ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2023. Випуск 95. С. 94–104
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2023. Issue 95. P. 94–104
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2023.95.094-104

УДК 336.7:519.2

СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ВІДНОШЕННЯ ШАРПА ПОРТФЕЛЯ З МАКСИМАЛЬНИМ ВІДНОШЕННЯМ ШАРПА

Микола ЗАБОЛОЦЬКИЙ, Тарас ЗАБОЛОЦЬКИЙ, Олег ДМИТРІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів, 79000
e-mail: mykola.zabolotskyy@lnu.edu.ua, taras.zabolotskyy@lnu.edu.ua,
dmitrivoleg146@gmail.com

Робота присвячена статистичному аналізу вибіркової оцінки відношення Шарпа портфеля фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа. Знайдено асимптотичний розподіл такої оцінки. Для обґрунтування можливості використання отриманих результатів на практиці на основі імітаційного моделювання досліджено швидкість збіжності оцінок точних розподілів до відповідних асимптотичних. Виявилося, що при використанні звичайної вибіркової оцінки їй притаманне суттєве зміщення. Тому побудовано виправлену оцінку для відношення Шарпа портфеля фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа, для якої зміщення є практично відсутнім, але швидкість збіжності оцінок дисперсій до асимптотичних значень дещо сповільнилася.

Ключові слова: асимптотичний розподіл, вибіркова оцінка, відношення Шарпа, портфель з максимальним відношенням Шарпа.

1. Вступ

У фінансовій математиці використання портфелів фінансових активів є одним з основних способів зниження ризику інвестицій. За основні характеристики портфеля приймають сподівану дохідність (математичне сподівання дохідності портфеля) та ризик. Поняття ризику портфеля не має однозначної інтерпретації. На практиці використовуються різні міри для вимірювання ризику портфеля. Однією з таких мір є дисперсія дохідності портфеля. Класичні методи вибору структури портфеля грунтуються на оптимізації одного з цих показників ефективності при фіксованому значенні іншого. Популярнішими показниками ефективності портфеля фінансових

2020 Mathematics Subject Classification: 91G10, 62F12, 91G60 активів є показники ефективності, які відображають співвідношення між сподіваною дохідністю та дисперсією. Одним з найвідоміших таких показників є відношення Шарпа [1], яке обчислюється як частка сподіваної дохідності та середньоквадратичного відхилення (кореня квадратного з дисперсії) портфеля. Такий показник вважають одним з найпопулярніших на практиці [2, с. 49]. Розв'язавши оптимізаційну задачу максимізації відношення Шарпа портфеля фінансових активів, отримуємо портфель з максимальним відношенням Шарпа. Хоча отриманий портфель характеризується високим рівнем ризику [3], він популярний серед інвесторів [4].

Зауважимо, що використати портфель фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа на практиці ми не можемо, оскільки модель опирається на невідомі на практиці параметри розподілу вектора дохідностей активів включених в портфель, вектор математичних сподівань і матрицю коваріації. Інвестор замість відомих значень змушений використовувати оцінки цих параметрів, які є випадковими величинами, а отже, всі отримані результати треба трактувати як реалізації певних випадкових величин. Проблемі дослідження властивостей оцінок характеристик портфеля фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа присвячено багато праць. За припущення багатовимірного нормального розподілу дохідностей активів портфеля ваги та його характеристики досліджувалися в [5]-[6], де зазначено незадовільні властивості вибіркових оцінок ваг, сподіваної дохідності та дисперсії цього портфеля. Тому порівнювати портфель з максимальним відношенням Шарпа з іншими портфелями на основі сподіваної дохідності та дисперсії некоректно. Зважаючи на популярність так побудованого портфеля фінансових активів, розглядають певні способи уникнення вищезгаданого недоліка [7]–[8], де за показник ефективності портфеля розглянуто відповідне значення коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику. Так вибраний показник ефективності дає змогу лише вибрати множину еквівалентних портфелів, але не зазначає, який з портфелів кращий чи гірший. Цей недолік усувається, якщо за показник ефективності вибрати відношення Шарпа, більше значення якого характеризує кращу ефективність портфеля. Зауважимо, що не змінюючи множину активів, з яких ми формуємо портфель, неможливо отримати значення відношення Шарпа більше ніж для портфеля з максимальним відношенням Шарпа, тому надалі використовуватимемо термін "максимальне відношення Шарпа портфеля". За припущення нормального розподілу вектора дохідностей активів портфеля, реалізації якого неавтокорельовані, знайдено асимптотичний розподіл вибіркової оцінки максимального відношення Шарпа портфеля та на основі імітаційного моделювання досліджено швидкість збіжності оцінок точних розподілів до знайденого асимптотичного.

2. Означення та формулювання результатів

Нехай $\mathbf{X}_t = (X_{t1}, X_{t2}, \ldots, X_{tk})'$ вектор дохідностей активів портфеля з k активів у момент часу t, де $X_{ti} = 100 \ln P_{ti}/P_{(t-1)i}$, де P_{ti} – ціна i-го активу в момент часу t. Припустимо, що $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний нормальний розподіл з параметрами $\boldsymbol{\mu} = \mathrm{M}(\mathbf{X}_t)$ (вектор математичних сподівань) і $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{D}(\mathbf{X}_t)$ (матриця коваріації). Позначимо w_i частку i-го активу в портфелі, а вектор часток $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_k)$ назвемо вектором ваг портфеля або просто портфелем. Дохідність портфеля $\mathbf{w}$ в момент часу t становить $X_{\mathbf{w};t} = \mathbf{w}'\mathbf{X}_t$. Основними характеристиками портфеля є сподівана дохідність $R_{\mathbf{w}} = \mathrm{M}(X_{\mathbf{w};t}) = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}$ та дисперсія $V_{\mathbf{w}} = \mathrm{D}(X_{\mathbf{w};t}) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$. За відсутності безризикового розміщення коштів відношення Шарпа портфеля $\mathbf{w}$ дорівнює

$$SR_{\mathbf{w}} = \frac{R_{\mathbf{w}}}{\sqrt{V_{\mathbf{w}}}} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}}{\sqrt{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}}}. \tag{1}$$

Максимізуючи відношення Шарпа за умови, що $\mathbf{w}'\mathbf{1} = 1$, де $\mathbf{1}$ – k-вимірний вектор, елементами якого є одиниці, отримуємо ваги портфеля з максимальним відношенням Шарпа $\mathbf{w}_{SR}$ (див., напр., [5])

$$\mathbf{w}_{SR} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}. \tag{2}$$

Сподівана дохідність R_{SR} і дисперсія V_{SR} портфеля з вагами $\mathbf{w}_{SR}$ набувають вигляду

$$R_{SR} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}, \tag{3}$$

$$V_{SR} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\left(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)^2}. \tag{4}$$

Підставивши сподівану дохідність і дисперсію портфеля з максимальним відношенням Шарпа (3)-(4) в (1), отримаємо максимальне відношення Шарпа портфеля

$$SR_{SR} = \frac{R_{SR}}{V_{SR}} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}} \Bigg/ \sqrt{\frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\left(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)^2}} = \sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}\,. \tag{5}$$

На практиці параметри розподілу вектора дохідностей активів портфеля $\mathbf{X}_t$ $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ невідомі, тому для обчислення відношення Шарпа (5) використовують оцінки цих параметрів. Для заданих попередніх значень векторів дохідностей активів $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ вибіркові оцінки $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ та $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ параметрів розподілу $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ набувають вигляду

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j\,, \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{X}_j - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_j - \hat{\boldsymbol{\mu}})'\,. \tag{6}$$

Підставивши у (5) замість невідомих параметрів їх оцінки (6), отримаємо вибіркову оцінку параметра SR_{SR}, яку позначимо $\widehat{SR}_{SR}$.

Теорема 1. *Нехай $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, …, $\mathbf{X}_n$ незалежні однаково розподілені випадкові k-вимірні вектори та $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний нормальний розподіл з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Тоді*

$$\sqrt{n}(\widehat{SR}_{SR} - SR_{SR}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2_{SR}), \quad n \to +\infty,$$

$$\sigma^2_{SR} = 1 + \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{2}, \tag{7}$$

де $\xrightarrow{d}$ позначає збіжність за розподілом.

Доведення. Позначимо $R_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$, $V_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$, $s = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}$, де $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$ та $\hat{R}_{GMV}, \hat{V}_{GMV}, \hat{s}$ їх вибіркові оцінки. Нехай $\mathbf{0}_3$ – 3-вимірний нуль-вектор і

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} V_{GMV}(1+s) & 0 & 0 \\ 0 & 2V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4s+2s^2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

З результатів роботи [3] випливає, що

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{GMV} \\ \hat{V}_{GMV} \\ \hat{s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{GMV} \\ V_{GMV} \\ s \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\mathbf{0}_3, \boldsymbol{\Omega}\right), \quad n \to +\infty.$$

Оскільки

$$SR_{SR} = \sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}} = \sqrt{\boldsymbol{\mu}'\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}\right)\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}'\frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}\boldsymbol{\mu}} = \sqrt{s + \frac{R_{GMV}^2}{V_{GMV}}},$$

то з [9, с. 211], отримаємо

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n}(\widehat{SR}_{SR} - SR_{SR}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \mathbf{g}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{g}), \quad n \to +\infty, \\
&\mathbf{g} = \left(\frac{\partial SR_{SR}}{\partial R_{GMV}}, \frac{\partial SR_{SR}}{\partial V_{GMV}}, \frac{\partial SR_{SR}}{\partial s}\right)' = \\
&= \left(\frac{R_{GMV}}{V_{GMV}\sqrt{s + \frac{R_{GMV}^2}{V_{GMV}}}}, -\frac{R_{GMV}^2}{2V_{GMV}^2\sqrt{s + \frac{R_{GMV}^2}{V_{GMV}}}}, \frac{1}{2\sqrt{s + \frac{R_{GMV}^2}{V_{GMV}}}}\right),
\end{aligned}$$

а отже,

$$\begin{aligned}
\sigma_{SR}^2 &= \frac{R_{GMV}^2(1+s)}{V_{GMV}\left(s + \frac{R_{GMV}^2}{V_{GMV}}\right)} + \frac{R_{GMV}^4}{2V_{GMV}^2\left(s + \frac{R_{GMV}^2}{V_{GMV}}\right)} + \frac{2s+s^2}{2\left(s + \frac{R_{GMV}^2}{V_{GMV}}\right)} = \\
&= \frac{2V_{GMV}R_{GMV}^2 + 2sV_{GMV}^2}{2V_{GMV}^2\left(s + \frac{R_{GMV}^2}{V_{GMV}}\right)} + \frac{2V_{GMV}R_{GMV}^2 s + R_{GMV}^4 + s^2V_{GMV}^2}{2V_{GMV}^2\left(s + \frac{R_{GMV}^2}{V_{GMV}}\right)} = \\
&= 1 + \frac{s + \frac{R_{GMV}^2}{V_{GMV}}}{2} = 1 + \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{2}.
\end{aligned}$$

□

Оскільки асимптотична дисперсія σ_{SR}^2 (див. (7)) випадкової величини $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{SR} - SR_{SR})$ залежить від невідомих параметрів $\boldsymbol{\mu}$ і $\boldsymbol{\Sigma}$ розподілу вектора дохідностей активів портфеля $\mathbf{X}_t$, то на практиці потрібно використовувати її оцінку. Враховуючи теорему 1.14 [10, с. 8], не важко довести, що вибіркова оцінка $\hat{\sigma}_{SR}^2$ консистентна, а отже, її використання коректне.

3. Імітаційне моделювання

В попередньому розділі ми знайшли асимптотичний розподіл вибіркової оцінки максимального відношення Шарпа портфеля. Такий підхід часто застосовують у фінансовій математиці [11], якщо неможливо отримати точні властивості розподілу тієї чи іншої випадкової величини, яка становить інтерес. Виникає питання, який обсяг вибірки історичних значень потрібно використовувати. Для цього використаємо програмне забезпечення R і проведемо статистичне імітаційне моделювання. Опишемо його схему.

1. Припускаємо, що точні значення параметрів розподілу $\boldsymbol{\mu}$ і $\boldsymbol{\Sigma}$ вектора дохідностей активів портфеля $\mathbf{X}_t$ відомі. Для цього можемо згенерувати вектор середніх і коваріаційну матрицю потрібних розмірів або оцінити ці значення з історичних даних і прийняти їх за точні значення. Ми використаємо другий спосіб. Виберемо дані про ціни акцій компаній включених до переліку Dow Jones посортованих в алфавітному порядку за період часу з 22.11.2022 до 30.06.2023 (дані взято з finance.yahoo.com), всього 151 спостереження, та на їхній підставі обчислимо дохідності акцій (отримаємо 150 історичних значень вектора дохідностей активів). На підставі отриманої вибірки історичних значень дохідностей акцій компаній з переліку Dow Jones побудуємо оцінки $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ та $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ (6), і приймемо отримані оцінки за точні значення.
2. Використовуючи точні значення параметрів розподілу вектора $\mathbf{X}_t$, побудуємо 2 портфелі з максимальним відношенням Шарпа, які складаються з $k = \{15, 30\}$ перших акцій компаній посортованого в алфавітному порядку списку Dow Jones. Для кожного з портфелів, завдяки (5) і (7), обчислимо точні значення відношення Шарпа та асимптотичної дисперсії.
3. Для кожного значення k за допомогою генератора випадкових чисел згенеруємо вибірку з $n = \{250, 500, 1000, 2000, 5000\}$ значень з розподілу вектора $\mathbf{X}_t$, тобто вибірку з k-вимірного нормального розподілу з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ отриманими в 1. Використовуючи згенеровану вибірку, будуємо вибіркові оцінки $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ та $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ і на їхній підставі оцінюємо значення відношення Шарпа відповідного портфеля.
4. Повторюємо крок 3 100000 раз. У підсумку для кожного значення k і n отримуємо 100000 оцінок відношення Шарпа. Будуємо оцінку густини розподілу випадкової величини $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{SR} - SR_{SR})$ та порівнюємо її з густиною відповідного нормального асимптотичного розподілу (рис. 1). Обчислюємо також оцінки математичного сподівання та дисперсії цієї випадкової величини і порівнюємо їх з відповідними асимптотичними величинами (табл. 1).

З табл. 1 бачимо, що добре наближення оцінок дисперсій досягається при обсязі вибірки $n = 1000$ (наприклад, при $k = 30$ оцінка дисперсії дорівнює 1.0775, а асимптотична — 1.0923). Натомість оцінки математичних сподівань збігаються до 0 доволі повільно (наприклад, при $k = 15$ та $n = 5000$ оцінка математичного сподівання дорівнює 0.3489 при точному значенні відношення Шарпа 0.3189). З рис. 1 видно, що густинам притаманне значне зміщення, а тому будуємо виправлену оцінку для максимального відношення Шарпа портфеля.

		$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$	$n = 5000$	Асимпт.
$k = 15$	Середнє	1.4623	1.0583	0.7564	0.5378	0.3489	0
	Дисперсія	0.9681	0.9843	1.0137	1.0321	1.0398	1.0508
$k = 30$	Середнє	2.4737	1.7678	1.2579	0.8938	0.5734	0
	Дисперсія	1.1156	1.0689	1.0775	1.0863	1.0989	1.0923

Табл. 1. Оцінки та асимптотичні значення середнього та дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{SR} - SR_{SR})$ портфелів з максимальним відношенням Шарпа за припущення, що вектор дохідностей активів портфеля має нормальний розподіл

З теореми 3.2.13 [12, с. 98] за припущення багатовимірного нормального розподілу вектора дохідностей активів портфеля $\mathbf{X}_t$ отримуємо

$$\frac{n(n-k)}{k(n-1)}\hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}} \sim F_{k,n-k;n\delta},$$

де $F_{k,n-k;n\delta}$ означає нецентральний розподіл Фішера з k і $(n-k)$ ступенями свободи та нецентральним парамером $n\delta = n\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$. З властивостей нецентрального розподілу Фішера отримуємо (див., напр., [13, с. 481])

$$\mathrm{M}(\hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}) = \frac{k(n-1)}{(n-k-2)n} + \frac{n-1}{n-k-2}\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{n-k-2}{n-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}} - \frac{k}{n}$$

є незміщеною оцінкою величини $\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$. Отже, можемо розглянути виправлену оцінку максимального відношення Шарпа портфеля $\widehat{SR}_{SR,\,adj}$

$$\widehat{SR}_{SR,\,adj} = \sqrt{\frac{n-k-2}{n-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}} - \frac{k}{n}} \tag{9}$$

та використати її під час проведення імітаційного моделювання за схемою описаною вище. Зауважимо, що величина під коренем в (9) може набувати від'ємні значення з додатною ймовірністю, причому ця ймовірність зростатиме зі зменшенням кількості елементів історичної вибірки n. Тому у разі використання цієї оцінки ігноруватимемо вибірки, для яких величина під коренем у (9) буде від'ємною. Результати моделювання зображено на рис. 2 і в табл. 2.

З табл. 2 бачимо, що:

а) збіжність оцінок дисперсій до відповідних асимптотичних значень дещо сповільнилися, хоча при обсязі вибірки $n = 2000$ досягається добре наближення (наприклад, при $k = 30$ оцінка дисперсії дорівнює 1.1562 при асимптотичному значенні 1.0923);

б) оцінки математичних сподівань вже при обсязі вибірки $n = 1000$ близькі до 0 (при $k = 30$ маємо –0.0441), тобто до відповідного асимптотичного значення;

в) відхилення оцінок математичних сподівань від асимптотичних значень у випадку використання виправленої оцінки максимального відношення Шарпа

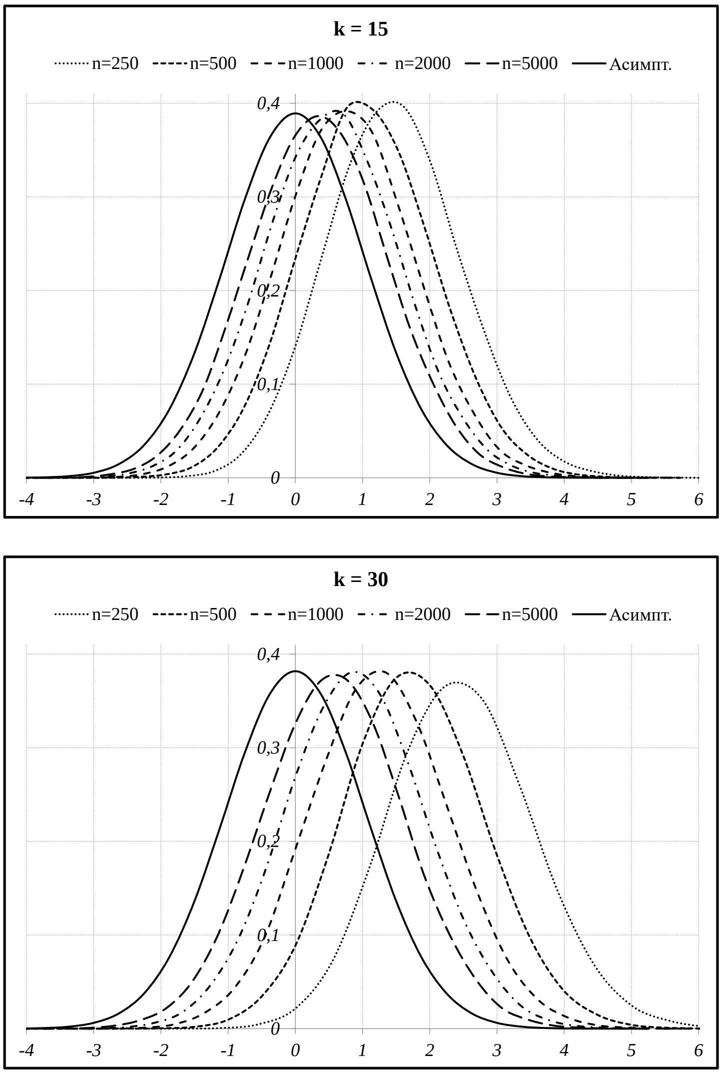

Рис. 1. Оцінки густин розподілів випадкової величини $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{SR} - SR_{SR})$ портфелів з максимальним відношенням Шарпа з $k = 15$ (зверху), $k = 30$ (знизу) активів за припущення, що вектор дохідностей активів портфеля має нормальний розподіл

портфеля не залежать від кількості активів у портфелі k, на відміну від випадку використання звичайної вибіркової оцінки. Подібні висновки робимо і з рис. 2, на якому зображено оцінки густин випадкової величини $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{SR,\,adj} - SR_{SR})$ та відповідні їм асимптотичні густини.

		$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 2000$	$n = 5000$	Асимпт.
$k = 15$	Середнє	–0.1469	–0.0894	–0.0587	–0.0341	–0.0185	0
	Дисперсія	1.5166	1.2692	1.1497	1.1021	1.0667	1.0508
$k = 30$	Середнє	–0.1239	–0.0645	–0.0441	–0.0323	–0.0137	0
	Дисперсія	1.6930	1.3439	1.2133	1.1562	1.1220	1.0923

Табл. 2. Оцінки та асимптотичні значення середнього та дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{SR,\,adj} - SR_{SR})$ портфелів з максимальним відношенням Шарпа за припущення, що вектор дохідностей активів портфеля має нормальний розподіл

4. **Висновки**

Проведено статистичний аналіз вибіркової оцінки максимального відношення Шарпа портфеля. Оскільки відношення Шарпа є одним з найпопулярніших показників ефективності портфеля та статистичні властивості портфеля з максимальним відношенням Шарпа є незадовільними, то тематика такого дослідження актуальна.

Знайдено асимптотичний розподіл вибіркової оцінки максимального відношення Шарпа портфеля та на основі імітаційного моделювання досліджено швидкість збіжності оцінок точних розподілів до відповідних асимптотичних. Виявилося, що у разі використання звичайної вибіркової оцінки їй притаманне суттєве зміщення. Тому, замість того, щоб збільшувати обсяги вибірок історичних даних з метою досягнення допустимих значень для відхилення, було запропоновано виправлену оцінку для максимального відношення Шарпа портфеля. На основі імітаційного моделювання отримано, що для виправленої оцінки зміщення є практично відсутнім, але швидкість збіжності оцінок дисперсій до відповідних асимптотичних дещо сповільнилася. Оскільки використання вибірок історичних значень обсягом n = 2000-5000 (див., напр., [14], де для побудови портфелів з $k = \{50, 70, 90\}$ активів використано вибірки обсягом 3500 спостережень і [15], де для порівняння портфелів з трьох активів використано вибірку щоденних дохідностей обсягом 2500 спостережень, що відповідають десятирічному періоду) на сьогодні є звичним явищем, то отримані результати можуть бути використані на практиці, особливо запропонована в праці виправлена оцінка.

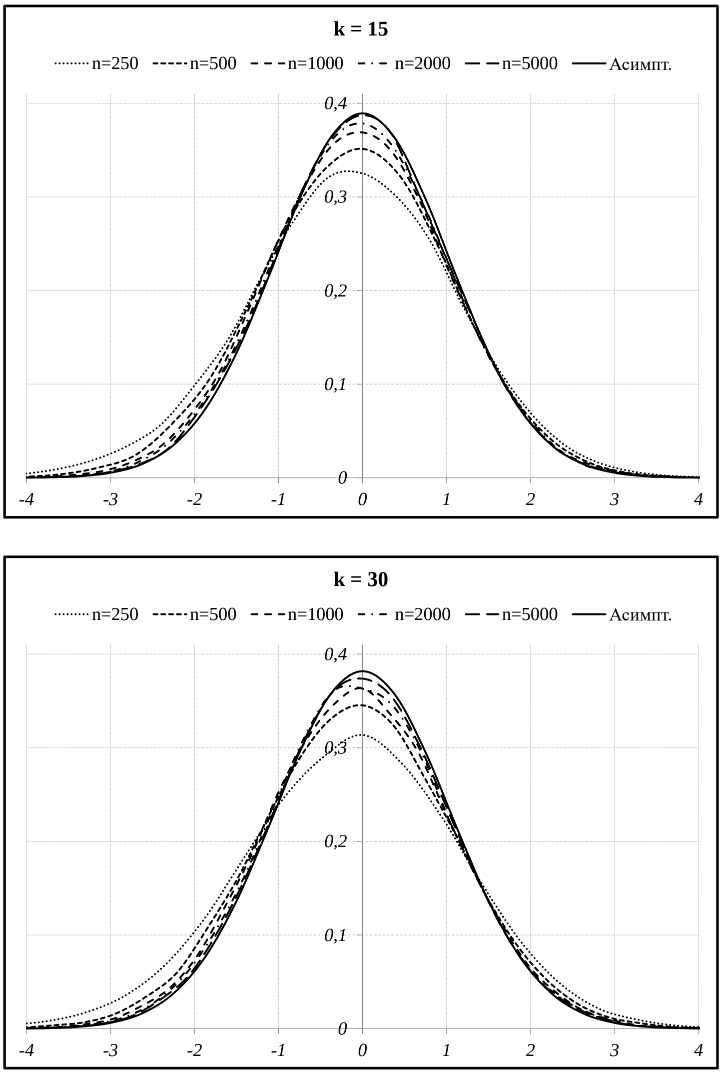

Рис. 2. Оцінки густин розподілів випадкової величини $\sqrt{n}(\widehat{SR}_{SR,\,adj} - SR_{SR})$ портфелів з максимальним відношенням Шарпа з $k = 15$ (зверху), $k = 30$ (знизу) активів за припущення, що вектор дохідностей активів портфеля має нормальний розподіл

Список використаної літератури

1. W. F. Sharpe, *Mutual fund performance*, Journal of Business **39** (1966), 119–138.
2. В. Ю. Хохлов, *Математичні методи в управлінні портфелем цінних паперів*, Кондор-Видавництво, Київ, 2017, 298 с.

3. T. Bodnar and T. Zabolotskyy, *How risky is the optimal portfolio which maximizes the Sharpe ratio?*, ASTA – Advances in Statistical Analysis **101** (2017), 1–28. DOI: 10.1007/s10182-016-0270-3
4. Y. Qi, T. Liu, S. Zhang, and Y. Zhang, *Robust Markowitz: comprehensively maximizing Sharpe ratio by parametric-quadratic programming*, Journal of Industrial and Management Optimization **19** (2023), no. 2, 1426–1446. DOI: 10.3934/jimo.2021235
5. Y. Okhrin and W. Schmid, *Distributional properties of optimal portfolio weights*, Journal of Econometrics **134** (2006), no. 1, 235–256. DOI: 10.1016/j.jeconom.2005.06.022
6. W. Schmid and T. Zabolotskyy, *On the existence of unbiased estimators for the portfolio weights obtained by maximizing the Sharpe ratio*, Advances in Statistical Analysis **92** (2008), 29–34. DOI: 10.1007/s10182-008-0054-5
7. М. В. Заболоцький, Т. М. Заболоцький, Т. В. Байбула, *Емпіричний аналіз вибіркової оцінки коефіцієнта ризику інвестора портфеля з максимальним відношенням Шарпа*, Вісник Львівського університету, серія економічна **56** (2019), 207–217.
8. М. В. Заболоцький, Т. М. Заболоцький, *Тестування еквівалентності портфелів з максимальним відношенням Шарпа та з максимальною очікуваною корисністю*, Вісник Львівського університету, серія мех.-мат. **88** (2019), 128–133.
9. P. J. Brockwell and R. A. Davis, *Time series: theory and methods*, Springer Science+Business Media, New York, 2006, 600 p. DOI: 10.1007/978-1-4419-0320-4
10. A. DasGupta, *Asymptotic theory of statistics and probability*, Springer, New York, 2008, 722 p. DOI: 10.1007/978-0-387-75971-5
11. S. Ling and M. McAleer, *Asymptotic theory for a vector ARMA-GARCH model*, Econometric Theory **19** (2003), no. 2, 280–310. DOI: 10.1017/S0266466603192092
12. R. J. Muirhead, *Aspects of multivariate statistical theory*, Wiley, New York, 1982, 704 p. DOI: 10.1002/9780470316559
13. N. L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan, *Continuous univariate distributions,* Vol. 2, Wiley, New York, 1995, 752 p.
14. O. Babat, J. C. Vera, and L. F. Zuluaga, *Computing near-optimal Value-at-Risk portfolios using integer programming techniques*, European Journal of Operational Research **266** (2018), no. 1, 304–315. DOI: 10.1016/j.ejor.2017.09.009
15. S. Geissel, H. Graf, J. Herbinger, and F. T. Seifried, *Portfolio optimization with optimal expected utility risk measures*, Annals of Operations Research **309** (2022), 59–77. DOI: 10.1007/s10479-021-04403-7

Стаття: надійшла до редколегії 02.08.2023
доопрацьована 19.09.2023
прийнята до друку 03.10.2023

STATISTICAL ANALYSIS OF SHARPE RATIO OF THE SHARPE RATIO OPTIMAL PORTFOLIO

Mykola ZABOLOTSKYY, Taras ZABOLOTSKYY, Oleg DMYTRIV

Ivan Franko Lviv National University,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine
e-mail: mykola.zabolotskyy@lnu.edu.ua, taras.zabolotskyy@lnu.edu.ua, dmitrivoleg146@gmail.com

The paper is dedicated to statistical analysis of a sample estimator of the Sharpe ratio of the Sharpe ratio optimal portfolio. Assuming that the vector of portfolio asset returns is multivariate normally distributed the asymptotic distribution of the Sharpe ratio sample estimator is found. The results of simulation study show that such an estimator is significantly biased. In the paper adjusted estimator of the Sharpe ratio of the Sharpe ratio portfolio is constructed. Using the simulation study it is shown that the bias of the adjusted estimator is not significant but the estimated variances converge slower to the asymptotic values than for sample estimator.

Key words: asymptotic distribution, sample estimator, Sharpe ratio, Sharpe ratio optimal portfolio.