

УДК 539.3

ПЛАСТИЧНЕ ВІДШАРОВУВАННЯ ПІД ЧАС ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ ЖОРСТКОГО ПРЯМОКУТНОГО ВКЛЮЧЕННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ВЕЛИКОЮ ЗАТРИМКОЮ ТЕКУЧОСТІ

Георгій СУЛИМ, Марта КРИВЕНЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000 Львів, Україна

Досліджено напружено-деформований стан і розвиток смуг пластичності за поздовжнього зсуву пружно-пластичного середовища з великою затримкою текучості, що містить жорстке включення прямокутного перерізу. Показано, що на відміну від ідеального пружно-пластичного середовища, обов'язково з'являються пластичні смуги в матеріалі матриці, довжина яких виявилась набагато меншою, ніж у смугах, які оточують включення.

Ключові слова: антиплоска деформація, прямокутник, пружно-пластичний матеріал, зуб пластичності, смуги пластичності, відшарування.

Дослідження розвитку пластичних смуг (ПС) під час зсуву поблизу тріщин і безмежно тонких жорстких включень у середовищі з затримкою текучості (із зубом пластичності на діаграмі напруження-деформація матеріалу) свідчать, що кількість смуг, які розвиваються від точок найвищої концентрації напружень, так само, як і кути між ними, визначаються величиною затримки текучості (висотою зуба): чим більша

затримка, тим менша кількість смуг [1, 2].

Згадані дослідження напружено-деформованого стану та розвитку пластичних деформацій стосуються випадку безмежно тонкого включення і мають обмежене практичне значення, більший інтерес становить вивчення включень скінченної товщини, оскільки зі зменшенням товщини з нього у граничному випадку повинен бути отриманий випадок включення безмежно тонкого.

У випадку поздовжнього зсуву тіла з включенням прямокутного перерізу однією з можливих форм розвитку пластичних деформацій є відшаровування матриці, тобто локалізація пластичних деформацій на межі включення-середовище. Однак з причини, яку з'ясовано далі, вважати пластичні

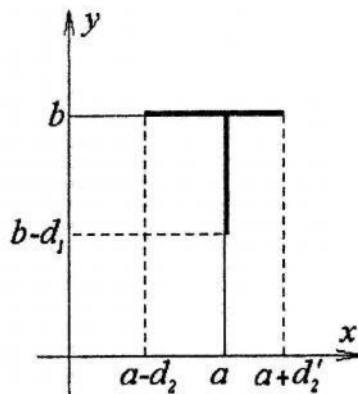


Рис. 1.

Схема розвитку пластичних смуг біля однієї з вершин включення

деформації локалізованими лише на межі включення-середовище не можна. Треба допускати виникнення додаткових смуг усередині матриці.

У цій праці розглянемо випадок, коли поза вершинами включення прямолінійно продовжуються горизонтальні смуги (рис. 1) та з'ясуємо умови, за яких така схема розвитку пластичних деформацій буде обґрунтованою. Сформулюємо задачу дослідження розвитку ПС від вершин жорсткого включення $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ в ідеальному пружно-пластичному середовищі з нижнім порогом текучості k_0 і верхнім k та знаходження довжин вертикальної d_1 і горизонтальних d_2 , d_2' ПС залежно від величини прикладеного на нескінченності навантаження $\tau_{yz} = \tau_\infty$, $\tau_{xz} = 0$. Величину затримки текучості $k - k_0$ вважатимемо достатньою для виникнення такої схеми пластичних деформацій.

Формалізація задачі. Крайова задача у напруженнях у першому квадранті площини Oxy поза включенням і поза ПС (область D) є такою:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(0, y) &= 0 \quad (y > b), \quad \tau_{xz}(x, b) = 0 \quad (0 < x < a - d_1), \\ \tau_{yz}(x, b) &= k_0 \quad (a - d_2 \leq x \leq a + d_2'), \quad \tau_{xz}(a, y) = k_0 \quad (b \leq x \leq b - d_1), \\ \tau_{yz}(a, y) &= 0 \quad (0 < y < b - d_1), \quad \tau_{xz}(x, 0) = 0 \quad (a < x < +\infty), \\ \tau_{xz}(x, b) &= 0 \quad (0 < x < a - d_1), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \tau_{yz}(x, y) = \tau_\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \tau_{xz}(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Оскільки поза смугами пластичності верхня межа текучості досягатися не може, в області D повинна виконуватися також така умова:

$$\tau_{xz}^2(x, y) + \tau_{yz}^2(x, y) < k^2. \quad (2)$$

Крім того, оскільки крайова задача (1) сформульована у напруженнях, то треба додатково вимагати однозначності переміщення під час обходу включення

$$\Delta w_{FE} + \Delta w_{ED} = \Delta w_{CD}, \quad (3)$$

де Δw_{FE} - приріст переміщення на ділянці FE межі матриці. Аналогічний зміст мають й інші члени цієї рівності.

Розв'язування крайової задачі (1)-(3). Складена з компонент тензора напружень функція

$$\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$$

змінної $\zeta = x + iy$ є аналітичною в області D і внаслідок умов (1) конформно відображає цю область на квадрат G площини τ (рис. 2). Отож, розв'язування задачі (1) зводиться до

побудови відповідного конформного відображення. Відповідність характерних точок цього відображення зображена на рис. 1, 2.

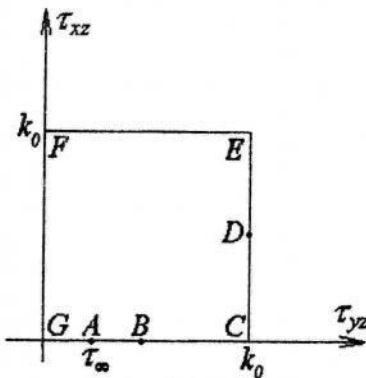


Рис. 2.

Образ G області D під час конформного відображення у площину напружень

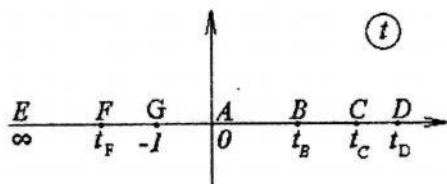


Рис. 3.

Допоміжна комплексна площина

З рівностей (1) випливає наявність на межі областей D і G трьох пар точок, а саме $\zeta = \infty$ і $\tau = \tau_\infty$; $\zeta = a + ib$ і $\tau = \tau_0(1 + i)$ та $\zeta = a$ і $\tau = 0$, координати яких фіксовані й апіорі відомі. Тому за теоремою Рімана про єдність конформного відображення [3] існує

однопараметрична система розв'язків задачі (1). Вільним параметром множини розв'язків вважатимемо довжину d'_2 додаткової смуги. Існування вільного параметра дає змогу забезпечити виконання однозначності переміщення (3). Отже, розвиток ПС за схемою одного пластичного відшаровування включення, загалом неможливий – для однозначності переміщення треба допускати існування додаткових смуг у матриці.

Межа фігур D і G є ламаною прямою і, отже, потрібне відображення можна побудувати за допомогою перетворення Крістофеля-Шварца. Введемо для цього допоміжну комплексну площину t , у якій фігурам D і G відповідатиме верхня півплощина (область H). Точкам меж областей D і G з фіксованими координатами прийемо у відповідність на межі області H фіксовані точки – решті характерних точок границі областей D і G на дійсній осі площини t відповідатимуть точки, координати яких підлягають визначенню (рис. 3). Функції $\zeta(t)$ $\tau(t)$ тепер можна подати так:

$$\zeta(t) = a + \frac{b}{M_1} \int_{-1}^t F_\zeta(\eta) d\eta; \tag{4}$$

$$\tau(t) = \frac{\tau_\infty}{M_2} \int_{-1}^t F_\tau(\eta) d\eta, \tag{5}$$

де

$$F_\zeta(\eta) = (\eta - t_D)\eta^{-3/2}(\eta - t_B)^{-1/2}(\eta + 1)^{-1/2},$$

$$F_\tau(\eta) = (\eta + 1)^{-1/2}(\eta - t_C)^{-1/2}(\eta - t_F)^{-1/2}, M_1 = \int_{-\infty}^{-1} |F_\zeta(\eta)| d\eta, M_2 = \int_{-1}^0 |F_\tau(\eta)| d\eta.$$

Під нецілим степенем комплексної змінної розумітимемо аналітичну в області H функцію, дійсну та додатну для таких самих значень аргумента.

Вже з картини конформного відображення стає очевидною величина затримки текучості, за якої пластичні деформації будуть розвиватися за згаданою схемою. Оскільки максимальне зсувне напруження в області D має точну верхню межу, що дорівнює $k_0\sqrt{2}$, розглядувана схема реалізуватиметься, коли $k \geq k_0\sqrt{2}$.

Функції $\zeta(t)$ $\tau(t)$ містять чотири невідомі параметри t_F ($-\infty < t_F < -1$), t_B , t_C , t_D ($0 < t_B < t_C < t_D < +\infty$). Два рівняння для них отримуємо з метричних співвідношень у фігурах **D** і **G**

$$\int_{t_B}^{t_D} |F_\zeta(\eta)| d\eta - \int_{t_D}^{+\infty} |F_\zeta(\eta)| d\eta = \frac{a}{b} \int_{-\infty}^{-1} |F_\zeta(\eta)| d\eta; \quad (6)$$

$$\int_{t_F}^{-1} F_\tau(\eta) d\eta = \int_{-1}^{t_C} F_\tau(\eta) d\eta, \quad (7)$$

які забезпечують необхідні співвідношення довжин сторін включення і рівність сторін фігури **G**. Ще одне рівняння одержимо, вимагаючи у безмежно віддаленій точці площини ζ , якій у допоміжній площині t відповідає точка $t = 0$, виконання рівності $\tau = \tau_\infty$

$$k_0 \int_{-1}^0 F_\tau(\eta) d\eta = \tau_\infty \int_{-1}^{t_C} F_\tau(\eta) d\eta. \quad (8)$$

Четверте рівняння отримаємо з умови неперервності переміщення (3). Відносне зміщення точок $\zeta_1 = x_1 + iy_1$ і $\zeta_2 = x_2 + iy_2$ визначається за формулою [4]

$$w = \frac{1}{\mu} \operatorname{Im} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \tau(\zeta) d\zeta,$$

де μ – пружний модуль зсуву.

З формул (3)–(5) одержуємо останнє рівняння, яке замикає систему для шуканих параметрів перетворення Крістофеля–Шварца

$$\int_{t_C}^{t_D} |F_\zeta(t)| dt \int_{t_C}^t |F_\tau(\eta)| d\eta = \int_{-\infty}^{t_F} |F_\zeta(t)| dt \int_{t_F}^t |F_\tau(\eta)| d\eta + \int_{t_D}^{\infty} |F_\zeta(t)| dt \int_{t_D}^t |F_\tau(\eta)| d\eta. \quad (9)$$

Система рівнянь (6)–(9) розв'язана методом послідовних наближень. Під час побудови алгоритму важливим є, по-перше те, що параметр t_D вважається вільним; по-друге те, що рівняння (7) і (8) не містять параметра t_B . Без урахування рівняння (9), тобто вибравши параметр t_D ($t_C < t_D < +\infty$) довільно, отримаємо однопараметричний розв'язок системи рівнянь (6)–(8).

Система (6)–(8) розпадається на дві незалежні: систему рівнянь (7), (8) і, окремо, рівняння (6).

Розв'язок системи (7), (8) стосовно параметрів t_F , t_C дає такий збіжний алгоритм:

$$t_F^{(j+1)} = -t_F^{(j)} \frac{FG^{(j)}}{GC^{(j)}}, \quad t_C^{(j+1)} = t_C^{(j)} \left(1 + \frac{GA^{(j)}}{GC^{(j)}} - \frac{\tau_\infty}{k_0} \right), \quad (10)$$

де

$$FG^{(j)} = \int_{t_F^{(j)}}^{-1} |F_\tau^{(j)}(\eta)| d\eta, \quad GC^{(j)} = \int_{-1}^{t_C^{(j)}} |F_\tau^{(j)}(\eta)| d\eta, \quad GA^{(j)} = \int_{-1}^0 |F_\tau^{(j)}(\eta)| d\eta;$$

початкові наближення $t_F^{(0)} = -2$, $t_C^{(0)} = 1$; функція $F_\tau^{(j)}(\eta)$ відрізняється від $F_\tau(\eta)$ лише заміною t_F і t_C на $t_F^{(j)}$ і $t_C^{(j)}$.

Параметр t_B визначається з рівняння (6) таким алгоритмом:

$$t_B^{(j+1)} = t_B^{(j)} \left(1 + \frac{BD^{(j)} - ED^{(j)}}{2EG^{(j)}} - \frac{a}{b} \right). \quad (11)$$

Тут $BD^{(j)} = \int_{t_B^{(j)}}^{t_D^{(j)}} |F_\zeta^{(j)}(\eta)| d\eta$, $ED^{(j)} = \int_{t_B^{(j)}}^{+\infty} |F_\zeta^{(j)}(\eta)| d\eta$, $EG^{(j)} = \int_{-\infty}^{-1} |F_\zeta^{(j)}(\eta)| d\eta$;

початкове наближення $t_B^{(0)} = t_C / 2$, функція $F_\zeta^{(j)}(\eta)$ відрізняється від $F_\zeta(\eta)$ тільки заміною t_B на $t_B^{(j)}$.

Рівняння (9) є лінійним алгебричним стосовно параметра t_D . Воно дає

$$t_D = \frac{a_1 - a_3 - a_5}{a_2 - a_4 - a_6},$$

де

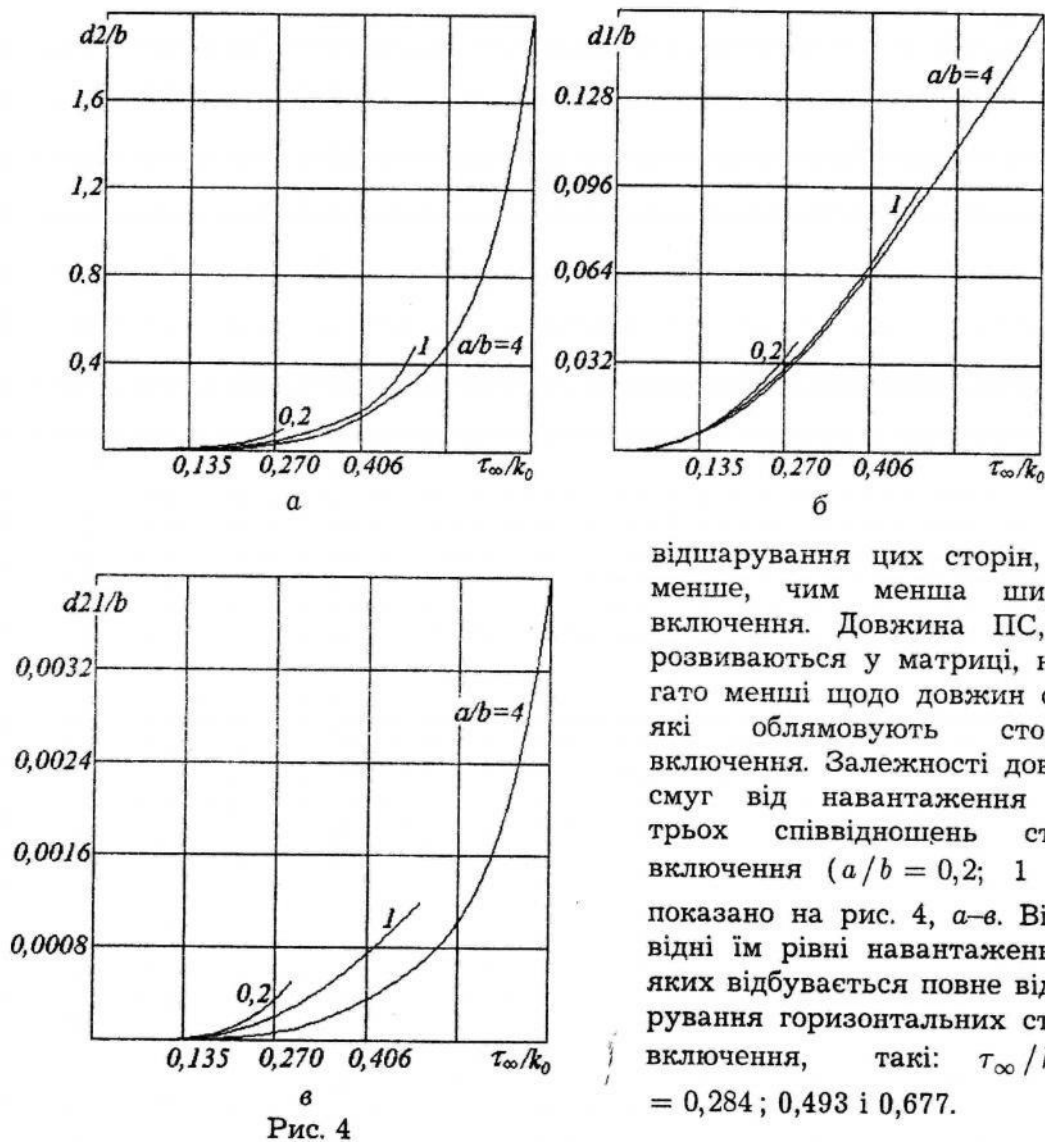
$$a_1 = \int_{-\infty}^{t_F} t dt \int_{-\infty}^t F(t, \eta) d\eta, \quad a_3 = \int_{t_D}^{+\infty} t dt \int_t^{+\infty} F(t, \eta) d\eta, \quad a_5 = \int_{t_C}^{t_D} t dt \int_{t_C}^t F(t, \eta) d\eta,$$

$$a_2 = \int_{-\infty}^{t_F} dt \int_{-\infty}^t F(t, \eta) d\eta, \quad a_4 = \int_{t_D}^{+\infty} dt \int_t^{+\infty} F(t, \eta) d\eta, \quad a_6 = \int_{t_C}^{t_D} dt \int_{t_C}^t F(t, \eta) d\eta, \quad F(t, \eta) = F_\zeta(t) F_\tau(\eta).$$

Тепер, коли всі шукані параметри знайдено, з використанням формули (4) легко обчислити довжини пластичних смуг

$$d_1 = \frac{a}{M_1} \int_{-\infty}^{t_F} F_\zeta(\eta) d\eta, \quad d_2 = \frac{a}{M_1} \int_{t_C}^{t_D} F_\zeta(\eta) d\eta, \quad d_2' = \frac{a}{M_1} \int_{t_D}^{+\infty} F_\zeta(\eta) d\eta. \quad (12)$$

Числові результати. Як і у випадку ідеально пружно-пластичного тіла [5], незалежно від відношення між шириною і висотою включення завжди спочатку відшаровуються ті сторони включення, паралельно до яких на нескінченності діє зсувне навантаження. Навантаження, за якого настає



відшарування цих сторін, тим менше, чим менша ширина включення. Довжина ПС, які розвиваються у матриці, набагато менші щодо довжин смуг, які облямовують сторони включення. Залежності довжин смуг від навантаження для трьох співвідношень сторін включення ($a/b = 0,2; 1$ і 4) показано на рис. 4, а-в. Відповідні їм рівні навантажень, за яких відбувається повне відшарування горизонтальних сторін включення, такі: $\tau_{\infty}/k_0 = 0,284; 0,493$ і $0,677$.

Найсуттєвішою відмінністю картини розвитку ПС для включення з прямокутним перерізом у середовищі зі затримкою текучості порівняно з ідеально пружно-пластичним середовищем є обов'язкова поява додаткових смуг у матриці, які починають розвиватися від вершини включення. У середовищі з великою затримкою $k - k_0 \geq (\sqrt{2} - 1)k_0$ під дією паралельного до горизонтальних сторін включення зсувного навантаження додаткові смуги розвиваються на продовженні цих сторін і набагато менші щодо смуг

на межі включення-середовище. Тому можна сподіватися, що наближений розв'язок задачі, в якому знехтувано додатковою смугою всередині матриці, будучи набагато простішим, зможе забезпечити досить високу точність.

1. *Кривень В.А.* Галуження пластичних смуг біля вершини вирізу за поздовжнього зсуву // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – № 3. – С. 38–46.
2. *Sulym H., Krywen M.* Odseparowywanie plastyczne cienkiej sztywnej inkluzji w osrodku z duzym zatrzymaniem plynincia podczas antyplaskiego stanu odkształcenia // Materiały III Symp. Mechaniki Zniszczenia Materialow i Konstrukcji (Augustyw, 1-4 czerwca 2005). – Białystok, 2005. – S. 397–400.
3. *Иванов В.И., Попов В.Ю.* Конформные отображения и их приложения. – М., 2002.
4. *Райс Дж.* Математические методы в механике разрушения // Разрушение. – М., 1975. – Т. 2. – С. 204–335.
5. *Кривень В.А., Гнатюк О.Б., Гром'як Р.С.* Антиплоска деформація ідеально пружно-пластичного тіла з жорстким прямокутним включенням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – № 6. – С. 19–23.

PLASTIC EXFOLIATION OF RECTANGULAR RIGID INCLUSION IN THE SOLID WITH A GREAT YIELD DROP UNDER LONGITUDINAL SHEAR

Georgij Sulym, Marta Kryven

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

The stress–deformation state and plastic bands development from the tips of rectangular rigid inclusion in the solid with a great value of yielding delay under uniform quasi-static shear on infinity is considered. It is shown that unlike ideally elastic-plastic body necessarily appearance of plastic bands in material matrices, which length appeared far less from one of bands bordering inclusion.

Key words: antiplane strain, rectangle, elastic-plastic material, yield drop, plastic band, exfoliation.

Стаття надійшла до редколегії 09.08.2005

Прийнята до друку 22.11.2006