ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2023. Випуск 95. С. 57–66
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2023. Issue 95. P. 57–66
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2023.95.057-066

УДК 512.546

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЗА МАРКОВИМ НАБОРІВ ТИХОНОВСЬКИХ ПРОСТОРІВ 5: КЛАСИ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

Назар ПИРЧ

Національний Університет "Львівська Політехніка"
вул. Бандери 12, 79013, м. Львів
e-mail: pnazar@ukr.net

Вивчаємо набори тихоновських просторів, для яких можливо повністю описати клас наборів M-еквівалентних до даного.

Ключові слова: вільна топологічна група, сім'я топологічних просторів, M-еквівалентність, узагальнений ретракт.

1. Вступ

Ми продовжуємо вивчати еквівалентні за Марковим набори тихоновських просторів, розпочаті в [4]. У [6] запропоновано методи пониження порядку задачі про класифікацію наборів. Основна мета нашої праці — виділити набори тихоновських просторів, для яких можливо з точністю до M-еквівалентності просторів описати всі набори тихоновських просторів еквівалентних даному.

Другий розділ містить опис наборів тихоновських просторів, які дають змогу описати їхні класи M-еквівалентності через класи M-еквівалентності їхніх елементів.

У третьому розділі застосовуємо отримані результати для зліченних компактних просторів. Враховуючи класифікацію вільних об'єктів над відповідними просторами, наведену в [7], доводимоо, що класи еквівалентності наборів відповідних просторів та їхніх замкнених підпросторів для відношень M, A та L збігаються.

Для тихоновського простору X позначимо через $F(X)$ вільну топологічну групу простору X. Для підпростору A топологічного простору X будемо позначати через $G(A)$ підгрупу в $F(X)$, породжену множиною твірних A.

2020 Mathematics Subject Classification: 22A05

Нехай $\{X_i : i \in I\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X і $\{Y_i : i \in I\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y. Будемо говорити, що сім'я $(X, \{X_i : i \in I\})$ є *M-еквівалентною* сім'ї $(Y, \{Y_i : i \in I\})$, якщо існує такий топологічний ізоморфізм $h\colon F(X) \to F(Y)$, що $h(X_i) \subseteq G(Y_i)$ і $h^{-1}(Y_i) \subseteq G(X_i)$ для всіх $i \in I$. Будемо позначати це так:

$$(X, \{X_i : i \in I\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_i : i \in I\}).$$

Міняючи в цьому означенні функтор вільної топологічної групи на функтор вільної абелевої топологічної групи чи вільного локально опуклого простору, отримаємо означення, відповідно, A-еквівалентних і L-еквівалентних наборів просторів. Для топологічного простору X і елемента $a \in X$ позначимо через $FG(X, a)$ вільну топологічну групу в сенсі Граєва над простором X з одиницею a [1]. Простори, які мають топологічно ізоморфні вільні топологічні групи в сенсі Граєва, будемо називати M^*-еквівалентними. Стаття написана для топологічних просторів в аксіоматиці NBG(фон Ноймана-Бернайса-Геделя).

Для тихоновського простору X позначимо через $M[X]$ множину просторів M-еквівалентних простору X. Аналогічну множину для відношення A-еквівалентності позначимо через $A[X]$, для відношення L-еквівалентності — через $L[X]$.

Нехай $\{X_i : i \in I\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X. Позначимо через $M[X, \{X_i : i \in I\}]$ сукупність сімей тихоновських просторів M-еквівалентних до сім'ї $(X, \{X_i : i \in I\})$, через $A[X, \{X_i : i \in I\}]$ — сукупність сімей тихоновських просторів A-еквівалентних до сім'ї $(X, \{X_i : i \in I\})$, через $L[X, \{X_i : i \in I\}]$ — сукупність сімей тихоновських просторів L-еквівалентних до сім'ї $(X, \{X_i : i \in I\})$.

Підпростір Y топологічного простору X називається *G-ретрактом* цього простору, якщо довільне неперервне відображення $f\colon Y \to H$ з простору Y у довільну топологічну групу H допускає неперервне продовження на X.

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *мережевним*, якщо X є T_1-простором і для кожної відкритої множини U в X існує послідовність $\{U_n\}$ відкритих в X множин така, що: (i) $\overline{U_n} \subseteq U$; (ii) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n = U$; (iii) $U_n \subset V_n$, якщо $U \subset V$. Нехай $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я замкнених підпросторів тихоновського простору X, $X = \bigcup\limits_{s\in S} X_s$, $K = \bigcap\limits_{s\in S} X_s \neq \varnothing$. Будемо говорити, що сім'я $\{X_s : s \in S\}$ утворює Δ-*систему*, якщо для довільних $i, j \in S$ маємо, що $X_i \cap X_j = K$. Якщо всі простори X_s, а також простір K є G-ретрактами в X, то будемо говорити, що сім'я $\{X_s : s \in S\}$ утворює Δ_G-*систему*. Якщо простір K в означенні Δ-*системи* є одноточковим, то отримуємо поняття *букету* топологічних просторів з відміченими точками $\bigvee\limits_{s\in S}(X_s, x_s)$.

2. Зведення задачі ізоморфної класифікації наборів до задачі ізоморфної класифікації просторів

Нагадаємо, що підпростори X_1 та X_2 топологічного простору X *взаємодоповнювані*, якщо $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ і $X_1 \cup X_2 = X$.

Твердження 1. *Нехай* $(X, X_1, X_2) \overset{M}{\sim} (Y, Y_1, Y_2)$ *і простори* X_1 *та* X_2 *взаємодоповнювані в* X, *то простори* Y_1 *та* Y_2 *також взаємодоповнювані в* Y. *Якщо, крім того, підпростір* X_1 *відкрито-замкнений в* X, *то підпростір* Y_1 *відкрито-замкнений в* Y.

Доведення. Як було доведено у твердженні 1 з [4], з умови $(X, X_1, X_2) \overset{M}{\sim} (Y, Y_1, Y_2)$ випливає умова

$$(X, X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2) \overset{M}{\sim} (Y, Y_1 \cup Y_2, Y_1 \cap Y_2).$$

З того, що $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ випливає, що $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, а з умови $X_1 \cup X_2 = X$ випливає умова $Y_1 \cup Y_2 = Y$. Отже, простори Y_1 та Y_2 утворюють розбиття простору Y. Нехай підпростір X_1 відкрито-замкнениий в X. Оскільки властивість замкнености зберігається відношенням M-еквівалентності [2], то підпростір Y_1 є замкненим в Y. Із замкненості підпростору X_2 в X випливає замкненість підпростору Y_2 в Y, зокрема відкритість його доповнення Y_1 в Y. Тобто підпростір Y_1 також відкрито-замкнений в Y. □

Твердження 2. *Для довільної сім'ї просторів* $\{X_i : i \in I\}$ *справджується рівність*

$$M[\bigoplus_{i \in I} X_i, \{X_i : i \in I\}] = \{(\bigoplus_{i \in I} Y_i, \{Y_i : i \in I\}) : Y_i \in M[X_i]\}.$$

Доведення. Включення

$$M[\bigoplus_{i \in I} X_i, \{X_i : i \in I\}] \supseteq \{(\bigoplus_{i \in I} Y_i, \{Y_i : i \in I\}) : Y_i \in M[X_i]\}.$$

випливає з твердження 4 з [4].

Доведемо обернене включення. Нехай $(\bigoplus_{i \in I} X_i, \{X_i : i \in I\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_i : i \in I\})$.

Для кожного $\alpha \in I$ підпростори X_α та $V_\alpha = \bigcup_{i \in I \setminus \{\alpha\}} X_i$ взаємодоповнювані та відкрито-замкнені в X. Тому, за тверджденням 1, підпростори Y_α та $W_\alpha = \bigcup_{i \in I \setminus \{\alpha\}} Y_i$ замкнені та взаємодоповнювані в Y. Отже, кожен підпростір Y_α відкрито-замкнений в Y. Звідки отримуємо, шо $Y = \bigoplus_{i \in I} Y_i$. Оскільки кожен підпростір Y_i є ретрактом у Y, то топологія $G(Y_i)$ збігається з топологією $F(Y_i)$. Тобто, $Y_i \in M[X_i]$. □

Твердження 3. *Нехай* $\{(X_i, x_i) : i \in I\}$ *— сім'я топологічних просторів з відміченими точками. Тоді*

$$M[\bigvee_{i \in I} X_i, \{X_i : i \in I\}] = \{(\bigvee_{i \in I} Y_i, \{Y_i : i \in I\}) : Y_i \in M^*[X_i]\}.$$

Доведення. Включення

$$M[\bigvee_{i \in I} X_i, \{X_i : i \in I\}] \supseteq \{(\bigvee_{i \in I} Y_i, \{Y_i : i \in I\}) : Y_i \in M^*[X_i]\}.$$

випливає з теореми 5 з [4].

Доведемо обернене включення. Нехай

$$(\bigvee_{i \in I} X_i, \{X_i : i \in I\}) \overset{M}{\sim} (Z, \{Z_i : i \in I\}).$$

Приймемо $Z_0 = \bigcap\limits_{i\in I} Z_i$. За твердженням 1 з [4] маємо, що $|Z_0| = \left|\bigcap_{i\in I} X_i\right| = 1$. За тим самим твердженням маємо, що $Z_i \cap Z_j = Z_0$ для всіх $i, j \in I$. Оскільки усі підпростори X_i замкнені в $\underset{i\in I}{\vee} X_i$, а також усі об'єднання $\underset{i\in J}{\vee} X_i$, де $J \subseteq I$, є замкненими в $\underset{i\in I}{\vee} X_i$, то усі підпростори Z_i замкнені в Z і всі об'єднання $\bigcup\limits_{i\in J} Z_i$, де $J \subseteq I$, замкнені в Z. Отже, простір Z є букетом сім'ї просторів $\{Z_i : i \in I\}$. Кожен підпростір Z_i є P-вкладеним у Z, а тому звуження ізоморфізму $h\colon F(\underset{i\in I}{\vee} X_i) \to F(Z)$ на підпростір $G(X_i)$ є топологічним ізоморфізмом $F(X_i) \to F(Z_i)$, причому $h\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) = \bigcap\limits_{i\in I} Z_i$. Отож, $Z_i \in M^*[X_i]$. □

Твердження 4. *Для топологічного простору X та його підпростору A має місце рівність*

$$M[X, \overline{A}, A] = \{(Y, \overline{B}, B) : (Y, B) \in M[X, A]\}.$$

Доведення. Включення $M[X, \overline{A}, A] \supseteq \{(Y, \overline{B}, B) : (Y, B) \in M[X, A]\}$ випливає з теореми 1 з роботи [4].

Доведемо обернене включення. Нехай $(X, \overline{A}, A) \overset{M}{\sim} (Y, Z, B)$. Тоді $(X, A) \overset{M}{\sim} (Y, B)$. Оскільки властивість замкненості зберігається відношенням M-еквівалентності, то множина Z є замкненою в Y. За теоремою 1 з [4] маємо, що $(Y, \overline{B}, B) \overset{M}{\sim} (Y, Z, B)$ причому існує топологічний ізоморфізм $i\colon F(Y) \to F(Y)$ такий, що $i|_{G(B)} = 1_{G(B)}$. Оскільки множина $G(B)$ є всюди щільною в $\overline{G(B)}$, то $i|_{\overline{G(B)}} = 1_{\overline{G(B)}}$, звідки $Z = \overline{B}$. □

Узагальнюючи твердження 4, сформулюємо таке твердження.

Твердження 5. *Для довільного топологічного простору X та сім'ї його підпросторів $\{X_i : i \in I\}$ виконується рівність*

$$M[X, \{\overline{X_s} : s \in S\}, \{X_s : s \in S\}] =$$
$$= \{(Y, \{\overline{Y_s} : s \in S\}, \{Y_s : s \in S\}) : (Y, \{Y_s\}) \in M[X, \{X_s\}]\}.$$

Як випливає з твердження 1 з [4] сім'я M-еквівалентна до Δ-системи є Δ-системою. У праці [2] було доведено, що властивість бути G-ретрактом зберігається відношенням M-еквівалетності у класі мережевних просторів. Отже, властивість бути Δ_G-системою зберігається відношенням M-еквівалетності у класі мереживних просторів.

Теорема 1. *Нехай X — мереживний простір, $X_1, X_2, \dots, X_n \subseteq X$ — його підпростори, які утворюють Δ_G-систему. Тоді*

$$M[X, X_1, X_2, \dots, X_n] = \{(Y, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) : Y_1, Y_2, \dots, Y_1 \subseteq Y,$$
$$Y_1/Y_0 \in M^*[X_1/X_0], Y_2/Y_0 \in M^*[X_2/X_0], \dots, Y_n/Y_0 \in M^*[X_n/X_0], Y_0 \in M[X_0],$$
$$\textit{де } X_0 = \bigcap_{i=1}^{n} X_i,\ Y_0 = \bigcap_{i=1}^{n} Y_i \textit{ і підпростори } Y_i \textit{ утворюють } \Delta_G\textit{-систему в } Y\}.$$

Доведення. Включення $\supseteq$ випливає з теореми 4 з [6].

Доведемо включення $\subseteq$. Нехай $(X, X_1, X_2, \ldots, X_n) \overset{M}{\sim} (Y, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$. Оскільки простір M-еквівалентний мереживному простору є мереживним, то простір Y є мереживним [9]. Оскільки властивість бути G-ретрактом зберігається в класі мереживних просторів, то підпростір Y є G-ретрактом простору Y. □

Теорема 2. *Нехай X — мережевний простір, K — G-ретракт в X, $\{K_i : i \in I\}$ — сім'я підпросторів в X. Тоді*

$$M[X, K, (K_i : i \in I)] = \{(Y, P, (P_i : i \in I)),$$

P є G-ретрактом в Y, $Y/P \in M^*[X/K]$, $(P, (P_i : i \in I)) \in M[K, (K_i : i \in I)]\}$.

Доведення. Включення $\supseteq$ випливає з теореми 4 з [4]. Доведемо включення $\subseteq$. Оскільки простір M-еквівалентний мережевному простору є мережевним, то простір Y мережевниq [9]. Оскільки властивість бути G-ретрактом зберігається в класі мережевних просторів, то усі підпростори Y_i є G-ретрактами в Y. Далі доведення випливає з теореми 4 з [5]. □

Теорема 3. *Нехай X — мереживний простір, $X_n \subseteq X_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq X_1 \subseteq X$ — його G-ретракти. Тоді*

$$M[X, X_1, X_2, \ldots, X_n] = \{(Y, Y_1, X_2, \ldots, Y_n) : Y_n \subseteq Y_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq Y_1 \subseteq Y,$$
$$Y/Y_1 \in M^*[X/X_1], Y_1/Y_2 \in M^*[X_1/X_2], \ldots, Y_n/Y_{n-1} \in M^*[X_n/X_{n-1}], Y_n \in M[X_n]$$
$$\textit{і всі підпростори } Y_i \textit{ є } G\textit{-ретрактами в } Y\}.$$

Доведення. Включення $\supseteq$ випливає з теореми 4 з [4]. Доведемо включення $\subseteq$. Оскільки простір M-еквівалентний мереживному простору є мереживним, то простір Y мереживниq [9]. Оскільки властивість бути G-ретрактом зберігається в класі мережевних просторів, то усі підпростори Y_i є G-ретрактами в Y. Далі доведення випливає з теореми 4 з [5]. □

З теореми 1 випливає таке твердження.

Твердження 6. *Нехай X — мереживний простір, X_1, X_2 — його підпростори такі, що підпростір $X_1 \cup X_2$ є G-ретрактом в X, підпростір $X_1 \cap X_2$ є G-ретрактом в $X_1 \cup X_2$. Тоді*

$$M[X, X_1, X_2] = \{(Y, Y_1, Y_2) : Y/(Y_1 \cup Y_2) \in M^*[X/(X_1 \cup X_2)],$$
$$Y_1/(Y_1 \cap Y_2) \in M^*[X_1/(X_1 \cap X_2)], Y_2/(Y_1 \cap Y_2) \in M^*[X_2/(X_1 \cap X_2)], Y_1 \cap Y_2 \in M[X_1 \cap X_2],$$
$$\textit{підпростір } Y_1 \cup Y_2 \textit{ є } G\textit{-ретрактом в } Y, \textit{ підпростір } Y_1 \cap Y_2 \textit{ є } G\textit{-ретрактом в } Y_1 \cup Y_2\}.$$

Твердження 7. *Нехай $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів тихоновського простору таких, що простір $K = \bigcap\limits_{s \in S} X_s$ є непорожнім, $a \in K$. Тоді*

$$A[X, \{X_s\}, \{a\}] = \{(Y, \{Y_s\}, \{b\}) : (Y, \{Y_s\}) \in A[X, \{X_s\}], b \in \bigcap_{s \in S} Y_s\}$$

Доведення. Включення $\subseteq$ очевидне. Включення $\supseteq$ випливає з твердження 2 з [5]. □

Узагальнюючи твердження 4 і 6 сформулюємо таке твердження

Твердження 8. *Незай A — підпростір тихоновського простору X, $a \in A$. Тоді*

$$A[X, \overline{A}, A, \{a\}] = \{(Y, \overline{B}, B, \{b\}) : (Y, B) \in A[X, A], b \in B\}.$$

Усі твердження цього розділу, а також їхні доведення легко переносяться для відношень A-еквівалентності та L-еквівалентності.

Твердження 9. *Нехай X, Y — тихоновські простори,*

$$(X, \{X_i : i \in I\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_i : i \in I\}),$$

$H(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ — функція на множинах, яка є скінченною композицією операцій об'єднання, перетину та замикання. Тоді для довільних $i_1, i_2, \ldots i_n \in I$ виконується умова

$$(X, \{X_i : i \in I\}, H(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n})) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_i : i \in I\}, H(Y_{i_1}, Y_{i_2}, \ldots, Y_{i_n})).$$

Доведення. Твердження випливає з теореми 1 і твердження 1 з [4]. □

Твердження 10. *Нехай $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів тихоновського простору X, $H(A_1, A_2, \ldots A_n)$ — функція на множинах, яка є скінченною композицією операцій об'єднання, перетину та замикання. Тоді для довільних $i_1, i_2, \ldots i_n \in I$ виконується рівність*

$$M[X, (X_i, \{X_i : i \in I\}), H(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n})] = \{Y, (Y_i, \{Y_i : i \in I\}, H(Y_{i_1}, Y_{i_2}, \ldots, Y_{i_n}):$$
$$(X, \{X_i : i \in I\}) \in M[Y, \{Y_i : i \in I\}].$$

Доведення. Включення $\subseteq$ очевидне. Включення $\supseteq$ випливає з твердження 9. □

Твердження 11. *Нехай $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я замкнених підпросторів тихоновського простору X, $\{Y_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів тихоновського простору Y. На множині X розглянемо відношення еквівалентності $\sim_X$, прийнявши $x \sim_X y$, якщо $x = y$ або $x, y \in K = \bigcap\limits_{s \in S} X_s$. Позначимо через $p_X \colon X \to X/\sim_X$ R-факторне відображення. На просторі Y аналогічно означимо відношення $\sim_Y$ і R-факторне відображення $p_Y \colon Y \to Y/\sim_Y$. Якщо*

$$(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\}),$$

то

$$(p_X(X), \{p_X(X_s) : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (p_Y(Y), \{p_Y(Y_s) : s \in S\}).$$

Доведення. Якщо простір $K = \bigcap\limits_{s \in S} X_s$ порожній, то відображення p_X є гомеоморфізмом. Тоді простір $P = \bigcap\limits_{s \in S} Y_s$ також порожній і відображення p_Y є також гомеоморфізмом. Якщо простір $K = \bigcap\limits_{s \in S} X_s$ непорожній, то за теоремою 1 з [5] існує спеціальний топологічний ізоморфізм $h \colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $h(G(X_s)) = G(Y_s)$ для всіх $s \in S$. А тому за наслідком 1 з [5] матимемо, що

$$(p_X(X), \{p_X(X_s) : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (p_Y(Y), \{p_Y(Y_s) : s \in S\}).$$

□

3. Нульвимірні простори та ізоморфна класифікація наборів

Як булодоведено у [1] і [7] для зліченних компактних ізоморфні класифікації вільних топологічних груп у сенсі Маркова та Граєва, вільних абелевих топологічних груп, вільних локально опуклих просторів збігаються, тобто відношення M, M^*, A та L-еквівалентності збігаються. Будемо називати простори еквівалентні в цьому сенсі f-еквівалентними. Нагадаємо, що кожен замкнений підпростір нульвимірного метризованого простору є його ретрактом. Простір f-еквівалентний компактному зліченному є компактним зліченним. Це випливає з того, що потужності двох базисів у вільній групі збігаються, а також з того, що компактність зберігається відношенням M-еквівалентності [1].

Теорема 4. *Нехай X — зліченний компактний простір, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — його замкнені диз'юнктні підпростори. Тоді*

$$M[X, X_1, X_2, \ldots, X_n] = A[X, X_1, X_2, \ldots, X_n] = L[X, X_1, X_2, \ldots, X_n] =$$

$$= \{Y, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n : Y_i \in M[X_i], X/(\bigcup_{i=1}^{n} X_i) \in M[Y/(\bigcup_{i=1}^{n} Y_i)]$$

$$\textit{і всі підпростори } Y_i \textit{ замкнені та диз'юнктні в } Y\}.$$

Доведення. Позначимо множину, що стоїть після останнього знака рівності через T. Включення

$$M[X, X_1, X_2, \ldots, X_n] \subseteq A[X, X_1, X_2, \ldots, X_n] \subseteq L[X, X_1, X_2, \ldots, X_n]$$

виконується для довільних наборів. Доведемо включення $L[X, X_1, X_2, \ldots, X_n] \subseteq T$. Оскільки замкненість зберігається відношенням L-еквівалентності, то всі підпростори Y_i замкнені в Y. З твердження 1 з [4] випливає, що всі простори Y_i диз'юнктні. Оскільки кожен підпростір Y_i зліченний компакт, то з умови $X \in L[X_i]$ випливає умова $X \in M[X_i]$. Оскільки простір $Y/(\bigcup\limits_{i=1}^{n} Y_i)$ також зліченний компакт, то з умови $X/(\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i) \in L[Y/(\bigcup\limits_{i=1}^{n} Y_i)]$ випливає умова $X/(\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i) \in M[Y/(\bigcup\limits_{i=1}^{n} Y_i)]$.

Доведемо включення $T \subseteq M[X, X_1, X_2, \ldots, X_n]$. Простір $\bigcup\limits_{i=1}^{n} Y_i$ — замкнений підпростір зліченного компактного простору Y, а тому є його ретрактом. Для зліченних компактних просторів X та Y умова $X \overset{M}{\sim} Y$ рівносильна умові $X \overset{M^*}{\sim} Y$. Тепер залишається застосувати наслідок 3 з [6]. □

Твердження 12. *Нехай X — зліченний компактний простір, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — його замкнені підпростори, що утворюють Δ-систему, $K = \bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i$. Тоді*

$$M[X, X_1, X_2, \ldots, X_n] = A[X, X_1, X_2, \ldots, X_n] = L[X, X_1, X_2, \ldots, X_n] =$$

$$= \{Y, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n : Y_i/(\bigcap_{i=1}^{n} Y_i) \in M[X_i/K], \bigcap_{i=1}^{n} Y_i \in M[K], Y/(\bigcup_{i=1}^{n} Y_i) \in M[X/(\bigcup_{i=1}^{n} X_i)]$$

$$\textit{і всі підпростори } Y_i \textit{ є замкненими та утворюють } \Delta\textit{-систему в } Y\}.$$

Доведення. Позначимо множину, що стоїть після останнього знака рівності через T. Включення

$$M[X, X_1, X_2, \dots, X_n] \subseteq A[X, X_1, X_2, \dots, X_n] \subseteq L[X, X_1, X_2, \dots, X_n]$$

виконується для довільних наборів.

Доведемо включення $L[X, X_1, X_2, \dots, X_n] \subseteq T$. Нехай $(Y, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \in L[X, X_1, X_2, \dots, X_n]$. Приймемо $S = \bigcap\limits_{i=1}^{n} Y_i$. З твердження 1 з [4] випливає, що підпростори Y_i є замкненими й утворюють Δ-систему в Y. З твердження, аналогічного до твердження 1 для відношення L–еквівалентності, матимемо, що $Y/(\bigcup\limits_{i=1}^{n} Y_i) \in L[X/(\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i)]$, $S \in L[K]$, $Y_i/S \in L[X_i/K]$. Оскільки замкненість зберігається відношенням L-еквівалентності, то всі простори Y_i та простір S є замкненими в Y. З того, що простори $Y/(\bigcup\limits_{i=1}^{n} Y_i)$,$S$ та $Y_i/S \in L(X_i/K)$ є зліченними компактними, випливає, що $Y/(\bigcup\limits_{i=1}^{n} Y_i) \in M^*[X/(\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i]$,$S \in M[K]$, $Y_i/S \in M^*[X_i/K]$.

Включення $T \subseteq M[X, X_1, X_2, \dots, X_n]$ випливає з твердження 1. □

Якщо в твердженні 12 простір K є одноточковим, то отримаємо таке твердження.

Твердження 13. *Нехай X — зліченний компактний простір, $X_1, X_2, \dots, X_n$ — його замкнені простори, що утворюють букет. Тоді*

$$M[X, X_1, X_2, \dots, X_n] = A[X, X_1, X_2, \dots, X_n] = L[X, X_1, X_2, \dots, X_n] =$$
$$= \{Y, Y_1, Y_2, \dots, Y_n : Y_i \in M[X_i], X/(\bigcup_{i=1}^{n} X_i) \in M[Y/(\bigcup_{i=1}^{n} Y_i)]$$
і всі підпростори Y_i є замкненими в Y і утворюють букет$\}$.

Твердження 14. *Нехай X — зліченний компактний простір, $X_n \subseteq X_{n-1} \subseteq \dots \subseteq X_1 \subseteq X$ — його замкнені підпростори. Тоді*

$$M[X, X_1, X_2, \dots, X_n] = A[X, X_1, X_2, \dots, X_n] = L[X, X_1, X_2, \dots, X_n] =$$
$$= \{(Y, Y_1, X_2, \dots, Y_n) : Y_n \subseteq Y_{n-1} \subseteq \dots \subseteq Y_1 \subseteq Y,$$
$$Y/Y_1 \in M[X/X_1], Y_1/Y_2 \in M[X_1/X_2], \dots, Y_n/Y_{n-1} \in M[X_n/X_{n-1}], Y_n \in M[X_n].$$
і всі підпростори Y_i є замкненими в $Y\}$.

Доведення. Позначимо множину, що стоїть після останнього знака рівності через T. Включення

$$M[X, X_1, X_2, \dots, X_n] \subseteq A[X, X_1, X_2, \dots, X_n] \subseteq L[X, X_1, X_2, \dots, X_n]$$

виконується для довільних наборів.

Доведемо включення $L[X, X_1, X_2, \dots, X_n] \subseteq T$. Нехай $(Y, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \in L[X, X_1, X_2, \dots, X_n]$. Очевидно з умови $X_{i+1} \subseteq X_i$ випливає умова $Y_{i+1} \subseteq Y_i$. З твердження, аналогічного до твердження 3 для відношення L–еквівалентності матимемо, що $Y_i/Y_{i+1} \in L[X_i/X_{i+1}]$, $Y_n \in L[X_n]$. Оскільки замкненість зберігається відношенням L-еквівалентності, то всі простори Y_i є замкненими в Y.

З того, що простори Y_i/Y_{i+1} та Y_n є зліченними компактними, випливає, що $Y_i/Y_{i+1} \in M^*[X_i/X_{i+1}]$, $Y_n \in M[X_n]$.

Включення $T \subseteq M[X, X_1, X_2, \ldots, X_n]$ випливає з твердження 3. □

З твердження 12 випливає таке твердження.

Твердження 15. *Нехай X — зліченний компактний простір, X_1, X_2 — його замкнені підпростори. Тоді* $M[X, X_1, X_2] = A[X, X_1, X_2] = L[X, X_1, X_2] = \{(Y, Y_1, Y_2) : Y/(Y_1 \bigcup Y_2) \in M^*[X/(X_1 \bigcup X_2)],\ X_1/(X_1 \bigcap X_2) \in M[Y_1/(Y_1 \bigcap Y_2)], X_2/(X_1 \bigcap X_2) \in M[Y_2/(Y_1 \bigcap Y_2)], X_1 \bigcap X_2 \in M[Y_1 \bigcap Y_2]$.

Твердження 16. *Нехай X — нульвимірний простір, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — його довільні, попарно різні точки. Тоді*

$$A[X, \{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\}] = \{(Y, \{y_1\}, \{y_2\}, \ldots, \{y_n\}) : Y \in A[X],\\ y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y,\ \textit{де}\ y_i \neq y_j\ \textit{при}\ i \neq j\}.$$

Доведення. Включення $\subseteq$ очевидне. Доведемо включення $\supseteq$. Нехай $Y \in A[X]$, $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$ — довільні різні точки. Оскільки простори $X_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ та $Y_1 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ — дискретні, то набори $(X_1, \{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\})$ та $(Y_1, \{y_1\}, \{y_2\}, \ldots, \{y_n\})$ A-еквівалентні. Позаяк кожен скінченний підпростір нульвимірного простору є його ретрактом, то тепер залишається застосувати твердження 9 з [6]. □

Аналогічно до твердження 16 доводиться таке твердження.

Твердження 17. *Нехай X — нульвимірний простір, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — його довільні, попарно різні точки. Тоді*

$$L[X, \{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\}] = \{(Y, \{y_1\}, \{y_2\}, \ldots, \{y_n\}) : Y \in L[X],\\ y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y,\ \textit{де}\ y_i \neq y_j\ \textit{при}\ i \neq j\}.$$

Список використаної літератури

1. М. И. Граев, *Свободные топологические группы*, Известия АН СССР. Сер. мат. **12** (1948), no. 3, 279–324.
2. Н. М. Пирч, *М-еквівалентність пар*, Прикладні проблеми математики і механіки, **2** (2004), 74–79.
3. Н. М. Пирч, *Узагальнені ретракти і ізоморфізми вільних топологічних груп*, Мат. студії **33** (2010), no. 1, 29–38.
4. Н. М. Пирч, *Еквівалентність за Марковим наборів тихоновських просторів 1: загальні властивості*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **84** (2017), 38–46.
5. Н. М. Пирч, *Еквівалентність за Марковим наборів тихоновських просторів 2: спеціальні ізоморфізми*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **88** (2019), 59–69.
6. Н. М. Пирч, *Еквівалентність за Марковим наборів тихоновських просторів 4: узагальнені ретракти та ізоморфна класифікація*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **92** (2021), 61–76. DOI: 10.30970/vmm.2021.92.061-076
7. J. Baars, *Equivalence of certain free topological groups*, Commentat. Math. Univ. Carol. **33** (1992), no. 1, 125–130.
8. R. Engelking, *General Topology* // Heldermann Verlag, Berlin, 1989, 529 p.
9. O. V. Sipacheva, *On stratifiability of free abelian topological groups*, Topol. Proc. **18** (1993), 271–311.

10. O. V. Sipacheva, *Free topological groups of spaces and their subspaces*, Topology Appl. **101** (2000), no. 3, 181–212. DOI: 10.1016/S0166-8641(98)00123-0

Стаття: надійшла до редколегії 02.01.2023
доопрацьована 19.01.2023
прийнята до друку 22.04.2023

ON MARKOV EQUIVALENCE OF THE BUNDLES OF THE TYCHONOFF SPACES 5: CLASSES OF EQUIVALENCE

Nazar PYRCH

Lviv Polytechnic National University,
Bandery St., 12, 79013, Lviv, UKRAINE
e-mail: pnazar@ukr.net

In the paper we consider the bundles of Tychonoff spaces for which it is possible to fully describe class of bundles M-equivalent to this.

Key words: free topological group, bundle of topological spaces, M-equivalence, generalized retract.