. Із застосуванням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведений до системи інтегральних рівнянь, яка розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Виконано числовий аналіз задачі, на основі якого побудовано відповідні графічні залежності.

Формулювання задачі. Розглянемо нескінченну ізотропну пластину завтовшки $2h$, яка містить круговий отвір радіуса R та радіальну тріщину завдовжки $2l$, які вільні від зовнішнього навантаження. Вважатимемо, що

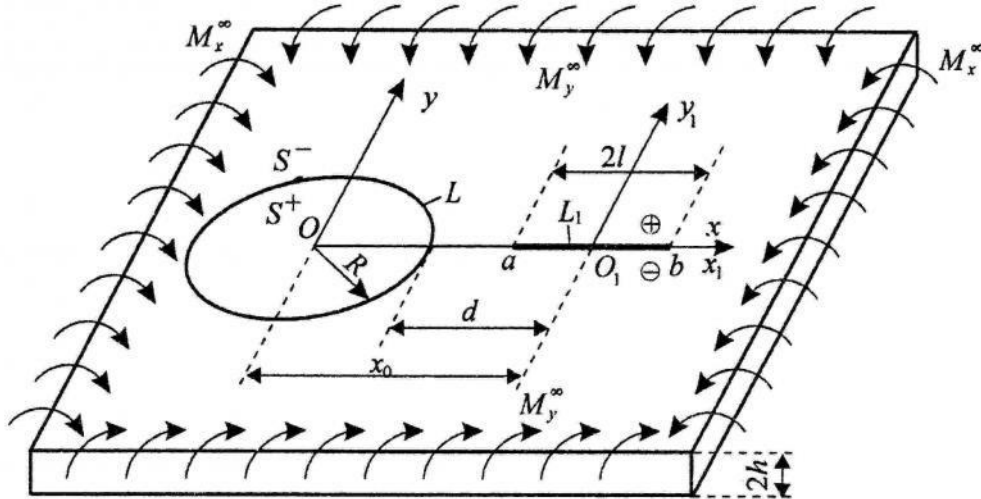


Рис. 1. Схема навантаження пластини

під дією зовнішнього навантаження на нескінченності (див. рис. 1) береги тріщини приходять у гладкий контакт по лінії на верхній основі пластини. Виберемо в серединній площині пластини початок декартової системи координат $Oxy\bar{z}$, направивши вісь $O\bar{z}$ перпендикулярно до неї, причому початок координат O збігається з центром кругового отвору. В площині Oxy введемо полярну систему координат r і θ з полюсом в точці O і полярною віссю Ox . Вважатимемо, що тріщина перебуває на осі Ox , а її центр перебуває на відстані x_0 від точки O , так що $x_0 > R + l$. Пов'яжемо з тріщиною декартову систему координат $O_1x_1y_1$. Точки площини Oxy , які збігаються з кінцями тріщини, позначимо через a і b , область в середині кругового отвору – через S^+ , зовні – через S^- , лінію, де розміщена тріщина, – через L_1 , коло – через L . Вважатимемо, що пластинка згинається на нескінченності рівномірно розподіленими моментами M_x^∞ і M_y^∞ (див. рис. 1).

На підставі контакту берегів тріщини розв'язок задачі подамо у вигляді розв'язків двох задач: задачі згину пластини та плоскої задачі за таких крайових умов

$$\sigma_{y_1y_1}^\pm = -N/(2h), \sigma_{x_1y_1}^\pm = 0, P^\pm = 0, M_{y_1}^\pm = hN,$$

$$\partial[v_{II}]/\partial x_1 + h \cdot [\partial^2 w / (\partial x_1 \partial y_1)] = 0, x_1 \in L_1, \quad (1)$$

$$M_r = 0, \sigma_r = 0, \sigma_{r\theta} = 0, P_r = 0, x \in L, \quad (2)$$

де N – контактне зусилля між берегами тріщини; $\sigma_{x_1y_1}$, $\sigma_{y_1y_1}$, σ_r і $\sigma_{r\theta}$ – компоненти тензора напружень; v_{II} – компонента вектора переміщень в плоскій задачі; $H_{r\theta}$ і $H_{x_1y_1}$ – крутні моменти; M_r і M_{y_1} – згинальні моменти; N_{y_1} і N_r – перерізувальні сили; P і P_r – узагальнені в сенсі Кірхгофа перерізувальні сили, $[f] = f^+ - f^-$; значками “+” і “-” позначено граничні значення функції при прямуванні точки площини до тріщини, коли $y_1 \rightarrow \pm 0$.

Побудова розв’язку задачі згину пластини. Введемо потенціали Колосова-Мусхелішвілі [5]

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z), \quad (3)$$

де $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$, $\Phi_1(z)$ і $\Psi_1(z)$ – голоморфні функції поза тріщиною, які зникають на нескінченності; $\Phi_2(z)$ і $\Psi_2(z)$ – голоморфні в області S^- функції, які при великих $|z|$ можна подати у вигляді [5]

$$\Phi_2(z) = \Gamma + O(1/z^2), \quad \Psi_2(z) = \Gamma' + O(1/z^2). \quad (4)$$

$$\text{Тут } \Gamma = -\frac{M_y^\infty + M_x^\infty}{4D(1+\nu)}, \quad \Gamma' = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2D(1-\nu)}, \quad D = \frac{2Q}{3(1-\nu^2)}, \quad Q = Eh^3;$$

E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона.

Якщо ввести функції [5]

$$\Omega_1(z_1) = -\bar{\Phi}_1(z_1) - z_1 \bar{\Phi}'_1(z_1) - \bar{\Psi}_1(z_1),$$

$$\Phi_2(z) = -\bar{\Phi}_2\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z} \cdot \bar{\Phi}'_2\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2} \cdot \bar{\Psi}_2\left(\frac{R^2}{z}\right), \quad z \in S^+,$$

то для визначення напружено-деформованого стану пластини отримаємо формули

$$\begin{aligned} & \Phi_1(z_1) - \Omega_1(\bar{z}_1) + (z_1 - \bar{z}_1) \cdot \overline{\Phi'_1(z_1)} + \Phi_2(z) + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \cdot \overline{\Phi_2(z)} + \\ & + \left\{ z \cdot \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cdot \overline{\Phi'_2(z)} + \frac{R^2}{z^2} \cdot \Phi_2\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) \right\} = \frac{\partial g}{\partial x}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\kappa} \cdot \Phi_1(z_1) + \Omega_1(\bar{z}_1) - (z_1 - \bar{z}_1) \cdot \overline{\Phi'_1(z_1)} + \tilde{\kappa} \cdot \Phi_2(z) - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \cdot \overline{\Phi_2(z)} - \\ & - \left\{ z \cdot \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cdot \overline{\Phi'_2(z)} + \frac{R^2}{z^2} \cdot \Phi_2\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) \right\} = f, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) - \frac{R^2}{r^2} \cdot \Phi_2\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) + \Phi_2(z) \cdot \left\{1 - \frac{R^2}{r^2}\right\} - \bar{z} \cdot \overline{\Phi_2'(z)} \cdot \left\{1 - \frac{R^2}{r^2}\right\} + \Phi_1(z_1) + \\ + \overline{\Phi_1(z_1)} \cdot \left\{1 + \frac{\bar{z}}{z} \cdot e^{2i\alpha}\right\} + \frac{\bar{z}}{z} \cdot \left\{\Omega_1(\bar{z}_1) - (z_1 - \bar{z}_1) \cdot \overline{\Phi_1'(z_1)}\right\} = \bar{g}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \bar{\kappa} \cdot \Phi_2(z) + \frac{R^2}{r^2} \cdot \Phi_2\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cdot \left\{\overline{\Phi_2(z)} - \bar{z} \cdot \overline{\Phi_2'(z)}\right\} + \bar{\kappa} \cdot \Phi_1(z_1) - \\ - \overline{\Phi_1(z_1)} \cdot \left(1 + \frac{\bar{z}}{z}\right) - \frac{\bar{z}}{z} \cdot \left\{\Omega_1(\bar{z}_1) - (z_1 - \bar{z}_1) \cdot \overline{\Phi_1'(z_1)}\right\} = \bar{f}, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$g = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y}, \quad f = m \cdot \left\{M_y + i\bar{c}'_0 + iH_{xy} + i \int_{-\infty}^t N_y(\tau) d\tau\right\}, \quad \bar{\kappa} = \frac{3 + \nu}{1 - \nu},$$

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad \bar{g} = \frac{1}{iz} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{i}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \cdot e^{i\theta} \right],$$

$$\bar{f} = m \cdot \left\{M_r + i\bar{c}' + iH_{r\theta} + i \int_0^s N_n ds\right\}, \quad m = -\frac{1}{D(1 - \nu)},$$

де \bar{c}'_0, \bar{c}' – дійсні сталі.

Для функції $\Phi_2(z)$ правильне подання [5]

$$\Phi_2(z) = B_0(z) + O(1), \quad |z| \rightarrow 0, \quad B_0(z) = \frac{\bar{\Gamma}' R^2}{z^2}. \quad (9)$$

На основі крайової задачі (1) та залежності (6) отримаємо задачу лінійного спряження

$$(\bar{\kappa} \cdot \Phi_1(x_1) - \Omega_1(x_1))^+ - (\bar{\kappa} \cdot \Phi_1(x_1) - \Omega_1(x_1))^- = 0, \quad x_1 \in L_1,$$

розв'язавши яку, матимемо

$$\Omega_1(z_1) = \bar{\kappa} \cdot \Phi_1(z_1). \quad (10)$$

Функцію $\Phi_1(z_1)$ згідно з [2] можна подати у вигляді

$$\Phi_1(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{-l}^l \frac{y_1(t)}{t - z_1} dt. \quad (11)$$

Тут $y_1(x) = \frac{1}{1 + \bar{\kappa}} \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial x} \right]$.

Якщо ввести функцію

$$F(z) = \begin{cases} \Phi_2(z) + \tilde{\kappa} \cdot \Phi_1(z - x_0) - ic', & z \in S^+, \\ -\tilde{\kappa} \cdot \Phi_2(z) + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \cdot \bar{\Phi}_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) + \\ + \frac{R^2}{z^2} \cdot \left[\tilde{\kappa} \cdot \Phi_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) - \left(z - x_0 - \left(\frac{R^2}{z} - x_0\right)\right) \cdot \bar{\Phi}_1'\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) \right], & z \in S^-, \end{cases} \quad (12)$$

то вона, на підставі співвідношень (2) та формули (8), задовольняє задачу лінійного спряження

$$F^+(t) - F^-(t) = 0, \quad t \in L. \quad (13)$$

Враховавши залежності (4) і (9), розв'язок задачі лінійного спряження (13) можна подати у вигляді

$$F(z) = \frac{\bar{\Gamma}' R^2}{z^2} - \tilde{\kappa} \cdot \Gamma + B, \quad \text{де } B = \frac{i}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\overline{y_1(t)}}{t + x_0} dt. \quad (14)$$

Враховуючи (14), на підставі співвідношення (12) можемо записати

$$\Phi_2(z) = \begin{cases} \frac{\bar{\Gamma}' \cdot R^2}{z^2} - \tilde{\kappa} \cdot \Gamma + B - \tilde{\kappa} \cdot \Phi_1(z - x_0) + ic', & z \in S^+, \\ \frac{1}{\tilde{\kappa}} \cdot \left[-\frac{\bar{\Gamma}' \cdot R^2}{z^2} + \tilde{\kappa} \cdot \Gamma - B + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \cdot \bar{\Phi}_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) + \right. \\ \left. + \frac{R^2}{z^2} \cdot \left[\tilde{\kappa} \cdot \Phi_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) - \left(z - x_0 - \left(\frac{R^2}{z} - x_0\right)\right) \cdot \bar{\Phi}_1'\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) \right] \right], & z \in S^-. \end{cases} \quad (15)$$

З крайових умов (1) та формули (6) матимемо

$$\begin{aligned} & \tilde{\kappa} \cdot \Phi_1^+ + \tilde{\kappa} \cdot \Phi_1^- + \tilde{\kappa} \cdot \Phi_2(x_0 + x_1) - \left(1 + \frac{R^2}{(x_0 + x_1)^2}\right) \cdot \overline{\Phi_2(x_0 + x_1)} - \\ & - \left[\left((x_0 + x_1) - \frac{R^2}{(x_0 + x_1)} \right) \cdot \overline{\Phi_2'(x_0 + x_1)} + \right. \\ & \left. + \frac{R^2}{(x_0 + x_1)^2} \cdot \Phi_2\left(\frac{R^2}{x_0 + x_1}\right) \right] = ic'_0 + m \cdot M_y, \quad x_1 \in L_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Враховавши залежності (11), (15), на підставі формули (16) отримаємо інтегральне рівняння для знаходження невідомої функції $y_1(t)$, яке в безрозмірних координатах матиме вигляд

$$i \cdot \int_{-1}^1 \{Y_1(\eta) \cdot K(\eta, \xi) + \overline{Y_1(\eta)} \cdot L(\eta, \xi)\} d\eta - \frac{\varepsilon^2 \cdot i \cdot c'}{X^2} =$$

$$= i \cdot c'_0 + \tilde{m} \cdot M_y / M_y^\infty + P(\xi) \quad \xi \in [-1, 1], \quad (17)$$

де

$$P(\xi) = -\tilde{\kappa}A + \frac{\varepsilon^2 \tilde{B}}{X^2} + A - \frac{\varepsilon^2 \tilde{B}}{\tilde{\kappa}X^2} - \frac{\varepsilon^4 \tilde{B}}{\tilde{\kappa}X^4} + \frac{\varepsilon^2 A}{X^2} + \frac{2\tilde{B}\varepsilon^2}{\tilde{\kappa}} \cdot \frac{X^2 - \varepsilon^2}{X^4} + \tilde{B} - \frac{\tilde{\kappa}\varepsilon^2 A}{X^2},$$

$$K(\eta, \xi) = -\frac{1}{\pi} \cdot \left\{ \frac{\tilde{\kappa}}{\eta - \xi} + \frac{\lambda\varepsilon^2}{2} \cdot \left(\frac{2\tilde{\kappa}}{X(TX - \varepsilon^2)} + \frac{1}{\tilde{\kappa}} \cdot \frac{\varepsilon^2 - T^2}{T(TX - \varepsilon^2)^2} + \frac{1}{\tilde{\kappa}} \cdot \frac{(\varepsilon^2 - T^2) \cdot (2TX^3 - 3\varepsilon^2 TX + \varepsilon^4)}{TX^2 (\varepsilon^2 - TX)^3} \right) \right\},$$

$$L(\eta, \xi) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda\varepsilon^2}{2} \cdot \left\{ \frac{T^2 - \varepsilon^2}{T(TX - \varepsilon^2)^2} - \frac{1}{X(TX - \varepsilon^2)} - \frac{1}{TX^2} + \frac{X^2 \cdot (2TX - \varepsilon^2) - 3\varepsilon^2 TX + 2\varepsilon^4}{X^3 (TX - \varepsilon^2)^2} \right\},$$

$$y_1(t) = \frac{M_y^\infty}{Q} \cdot Y_1(t), \quad Y_1(t) = Y_{11}(t) + iY_{12}(t), \quad A = -\frac{\rho + 1}{4\tilde{D}(1 + \nu)},$$

$$\tilde{B} = \frac{1 - \rho}{2} \cdot \tilde{m}, \quad \tilde{D} = \frac{2}{3(1 - \nu^2)}, \quad \tilde{m} = -\frac{1}{\tilde{D} \cdot (1 - \nu)}, \quad \rho = \frac{M_x^\infty}{M_y^\infty}, \quad t = l\eta,$$

$$x_1 = l\xi, \quad \lambda = l/d, \quad \varepsilon = R/d, \quad T = 1 + \varepsilon + \lambda\eta, \quad X = 1 + \varepsilon + \lambda\xi,$$

$Y_{11}(t)$ і $Y_{12}(t)$ – дійсні функції.

Взявши уявну та дійсну частину від (17) та врахувавши (1), отримаємо

$$\int_{-1}^1 \{Y_{11}(\eta) \cdot (K(\eta, \xi) + L(\eta, \xi))\} d\eta - \frac{\varepsilon^2 \cdot c'}{X^2} = c'_0, \quad \xi \in [-1, 1], \quad (18)$$

$$\int_{-1}^1 \{Y_{12}(\eta) \cdot (-K(\eta, \xi) + L(\eta, \xi))\} d\eta = \tilde{m} \cdot h \cdot N / M_y^\infty + P(\xi), \quad \xi \in [-1, 1]. \quad (19)$$

Рівняння (18) і (19) доповнюємо додатковими умовами

$$\int_{-1}^1 Y_1(\eta) d\eta = 0, \quad \int_{-1}^1 \eta \cdot Y_{11}(\eta) d\eta = 0, \quad (20)$$

які виражають собою, відповідно, однозначність кутів повороту і прогину пластини при обході контуру тріщини.

Для знаходження сталої c' скористаємося однозначністю прогину пластини при обході кругового отвору

$$c' = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\lambda Y_{11}(\eta) d\eta}{T}. \quad (21)$$

Побудова розв'язку плоскої задачі. Введемо в розгляд комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі $\Phi_{II}(z)$ і $\Psi_{II}(z)$, які подамо у вигляді

$$\Phi_{II}(z) = \Phi_{1II}(z) + \Phi_{2II}(z), \quad \Psi_{II}(z) = \Psi_{1II}(z) + \Psi_{2II}(z), \quad (22)$$

де $\Phi_{1II}(z)$ і $\Psi_{1II}(z)$ – голоморфні функції поза тріщиною і зникають на нескінченності; $\Phi_{2II}(z)$ і $\Psi_{2II}(z)$ – голоморфні ззовні кола і при великих $|z|$ можна подати у вигляді

$$\Phi_{2II}(z) = O(1/z^2), \quad \Psi_{2II}(z) = O(1/z^2). \quad (23)$$

Ввівши функції [4]

$$\Phi_{2II}(z) = -\bar{\Phi}_{2II}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z} \bar{\Phi}'_{2II}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2} \bar{\Psi}_{2II}\left(\frac{R^2}{z}\right),$$

$$\Omega_{1II}(z_1) = \bar{\Phi}_{1II}(z_1) + z_1 \bar{\Phi}'_{1II}(z_1) + \bar{\Psi}_{1II}(z_1),$$

напружено-деформований стан пластини знайдемо на основі формул

$$\begin{aligned} \Phi_{2II}(z) - \frac{R^2}{r^2} \bar{\Phi}_{2II}\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) + \Phi_{2II}(z) \left\{1 - \frac{R^2}{r^2}\right\} - \bar{z} \cdot \overline{\Phi'_{2II}(z)} \left\{1 - \frac{R^2}{r^2}\right\} + \Phi_{1II}(z_1) + \\ + \overline{\Phi_{1II}(z_1)} \cdot \left\{1 + \frac{\bar{z}}{z}\right\} - \frac{\bar{z}}{z} \cdot \left\{\Omega_{1II}(\bar{z}_1) + (z_1 - \bar{z}_1) \cdot \overline{\Phi'_{1II}(z_1)}\right\} = \sigma_{rr} + i \cdot \sigma_{r\theta}, \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa \Phi_{2II}(z) + \frac{R^2}{r^2} \cdot \bar{\Phi}_{2II}\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \left\{1 - \frac{R^2}{r^2}\right\} \left\{\overline{\Phi_{2II}(z)} - \bar{z} \cdot \overline{\Phi'_{2II}(z)}\right\} + \kappa \Phi_{1II}(z_1) - \\ - \overline{\Phi_{1II}(z_1)} \cdot \left(1 + \frac{\bar{z}}{z}\right) + \frac{\bar{z}}{z} \cdot \left\{\Omega_{1II}(\bar{z}_1) + (z_1 - \bar{z}_1) \cdot \overline{\Phi'_{1II}(z_1)}\right\} = \frac{2\mu}{iz} \cdot \frac{\partial(u + i \cdot v)}{\partial\theta}, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\Phi_{1II}(z_1) + \Omega_{1II}(\bar{z}_1) + (z_1 - \bar{z}_1) \cdot \overline{\Phi'_{1II}(z_1)} + \Phi_{2II}(z) + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \cdot \overline{\Phi_{2II}(z)} +$$

$$+ \left\{ z \cdot \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cdot \overline{\Phi'_{2\Pi}(z)} + \frac{R^2}{z^2} \cdot \Phi_{2\Pi} \left(\frac{R^2}{z} \right) \right\} = \sigma_{yy} - i \cdot \sigma_{xy}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \kappa \Phi_{1\Pi}(z_1) - \Omega_{1\Pi}(\bar{z}_1) - (z_1 - \bar{z}_1) \overline{\Phi'_{1\Pi}(z_1)} + \kappa \Phi_{2\Pi}(z) - \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right) \overline{\Phi_{2\Pi}(z)} - \\ & - \left\{ z \cdot \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cdot \overline{\Phi'_{2\Pi}(z)} + \frac{R^2}{z^2} \cdot \Phi_{2\Pi} \left(\frac{R^2}{z} \right) \right\} = 2\mu \cdot (u + i \cdot v)'_x, \end{aligned} \quad (27)$$

де $\mu = E/(2(1 + \nu))$ – модуль зсуву; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$.

Аналогічно до задачі згину пластини, на основі формул (22)–(27) і граничних умов (1), (2) можна отримати співвідношення

$$\Phi_{1\Pi}(z) = \Omega_{1\Pi}(z), \quad (28)$$

$$\Phi_{1\Pi}(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{g'_1(t)}{t - z_1} dt, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{2\Pi}(z) = & \begin{cases} B_{\Pi} + \Phi_{1\Pi}(z - x_0), & z \in S^+, \\ B_{\Pi} - \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right) \cdot \overline{\Phi_{1\Pi} \left(\frac{R^2}{z} - x_0 \right)} + \\ & + \frac{R^2}{z^2} \cdot \left[\Phi_{1\Pi} \left(\frac{R^2}{z} - x_0 \right) + \left(z - x_0 - \left(\frac{R^2}{z} - x_0 \right) \right) \cdot \overline{\Phi'_{1\Pi} \left(\frac{R^2}{z} - x_0 \right)} \right], & z \in S^-, \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\text{де } g'(x_1) = \frac{2\mu}{i \cdot (1 + \kappa)} \cdot \left[\frac{\partial(u + iv)}{\partial x_1} \right], \quad B_{\Pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-1}^1 \frac{\overline{g'(t)}}{t + x_0} dt.$$

Враховавши (28) та формулу (26), на підставі крайової умови (1) можемо записати вираз для контактного зусилля між берегами тріщини

$$\begin{aligned} -N/h = & 2\Phi_{1\Pi}^+(x_1) + 2\Phi_{1\Pi}^-(x_1) + 2\Phi_{2\Pi}(z) + \\ & + 2 \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right) \cdot \overline{\Phi_{2\Pi}(z)} + 2z \cdot e^{-2i\alpha} \cdot \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cdot \overline{\Phi'_{2\Pi}(z)} + \frac{2R^2}{z^2} \cdot \Phi_{2\Pi} \left(\frac{R^2}{z} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Взявши до уваги вираз для функції $\Phi_{1\Pi}(z)$ (29) та $\Phi_{2\Pi}(z)$ (30), для знаходження невідомої функції $g'_1(t)$ з формули (31) отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_{-1}^1 \{ G_1(\eta) \cdot R(\eta, \xi) + \overline{G_1(\eta)} \cdot S(\eta, \xi) \} d\eta = H(\xi), \quad \xi \in [-1, 1], \quad (32)$$

де

$$R(\eta, \xi) = \frac{1}{\eta - \xi} + \frac{\lambda \varepsilon^2}{2} \left(\frac{1}{X(TX - \varepsilon^2)} + \frac{\varepsilon^2 - T^2}{T(TX - \varepsilon^2)^2} + \frac{(\varepsilon^2 - T^2)(2TX^3 - 3\varepsilon^2TX + \varepsilon^4) - TX(\varepsilon^2 - TX)^2}{TX^2(\varepsilon^2 - TX)^3} \right),$$

$$S(\eta, \xi) = \frac{\lambda \varepsilon^2}{2} \cdot \left[\frac{\varepsilon^2 - T^2}{T(TX - \varepsilon^2)^2} + \frac{1}{X(TX - \varepsilon^2)} + \frac{1}{TX^2} - \frac{X^2 \cdot (2TX - \varepsilon^2) - 3\varepsilon^2TX + 2\varepsilon^4}{X^3(TX - \varepsilon^2)^2} \right],$$

$$H(x) = -0.5\pi \cdot hN/M_y^\infty, \quad g_1(t) = \frac{M_y^\infty}{h^2} \cdot G_1(t), \quad G_1(t) = G_{11}(t) + iG_{12}(t),$$

причому $G_{11}(t)$ і $G_{12}(t)$ – дійсні функції.

Зауважимо, що ядра $R(\eta, \xi)$ і $S(\eta, \xi)$ збігаються з відповідними ядрами, отриманими в [3] іншим підходом. Крім того, якщо формально прийняти $\tilde{\kappa} = 1$, то ядра інтегральних подань (17) і (32) зв'язані залежностями $\pi \cdot L(\eta, \xi) = -S(\eta, \xi)$ і $\pi \cdot K(\eta, \xi) = -R(\eta, \xi)$.

Виділивши уявну та дійсну частину у (32), матимемо

$$\int_{-1}^1 \{G_{12}(\eta) \cdot (R(\eta, \xi) - S(\eta, \xi))\} d\eta = 0, \quad \xi \in [-1, 1], \quad (33)$$

$$N(\xi)/M_y^\infty = -2 \cdot (\pi \cdot h)^{-1} \cdot \int_{-1}^1 \{G_{11}(\eta) \cdot (R(\eta, \xi) + S(\eta, \xi))\} d\eta, \quad \xi \in [-1, 1]. \quad (34)$$

Зауважимо, що на підставі співвідношень (1) функції $Y_{12}(\eta)$ і $G_{11}(\eta)$ пов'язані співвідношенням

$$G_{11}(\eta) + \frac{(1 + \tilde{\kappa})}{(1 + \kappa) \cdot (1 + \nu)} Y_{12}(\eta) = 0, \quad \eta \in [-1, 1]. \quad (35)$$

Враховувши формули (19) і (34), з крайової умови (1) отримаємо рівняння

$$\int_{-1}^1 \{Y_{12}(\eta) (-K(\eta, \xi) + L(\eta, \xi))\} d\eta +$$

$$+2 \cdot \pi^{-1} \cdot \tilde{m} \cdot \int_{-1}^1 \{G_{11}(\eta) \cdot (R(\eta, \xi) + S(\eta, \xi))\} d\eta = P(\xi), \quad \xi \in [-1, 1]. \quad (36)$$

Враховуючи умову однозначності переміщень при обході контуру тріщини, матимемо

$$\int_{-1}^1 G_1(\eta) d\eta = 0. \quad (37)$$

Отож, для знаходження невідомих функцій $Y_1(\eta)$ і $G_1(\eta)$ отримали систему інтегральних рівнянь (18), (20), (21), (33), (35)-(37).

Числовий аналіз задачі та висновки. Отримана система інтегральних рівнянь розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур [3] і зведена до такої системи лінійних алгебричних рівнянь стосовно невідомих $U_{ij}(\eta_m)$, ($m = \overline{1, M}$, $i, j = 1, 2$), c' , c'_0

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M U_{11}(\eta_m) \cdot (K(\eta_m, \xi_r) + L(\eta_m, \xi_r)) - \frac{\varepsilon^2 \cdot c'}{X_r^2} &= c'_0, \quad r = \overline{1, M-1}, \\ \sum_{m=1}^M U_{11}(\eta_m) &= 0, \quad \sum_{m=1}^M U_{12}(\eta_m) = 0, \quad \sum_{m=1}^M \eta_m U_{11}(\eta_m) = 0, \\ c' &= -\frac{\lambda}{2M} \sum_{m=1}^M \frac{U_{11}(\eta_m)}{T_m}, \quad \sum_{m=1}^M U_{21}(\eta_m) = 0, \quad \sum_{m=1}^M U_{22}(\eta_m) = 0, \\ \sum_{m=1}^M U_{21}(\eta_m) \cdot (R(\eta_m, \xi_r) - S(\eta_m, \xi_r)) &= 0, \quad r = \overline{1, M-1}, \\ U_{21}(\xi_r) + \frac{1 + \tilde{\kappa}}{(1 + \kappa)(1 + \nu)} \cdot U_{12}(\xi_r) &= 0, \quad r = \overline{1, M-1}, \\ \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M \{U_{12}(\eta_m) \cdot (-K(\eta_m, \xi_r) + L(\eta_m, \xi_r)) + \\ + \frac{2\tilde{m}}{\pi} U_{21}(\eta_m) \cdot (R(\eta_m, \xi_r) + S(\eta_m, \xi_r))\} &= P(\xi_r), \end{aligned} \quad (38)$$

де $\eta_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi$, $\xi_r = \cos \frac{\pi \cdot r}{M}$, $T_m = 1 + \varepsilon + \lambda \eta_m$, $X_r = 1 + \varepsilon + \lambda \xi_r$,

$$Y_{1i}(\eta) = \frac{U_{1i}(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}, \quad G_{1i}(\eta) = \frac{U_{2i}(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}, \quad i = 1, 2.$$

Виконали числовий аналіз задачі, який подано на рис. 2-5.

Якщо вважати, що кругового отвору немає ($\varepsilon = 0$) або тріщина перебуває на нескінченності ($\lambda = 0, \varepsilon = 0$), то приходимо до результатів праці [8], якщо у формулі (6) спрямувати $R \rightarrow \infty$ і прийняти $B_0(z) = 0$, то отримаємо результати праці [9].

На рис. 2 зображено графічну залежність приведенного контактного зусилля $N^* = hN/M_y^\infty$ між берегами тріщини від безрозмірної координати $\xi = x_1/l$ при $\nu = 0,3, R = l$ та $M_x^\infty = 0$. Кривій 1 відповідає контактний тиск N^* при $\lambda = 1/1,1$, кривій 2 – при $\lambda = 1/1,2$, кривій 3 – при $\lambda = 1/1,4$, кривій 4 – при $\lambda = 1/1,6$, кривій 5 – при $\lambda = 1/2$, кривій 6 – при $\lambda = 1/5$, кривій 7 – при $\lambda = 1/10$, кривій 8 – при $\lambda = 0$ [8]. Як видно з рис.,

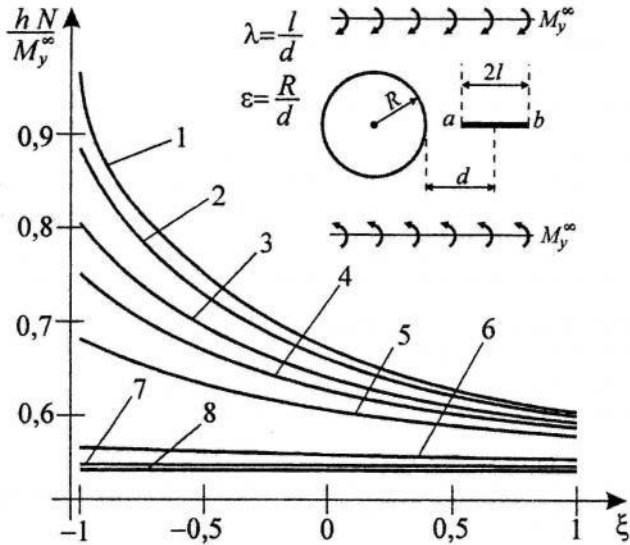


Рис. 2

при наближенні тріщини до кругового отвору величина контактного зусилля N^* збільшується порівняно з ізольованою тріщиною, в ближній до отвору вершині a ($\xi = -1$) він більший, ніж у дальній вершині b ($\xi = 1$).

Наведені коефіцієнти інтенсивності моментів (КИМ) K_M обчислювали за формулою

$$K_M^* = \frac{K_M}{M_y^\infty \sqrt{l}} = \mp \frac{2i(3+\nu)}{3(1-\nu^2)} \cdot u(\pm 1),$$

$$\text{де } u(1) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} U_{12}(\eta_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi,$$

$$u(-1) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+M} U_{12}(\eta_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi.$$

Графічні залежності K_M^* від параметра $\rho = M_x^\infty/M_y^\infty$ зображені відповідно у вершині a (рис. 3, а) та b (рис. 3, б) при $\nu = 0,3, \lambda = 0,8$. Криві 1 побудовані при $\varepsilon = 0$ [8], криві 2 – при $\varepsilon = 0,1$, криві 3 – при $\varepsilon = 0,5$, криві 4 – при $\varepsilon = 1$, криві 5 – при $\varepsilon = 2$. На основі рис. 3, а

можна стверджувати, що при $\varepsilon < 0,4515$ КІМ у точці a спадають з ростом ρ , а при $\varepsilon > 0,4515$ - зростають. Із рис. 3, б бачимо, що у точці b КІМ

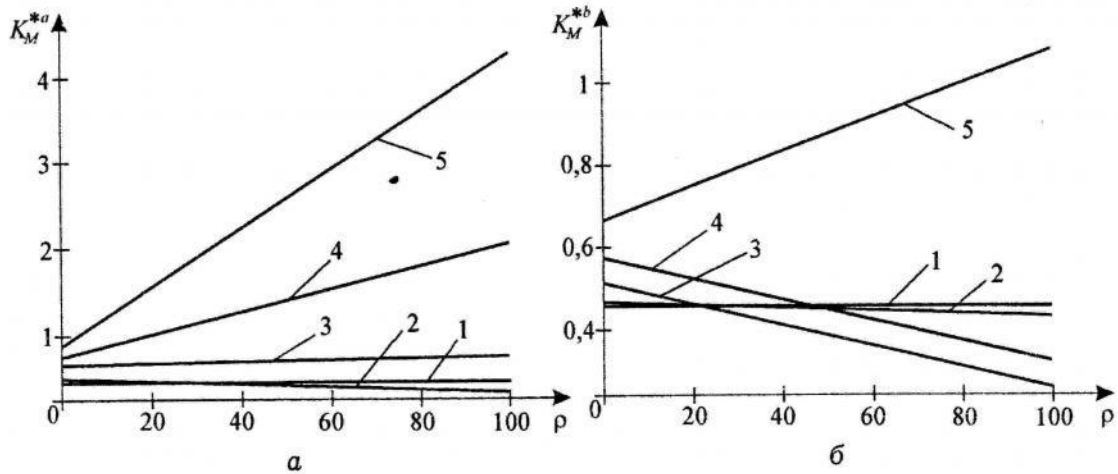


Рис. 3

спадають при $\varepsilon < 1,475$ при збільшенні ρ , а вже при $\varepsilon > 1,475$ - зростають. Зауважимо, що КІМ у точці a є більшими, ніж у точці b . Крім того, наявність кругового отвору приводить до впливу згинальних моментів M_x^∞ на КІМ, чого не простежується у випадку ізольованої тріщини.

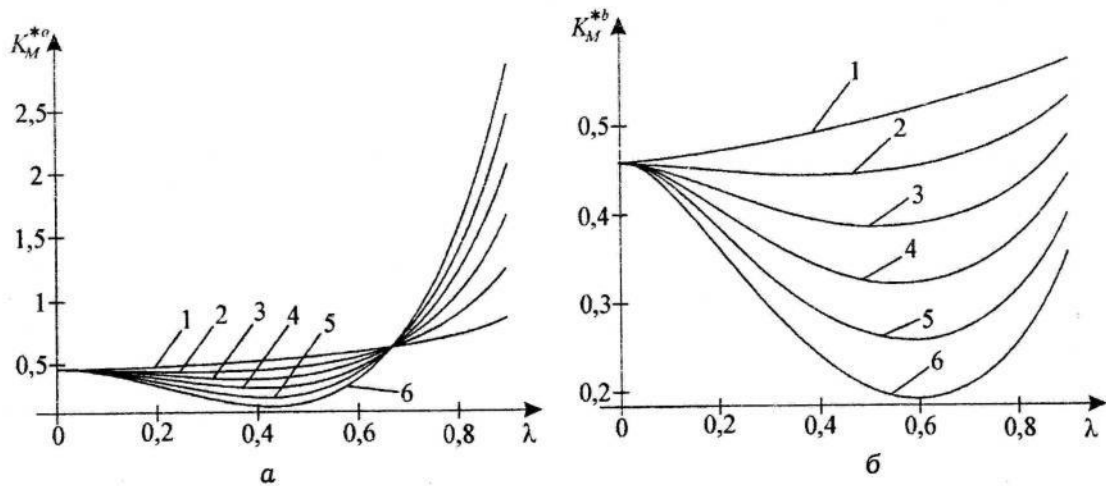


Рис. 4

На рис. 4 подано графічну залежність приведених КІМ у вершинах a і b при зміні відстані між тріщиною та круговим отвором для $\nu = 0,3$ і $\varepsilon = \lambda$. Криві 1 побудовані для $\rho = 0$, криві 2 - для $\rho = 20$, криві 3 - для $\rho = 40$, криві 4 - для $\rho = 60$, криві 5 - для $\rho = 80$, криві 6 - для $\rho = 100$. Як видно з рис. 4, а, при $\lambda = 0$ і $\lambda \approx 0,67$ значення КІМ не залежить від M_x^∞ . Крім того, можна стверджувати, що при наближенні тріщини до кругового отвору КІМ спочатку спадають, їхні значення менші, ніж у випадку, коли

отвору немає, а потім починають зростати. Зауважимо, що коефіцієнти інтенсивності зусиль $K_N^* = K_N / (M_y^\infty \sqrt{l})$ і моментів K_M^* пов'язані між собою залежністю $K_N^* / K_M^* = 3(1 + \nu) / (3 + \nu)$, тому графічні залежності для K_N^* не наводимо.

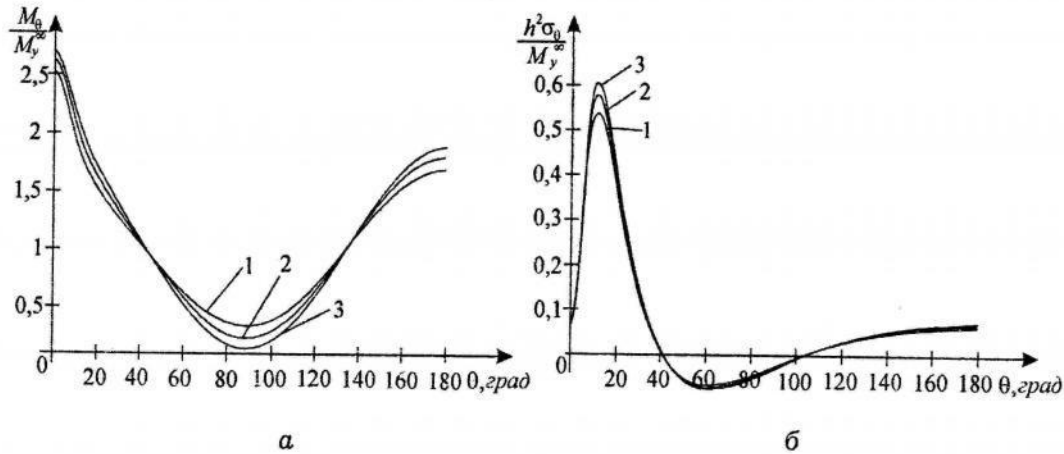


Рис. 5

На рис. 5 зображено графічні залежності M_θ / M_y^∞ (рис. 5, а) і $h^2 \sigma_\theta / M_y^\infty$ (рис. 5, б) на круговому отворі від полярного кута θ при $\varepsilon = 1$, $\lambda = 0,8$ і $M_x^\infty = 0$. Криві 1 побудовані при $\nu = 0$, криві 2 – при $\nu = 0,25$, криві 3 – при $\nu = 0,5$. Як видно з рис. 5, а, момент M_θ на отворі набуває свого максимального значення в точці кругового отвору, яка найближча до тріщини, і мінімального значення – при $\theta \approx 90^\circ$. З рис. 5, б, видно, що напруження σ_θ найбільші при $\theta \approx 14^\circ$, найменші – при $\theta \approx 62^\circ$, причому вони міняють знак. У граничному випадку при $\lambda = 0$ отримуємо відомі результати [5]. На основі рис. 5 можна стверджувати, що момент M_θ і напруження σ_θ на отворі від коефіцієнта Пуассона майже не залежать.

1. Бережницький Л. Т., Делявський М. В., Панасюк В. В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – К., 1979.
2. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К., 1981.
3. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К., 1976.
4. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. – Минск, 1962.

5. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит. – Минск, 1975.
6. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966.
7. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х т. / Пер. с англ. Под ред. Ю. Мураками. – М., 1990.
8. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами. Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1988. – № 7. – С. 49–51.
9. Шацький І. П., Перепічка В. В. Згин напівнескінченної пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами. Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1992. – Т. 28. – № 2. – С. 54–58.
10. Шацький І., Перепічка В., Даляк Т., Щербій А. Задачі теорії пластин та оболонки із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах // Матем. проблеми механіки неоднорідних структур: В 2-х т. – Львів, 2000. – Т. 2. – С. 51–54.

**BILATERAL BENDING OF THE PLATE WITH A CIRCULAR
ORIFICE AND A RADIAL CRACK WITH CONSIDERING
OF THE CONTACT IT'S SHORES**

Viktor Opanasovych, Mikola Slobodyan

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

The bilateral bending of an isotropic plate with a circular orifice and a radial crack with considering of the contact it's shores is investigated. With application of methods of the theory of functions of complex variable and complex potentials the solution of a problem is shown to a system of integral equations, which is solved by numerical method with the help of method of mechanical quadratures. The numerical analysis of a problem is conducted, because of which are constructed of graphic dependence of contact pressure, coefficients intensity moment and efforts.

Key words: bilateral bending, isotropic plate, circular orifice, radial crack, two-dimensional problem of the theory of elasticity, classical theory of bend, complex potentials, contact pressure, coefficients intensity moment and efforts.

Стаття надійшла до редколегії 03.11.2005
Прийнята до друку 22.11.2006