ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2022. Випуск 94. С. 146–155
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2022. Issue 94. P. 146–155
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.94.146-155

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ БУСІНЕСКА-СТОКСА

Мар'яна ХОМА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: mariana.khoma@lnu.edu.ua

Розглянуто нелінійні параболічні системи зі змінними показниками нелінійності. Доведено теорему єдиності узагальненого розв'язку мішаної задачі для цієї системи.

Ключові слова: нелінійна параболічна система, інтегро-диференційна система, узагальнений простір Лебега, змінний показник нелінійності.

1. Вступ

Нехай $n \in \mathbb{N}$ – фіксоване число, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, де $0 \le t_1 < t_2 \le T$, $\Omega_\tau = \{(x,t) \mid x \in \Omega,\ t = \tau\}$, де $\tau \in [0,T]$. Розглянемо задачу знаходження функцій $u = (u_1, \ldots, u_n) : Q_{0,T} \to \mathbb{R}^n$, $\pi : Q_{0,T} \to \mathbb{R}$ та $\theta : Q_{0,T} \to \mathbb{R}$, що задовольняють такі співвідношення:

$$u_t - A\,\Delta u + G\,|u|^{q(x)-2}u + \int\limits_{\Omega} \mathfrak{Z}(x,t,y)u(y,t)\,dy + B\,\theta + \nabla\pi = F(x,t) \quad \text{в} \quad Q_{0,T}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{в} \quad Q_{0,T}, \tag{2}$$

$$\theta_t - a\Delta\,\theta + (b,u)_{\mathbb{R}^n} = f(x,t) \quad \text{в} \quad Q_{0,T}, \tag{3}$$

$$\int\limits_{\Omega} \pi(x,t)\,dx = 0 \quad \text{на} \quad (0,T), \tag{4}$$

$$u|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \tag{5}$$

$$\theta|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \tag{6}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{7}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{8}$$

2020 Mathematics Subject Classification: 35K55, 35D30, 46E30, 60H15

де $A, G, a > 0$ – деякі числа, $\mathfrak{Z}$ – матриця-функція порядку n, $B, b \in \mathbb{R}^n$ – деякі вектори, $q = q(x)$ – змінний показник нелінійності.

Системи Нав'є-Стокса з постійними показниками нелінійності досліджуються в [1], [2], [3] (див. також наведену там літературу). Параболічні системи Стокса та інші рівняння зі змінними показниками нелінійностей досліджено в [4], [5], [6]. Системи Бусінеска для рівнянь Нав'є-Стокса з постійними показниками нелінійності вивчено, наприклад, у [7], [8]. Системи Стокса з постійними та змінними показниками нелінійностей досліджено в наших попередніх працях [9], [10]. Системи Бусінеска-Стокса зі змінними показниками нелінійності досліджено, мабуть, вперше.

2. Формулювання задачі та основних результатів

Спершу введемо потрібні нам позначення. Норму банахового простору B позначимо через $||\cdot; B||$. Нехай $\mathcal{O} = \Omega$ або $\mathcal{O} = Q_{0,T}$, $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ – множина вимірних за Лебегом функцій $v : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$, $L^p(\mathcal{O})$ – стандартний простір Лебега, $H^s(\Omega)$ та $H_0^s(\Omega)$ – стандартні простори Соболєва

$$\mathcal{B}_+(\mathcal{O}) := \Big\{ \mathfrak{q} \in L^\infty(\mathcal{O}) \;\mid\; \operatorname*{ess\,inf}_{y \in \mathcal{O}} \mathfrak{q}(y) > 0 \Big\}. \tag{9}$$

Для кожної функції $\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ через $\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}^0$ визначимо числа

$$\mathfrak{q}_0 := \operatorname*{ess\,inf}_{y \in \mathcal{O}} \mathfrak{q}(y), \qquad \mathfrak{q}^0 := \operatorname*{ess\,sup}_{y \in \mathcal{O}} \mathfrak{q}(y), \tag{10}$$

а через $S_\mathfrak{q}$ – функцію

$$S_\mathfrak{q}(s) := \max\{s^{\mathfrak{q}_0},\, s^{\mathfrak{q}^0}\}, \quad s \geq 0. \tag{11}$$

Якщо $\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ і $\mathfrak{q}_0 > 1$, то визначимо $\mathfrak{q}' \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ так:

$$\mathfrak{q}'(y) := \frac{\mathfrak{q}(y)}{\mathfrak{q}(y) - 1} \quad \text{майже для всіх (м.д.в.)} \quad y \in \mathcal{O}. \tag{12}$$

Зауважимо, що $\dfrac{1}{\mathfrak{q}(y)} + \dfrac{1}{\mathfrak{q}'(y)} = 1$, $y \in \mathcal{O}$.

Нехай $\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ і $\mathfrak{q}_0 \geq 1$. Узагальненим простором Лебега $L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})$ називають лінійний простір функцій $v \in \mathcal{M}(\mathcal{O})$, для яких виконується нерівність

$$\rho_\mathfrak{q}(v; \mathcal{O}) := \int\limits_{\mathcal{O}} |v(y)|^{\mathfrak{q}(y)}\, dy < +\infty. \tag{13}$$

Розглядатимемо $L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})$ з нормою Люксембурга

$$||v; L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})|| := \inf\{\lambda > 0 \;\mid\; \rho_\mathfrak{q}(v/\lambda; \mathcal{O}) \leq 1\}. \tag{14}$$

Коли $\mathfrak{q}_0 > 1$, то $L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})$ є рефлексивним сепарабельним банаховим простором (див. [11, с. 599, 600, 604]). Узагальнені простори Лебега ввів В. Орліч у [12]. Властивості таких просторів досліджено, зокрема, у [11], [13], [14], [15].

Для кожної функції $u \in L^1(Q_{0,T}) = L^1(0,T;L^1(\Omega))$ маємо, що $u(\cdot,t) \in L^1(\Omega)$, $t \in (0,T)$. Для зручності писатимемо просто $u(t)$ замість $u(\cdot,t)$. Нехай $s \in \mathbb{N}$,

$$(u,v)_\Omega := \begin{cases} \int\limits_\Omega (u(x),v(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx, & u=(u_1,\ldots,u_n), v=(v_1,\ldots,v_n):\Omega\to\mathbb{R}^n, \\ \int\limits_\Omega u(x)v(x)\,dx, & u,v:\Omega\to\mathbb{R}. \end{cases} \tag{15}$$

Розглянемо простір Соболєва $[H^s(\Omega)]^n$ зі скалярним добутком

$$((u,v))_s := \sum_{i=1}^n (u_i,v_i)_{H^s(\Omega)}, \quad u,v \in [H^s(\Omega)]^n. \tag{16}$$

Нехай

$$C_{\mathrm{div}} := \big\{u \in [C_0^\infty(\Omega)]^n \ \mid\ \operatorname{div} u = 0\big\}, \tag{17}$$

$$H \ \ \text{– замикання} \ \ C_{\mathrm{div}} \ \ \text{в} \ \ [L^2(\Omega)]^n, \tag{18}$$

$$Z_s \ \ \text{– замикання} \ \ C_{\mathrm{div}} \ \ \text{в} \ \ [H^s(\Omega)]^n, \tag{19}$$

де

$$\begin{aligned} ||h;H|| &:= ||h;[L^2(\Omega)]^n|| = \sum_{l=1}^n ||h_l;L^2(\Omega)||, \\ & h=(h_1,\ldots,h_n)\in H, \\ ||z;Z_s|| &:= \sqrt{((z,z))_s}, \\ & z=(z_1,\ldots,z_n)\in Z_s. \end{aligned}$$

Також нехай

$$\begin{aligned} V_1 &:= Z_1 \cap [L^{q(x)}(\Omega)]^n, \\ U_1(Q_{0,T}) &:= L^2(0,T;Z_1)\cap[L^{q(x)}(Q_{0,T})]^n, \\ V_2 &:= H_0^1(\Omega), \\ U_2(Q_{0,T}) &:= L^2(0,T;V_2). \end{aligned}$$

Визначимо допоміжні оператори так:

$$(\mathtt{N}u)(x,t) := G|u(x,t)|^{q(x)-2}u(x,t), \ \ u=u(x,t); \tag{20}$$

$$(E(t)z)(x) := \int\limits_\Omega \mathfrak{Z}(x,t,y)z(y)\,dy, \quad z=z(x); \tag{21}$$

$$(\mathtt{E}u)(x,t) := \big(E(t)u(t)\big)(x) = \int\limits_\Omega \mathfrak{Z}(x,t,y)u(y,t)\,dy, \quad u=u(x,t). \tag{22}$$

Припустимо, що виконуються такі умови:

(A): $A,G,a>0$, $B,b\in\mathbb{R}^n$;
(Q): $q\in\mathcal{B}_+(\Omega)$, $q_0>1$;
(E): $\mathfrak{Z}$ – квадратна матриця порядку n з елементами з простору $L^\infty(Q_{0,T}\times\Omega)$;
(F): $F\in[L^2(Q_{0,T})]^n$, $f\in L^2(Q_{0,T})$;

(U): $u_0 \in H$, $\theta_0 \in L^2(\Omega)$.

Нехай $h = \min\left\{2, \ \dfrac{q^0}{q^0-1}\right\}$. Дамо означення розв'язку нашої задачі.

Означення 1. Трійка функцій $\{u, \pi, \theta\}$ називається узагальненим розв'язком задачі (1)–(8), якщо

$$\begin{aligned} u &\in U_1(Q_{0,T}) \cap C([0,T]; V_1^*), \\ u_t &\in [U_1(Q_{0,T})]^*, \\ \pi &\in W^{-1,\infty}(0,T; L^h(\Omega)), \\ \theta &\in U_2(Q_{0,T}) \cap C([0,T]; V_2^*), \\ \theta_t &\in [U_2(Q_{0,T})]^*; \end{aligned}$$

для всіх $z \in U_1(Q_{0,T})$, $v \in U_2(Q_{0,T})$ та $\tau \in (0,T]$ виконуються рівності

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[(u_t, z)_{\mathbb{R}^n} + A\sum_{i=1}^{n}(u_{x_i}, z_{x_i})_{\mathbb{R}^n} + (\mathtt{N}u, z)_{\mathbb{R}^n} + (\mathtt{E}u, z)_{\mathbb{R}^n} + \\ + \theta(B, z)_{\mathbb{R}^n} - (F, z)_{\mathbb{R}^n}\Big]\, dxdt = 0, \tag{23}$$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\theta_t v + a\sum_{i=1}^{n}\theta_{x_i} v_{x_i} + (b, u)_{\mathbb{R}^n} v - fv\Big]\, dxdt = 0; \tag{24}$$

виконуються початкові умови (7)–(8); функція π задовольняє (1) в сенсі простору $[D^*(Q_{0,T})]^n$ і задовольняє (4) в сенсі простору $D^*(0,T)$.

Основний результат статті – така теорема.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* **(A)–(U)**, *то задача* (1)–(8) *не може мати більше одного узагальненого розв'язку* $\{u, \pi, \theta\}$.

Перш ніж перейти до доведення теореми 1 розглянемо математичну модель, в якій виникають системи Бусінеска-Стокса (1)-(3).

3. Виникнення класичної системи рівнянь Бусінеска

Конвекція, яка пов'язана з неоднорідним нагріванням, є одним найбільш розповсюдженим видом протікання рідин і газів у Всесвіті. Значну роль вона відіграє і в різних технічних пристроях. Це пояснює постійне зацікавлення вчених конвекцією. Останнім часом цей інтерес стимулюється такою обставиною: задачі про конвекцію дають багато матеріалу для розроблення нових ідей, які стосуються співвідношення порядку і хаосу в гідродинаміці, поведінки гідродинамічних об'єктів тощо.

Часто предметом вивчення є конвекція в плоскому горизонтальному шарі рідини, який підігрівають знизу – *конвекція Релея-Бенара*. Вона містить риси, які характерні для багатьох явищ гідродинамічної нестійкості. Водночас за такої конвекції, через відсутність інтенсивного потоку, просторові та часові ефекти в значній мірі розщеплені, а це створює значні умови для експериментального, та теоретичного її вивчення. Конвекція Релея-Бенара дає багато можливостей для дослідження процесів самовільного виникнення впорядкованих просторових структур і ставить цікаві запитання щодо реалізації форм і масштабів течій – відбору тих, які виявляються найбільш оптимальними.

Розглянемо задачу (див. [16, с. 3–5]), яка охоплює систему гідродинамічних рівнянь в наближенні Бусінеска (або Обербека-Бусінеска). Візьмемо плоский горизонтальний шар рідини $0 \le z \le h$ (вісь OZ декартової системи координат (x, y, z) напрямлена вверх) і будемо вважати, що температура $T = T(x, y, z, t)$ його недеформованих верхніх і нижніх поверхонь фіксована

$$T|_{z=0} = T_1, \qquad T|_{z=h} = T_2 \equiv T_1 - \Delta T, \tag{25}$$

де $\Delta T = \beta h$, β – незбурений градієнт температури. Щільність рідини ρ вважається функція лише однієї температури T (тобто припускається нестисненність)

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0 \alpha (T - T_0). \tag{26}$$

Тут ρ_0 – значення щільності при деякій, вибраній потрібним чином "середній" температурі T_0, α – коефіцієнт об'ємного теплового розширення. Відомо, що при малому α і малій варіації матеріальних параметрів середовища (кінематичної в'язкості ν та температуропровідності χ) для доволі повільних процесів, щільність і ці параметри можна вважати сталими для всіх членів рівняння, крім одного: варіація щільності зберігається там, де вона множиться на прискорення сили тяжіння g (цей член є архімедовою силою, яка і породжує конвекцію). За цих і деяких інших умов класичні рівняння Бусінеска набувають вигляду (див. [16, с. 4])

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla) u = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} - \alpha \theta \, \mathbf{g} + \nu \, \Delta u, \tag{27}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (u, \nabla) T = \chi \Delta T, \tag{28}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{29}$$

де u – швидкість рідини, $\theta = T - T_1 + \beta z$ – збуренням температури, p' – збурення тиску p, тобто його відхилення від розподілу, що відповідає цьому температурному профілю, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$. Традиційно такі рівняння доповнюють відповідними крайовими і початковими умовами, що ми і робимо далі.

У літературі зустрічається декілька способів переходу в цій задачі до безрозмірних змінних. Далі будемо використовувати найбільш розповсюджений. Як одиниці довжини виберемо товщину шару h, одиниці часу – час вертикальної дифузії тепла $\tau_u = h^2/\chi$, одиниці температури – різницю температур ΔT між поверхнями шару. Тоді (27)–(29) набуде такого безрозмірного вигляду (див. [16, с. 4–5]):

$$\frac{1}{P} \Big[\frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla) u \Big] = -\nabla \pi + \widehat{z} R \, \theta + \Delta u, \tag{30}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (u, \nabla) \theta = \Delta \theta + u_z, \tag{31}$$

$$\operatorname{div} u = 0. \tag{32}$$

Тут $R = \dfrac{\alpha g \Delta T h^3}{\nu\chi}$ та $P = \dfrac{\nu}{\chi}$ – основні параметри, що характеризують режим конвекції, які називаються числами Релея і Прандтля відповідно, π – безрозмірна форма величини $\dfrac{p'}{\rho_0}$, $\widehat{z}$ – одиничний вектор у напрямі осі OZ.

Аналогічно як в [16, с. 5] вважатимемо u та θ нескінченно малими та лінеаризуємо рівняння (30)–(31). Отримаємо таку систему рівнянь, яку називатимемо системою Бусінеска-Стокса:

$$\frac{1}{P}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \widehat{z} R\,\theta = -\nabla\pi, \tag{33}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \Delta\theta - u_z = 0, \tag{34}$$

$$\operatorname{div} u = 0. \tag{35}$$

Наша система (1)-(3) є певним узагальненням щойно отриманої системи (33)-(35).

4. Допоміжні твердження

Нехай $\mathbb{Z}_{\geq -1} := \{s \in \mathbb{Z} \mid s \geq -1\}$, $s \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$, $p \in [1,\infty]$, $W^{s,p}(\Omega)$ – стандартний простір Соболєва, Y – деякий банахів простір,
$W^{0,p}(0,T;Y) := L^p(0,T;Y)$ та

$$W^{-1,p}(0,T;Y) := \left\{ f \in D^*(0,T;Y) \;\middle|\; f = f_0 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial y_j},\ f_j \in L^p(0,T;Y)\ (0 \leq j \leq N) \right\}.$$

Нагадаємо одне відоме твердження.

Твердження 1 (узагальнена теорема де Рама, див. твердження 7 [4, с. 171]**).** *Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – відкрита обмежена область з ліпшицевою межею, $T > 0$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$, $h_1, h_2 \in [1,\infty]$, $\mathcal{F} \in W^{s_1,h_1}(0,T;[W^{s_2,h_2}(\Omega)]^n)$. Тоді якщо*

$$\langle \mathcal{F}(\cdot), v\rangle_{[D(\Omega)]^n} = 0 \quad \textit{в} \quad D^*(0,T) \tag{36}$$

для всіх $v \in C_{div}$, то існує єдиний елемент

$$\pi \in W^{s_1,h_1}(0,T;W^{s_2+1,h_2}(\Omega)), \tag{37}$$

який задовольняє співвідношення

$$\nabla\pi = \mathcal{F} \quad \textit{в просторі} \quad [D^*(Q_{0,T})]^n, \tag{38}$$

$$\int\limits_{\Omega} \pi(x,\cdot)\, dx = 0 \quad \textit{в просторі} \quad D^*(0,T). \tag{39}$$

Крім того, існує таке число $C_1 > 0$ (яке не залежить від $\mathcal{F},\pi$), що

$$||\pi; W^{s_1,h_1}(0,T;W^{s_2+1,h_2}(\Omega))|| \leq C_1 ||\mathcal{F}; W^{s_1,h_1}(0,T;[W^{s_2,h_2}(\Omega)]^n)||. \tag{40}$$

Зараз наведемо кілька допоміжних оцінок.

Зауваження 1. Якщо $u = (u_1, ..., u_n) \in [L^2(\mathcal{O})]^n$, де $\mathcal{O} = \Omega$ чи $\mathcal{O} = Q_{0,T}$, то

$$|| \, |u|; L^2(\mathcal{O})||^2 = \int\limits_{\mathcal{O}} |u|^2 \, dy = \sum_{l=1}^{n} ||u_l; L^2(\mathcal{O})||^2 \leq n||u; [L^2(\mathcal{O})]^n||^2,$$

$$|| \, |u|; L^2(\mathcal{O})|| \leq \sqrt{n}||u; [L^2(\mathcal{O})]^n||. \tag{41}$$

Лема 1. *Якщо виконується умова* **(E)**, *то оператори* $\mathtt{E} : [L^2(Q_{0,T})]^n \to [L^2(Q_{0,T})]^n$, $E(t) : [L^2(\Omega)]^n \to [L^2(\Omega)]^n$, $t \in (0,T)$, *є лінійними, обмеженими та неперервними. Крім того, виконуються оцінки*

$$|| \, |E(t)z|; L^2(\Omega)|| \leq E^0 \cdot || \, |z|; L^2(\Omega)|| \leq \sqrt{n}E^0||z; [L^2(\Omega)]^n||, \quad z \in [L^2(\Omega)]^n, \tag{42}$$

$$|| \, |\mathtt{E}u|; L^2(Q_{0,\tau})|| \leq E^0|| \, |u|; L^2(Q_{0,\tau})|| \leq$$

$$\leq \sqrt{n}E^0||u; [L^2(Q_{0,\tau})]^n||, \; u \in [L^2(Q_{0,T})]^n, \tag{43}$$

$\tau \in (0,T]$, *де* $E^0 = ess \sup\limits_{t\in(0,T)} \Big(\int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{\Omega} ||\mathfrak{Z}(x,t,y)||_n^2 \, dy \Big)^{1/2}$, $|| \cdot ||_n$ *– норма матриці.*

Доведення. З нерівності Коші-Буняковського й умови **(E)** випливає, що

$$\begin{aligned}
|| \, |E(t)z|; L^2(\Omega)||^2 &= \int\limits_{\Omega} |(E(t)z)(x)|^2 \, dx = \\
&= \int\limits_{\Omega} \Big| \int\limits_{\Omega} \mathfrak{Z}(x,t,y)z(x) \, dy \Big|^2 \, dx \leq \\
&\leq \int\limits_{\Omega} \Big| \int\limits_{\Omega} ||\mathfrak{Z}(x,t,y)||_n \cdot |z(y)| \, dy \Big|^2 \, dx \leq \\
&\leq \int\limits_{\Omega} \Big(\int\limits_{\Omega} ||\mathfrak{Z}(x,t,y)||_n^2 \, dy \Big) \Big(\int\limits_{\Omega} |z(y)|^2 \, dy \Big) \, dx \leq \\
&\leq |E^0|^2 \int\limits_{\Omega} |z(y)|^2 \, dy = \\
&= |E^0|^2 \cdot || \, |z|; L^2(\Omega)||,
\end{aligned}$$

тобто маємо (42). Оцінку (43) доводимо аналогічно. □

5. Доведення основних результатів

Доведення теореми 1. Нехай $\{u^1, \pi^1, \theta^1\}$ та $\{u^2, \pi^2, \theta^2\}$ є розв'язками задачі (1)–(8), $w = u^1 - u^2$, $M = \theta^1 - \theta^2$. Запишемо рівності (23)–(24) для трійки $\{u^1, \pi^1, \theta^1\}$:

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[(u_t^1, z)_{\mathbb{R}^n} + A\sum_{i=1}^{n} (u_{x_i}^1, z_{x_i})_{\mathbb{R}^n} + (G|u^1|^{q(x)-2}u^1, z)_{\mathbb{R}^n} + (\mathtt{E}u^1, z)_{\mathbb{R}^n} +$$

$$+ \theta^1(B, z)_{\mathbb{R}^n} - (F(x,t), z)_{\mathbb{R}^n} \Big] \, dxdt = 0, \tag{44}$$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\theta_t^1 v + a\sum_{i=1}^{n} \theta_{x_i}^1 v_{x_i} + (b, u^1)_{\mathbb{R}^n} v - f(x,t)v\Big]\, dxdt = 0. \tag{45}$$

Запишемо (23)–(24) для $\{u^2, \pi^2, \theta^2\}$:

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[(u_t^2, z)_{\mathbb{R}^n} + A\sum_{i=1}^{n}(u_{x_i}^2, z_{x_i})_{\mathbb{R}^n} + (G|u^2|^{q(x)-2}u^2, z)_{\mathbb{R}^n} + (\mathtt{E}u^2, z)_{\mathbb{R}^n} + \\ + \theta^2(B, z)_{\mathbb{R}^n} - (F(x,t), z)_{\mathbb{R}^n}\Big]\, dxdt = 0, \tag{46}$$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[\theta_t^2 v + a\sum_{i=1}^{n} \theta_{x_i}^2 v_{x_i} + (b, u^2)_{\mathbb{R}^n} v - f(x,t)v\Big]\, dxdt = 0. \tag{47}$$

Віднявши (46) від (44) і (47) від (45), отримаємо:

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[(w_t, z)_{\mathbb{R}^n} + A\sum_{i=1}^{n}(w_{x_i}, z_{x_i})_{\mathbb{R}^n} + G(|u^1|^{q(x)-2}u^1 - |u^2|^{q(x)-2}u^2, z)_{\mathbb{R}^n} + (\mathtt{E}w, z)_{\mathbb{R}^n} + \\ + M(B, z)_{\mathbb{R}^n}\Big]\, dxdt = 0, \tag{48}$$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[M_t v + a\sum_{i=1}^{n} M_{x_i} v_{x_i} + v(b, w)_{\mathbb{R}^n}\Big]\, dxdt = 0. \tag{49}$$

Візьмемо в (48) $z = w$, а в (49) $v = M$. Додавши отримані рівності одержимо:

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[(w_t, w)_{\mathbb{R}^n} + M_t M + A\sum_{i=1}^{n}|w_{x_i}|^2 + a\sum_{i=1}^{n}|M_{x_i}|^2\Big]\, dxdt = I, \tag{50}$$

де

$$I = -\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[G(|u^1|^{q(x)-2}u^1 - |u^2|^{q(x)-2}u^2, u^1 - u^2)_{\mathbb{R}^n} + \\ + (\mathtt{E}w, w)_{\mathbb{R}^n} + M(B, w)_{\mathbb{R}^n} + M(b, w)_{\mathbb{R}^n}\Big]\, dxdt.$$

Використавши оцінку (43), отримаємо таке:

$$I \le \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[|\mathtt{E}w|\cdot|w| + |M|\cdot|B+b|\cdot|w|\, dxdt \le C_1 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big(|w|^2 + |M|^2\Big)\, dxdt.$$

Тому оскільки

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[(w_t, w)_{\mathbb{R}^n} + M_t M\Big]\, dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |w|^2\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |M|^2\, dx,$$

то з (50) отримаємо нерівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|w|^2 + |M|^2\Big]\, dx \le C_1 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big(|w|^2 + |M|^2\Big)\, dxdt,\ \ \tau \in (0, T].$$

Тому, використавши лему Гронуола-Белмана, звідси отримаємо, що

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \Big[|w|^2 + |M|^2\Big]\,dx \le 0, \quad \tau \in (0,T].$$

Отже, $u^1 = u^2$ та $\theta^1 = \theta^2$.

Далі проробимо стандартні перетворення (див., наприклад, [17, с. 200–201]). З (23)–(24) для функцій $u^1 = u^2$ та $\theta^1 = \theta^2$ на підставі твердження 1 матимемо рівність $\nabla(\pi^1 - \pi^2) = 0$ в сенсі простору $[D^*(Q_{0,T})]^n$. Тому $\pi^1(t) - \pi^2(t) = c(t)$ для майже всіх $t \in (0,T)$ і аналогічно як в [17, с. 200], використавши умову (4), матимемо $c = 0$. Отже, $\pi^1 = \pi^2$ і теорему доведено. □

Список використаної літератури

1. R. Temam, *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*, North-Holland Publ., Amsterdam, New York, Oxford, 1979.
2. J. Simon, *Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density and preassure*, SIAM J. Math. Anal. **21** (1990), no. 5, 1093–1117. DOI: 10.1137/0521061
3. J. A. Langa, J. Real, and J. Simon, *Existence and regularity of the pressure for the stochastic Navier-Stokes equations*, Appl. Math. Optimization **48** (2003), no. 3, 195–210. DOI: 10.1007/s00245-003-0773-7
4. O. M. Buhrii, *Visco-plastic, newtonian, and dilatant fluids: Stokes equations with variable exponent of nonlinearity*, Mat. Studii. **49** (2018), no. 2, 165–180.
5. O. Buhrii and N. Buhrii, *Nonlocal in time problem for anisotropic parabolic equations with variable exponents of nonlinearities*, J. Math. Anal. Appl. **473** (2019), no. 2, 695-711. DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.12.058
6. M. Bokalo, O. Buhrii, and N. Hryadil, *Initial-boundary value problems for nonlinear elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity in unbounded domains without conditions at infinity*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods **192** (2020), Article ID 111700, 17 p. DOI: 10.1016/j.na.2019.111700 5
7. J. R. Cannon and E. DiBenedetto, *The initial value problem for the Boussinesq equations with data in L^p*, Approximation methods for Navier-Stokes problems, Proc. Symp. IUTAM, Paderborn 1979, Lect. Notes Math. **771** (1980), 129–144.
8. C. Conca and M. A. Rojas-Medar, *The initial value problem for the Boussinesq equations in a time-dependent domain*, Technical report, Universidad de Chile. 1993. P. 1–16.
9. O. Buhrii and M. Khoma, *On initial-boundary value problem for nonlinear integro-differential Stokes system*, Visnyk Lviv Univ. Series Mech.-Math. **85** (2018), 107–119.
10. M. V. Khoma and O. M. Buhrii, *Stokes system with variable exponents of nonlinearity*, Буковин. мат ж. **10** (2022), no. 2, 28–42. DOI: 10.31861/bmj2022.02.03
11. O. Kovacik and I. Rakosnic, *On spaces $L^{p(x)}, W^{k,p(x)}$*, Czechosl. Math. J. **41** (1991), no. 4, 592–618.
12. W. Orlicz, *Uber Konjugierte Exponentenfolgen*, Stud. Math. **3** (1931), 200–211. DOI: 10.4064/sm-3-1-200-211
13. S. Antontsev and S. Shmarev, *Evolution PDEs with nonstandard growth conditions. Existence, uniqueness, localization, blow-up*, Atlantis Studies in Diff. Eq., Vol. 4, Paris: Atlantis Press, 2015.
14. L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, and M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, Springer, Heidelberg, 2011.

15. X.-L. Fan and D. Zhao, *On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$*, J. Math. Anal. Appl. **263** (2001), no. 2, 424–446. DOI: 10.1006/jmaa.2000.7617
16. А. В. Гетлинг, *Формирование пространственных структур конвекции Рэлея–Бенара*, УФН, **161** (1991), no. 9, 1–80; **English version:** A. V. Getling, *Formation of spatial structures in Rayleigh–Bénard convection*, Sov. Phys. Usp. **34** (1991), no. 9, 737–776. DOI: 10.1070/PU1991v034n09ABEH002470
17. H. Sohr, *The Navier-Stokes equations: an elementary functional analytic approach*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin, 2001.

Стаття: надійшла до редколегії 09.09.2022
доопрацьована 13.10.2022
прийнята до друку 22.12.2022

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL BOUSSIENSQ-STOKES SYSTEMS

Mariana KHOMA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: mariana.khoma@lnu.edu.ua

Some nonlinear parabolic systems with variable exponents of the nonlinearity are considered. The initial-boundary value problem for these systems is investigated and the uniqueness theorem for the problem is proved.

Key words: nonlinear parabolic system, integro-differential system, generalized Lebesgue space, variable exponent of nonlinearity.