ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2022. Випуск 94. С. 109–145
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2022. Issue 94. P. 109–145
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.94.109-145

УДК 517.95

КОРЕКТНІСТЬ ЗАДАЧІ ФУР'Є ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ В НЕОБМЕЖЕНИХ ЗА ВСІМА ЗМІННИМИ ОБЛАСТЯХ БЕЗ УМОВ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

Микола БОКАЛО, Тарас БОКАЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів, 79000
e-mails: mm.bokalo@gmail.com, tbokalo@gmail.com

Досліджено задачу Фур'є з неоднорідними крайовими умовами для нелінійних параболічних систем зі змінними показниками нелінійності в необмежених за всіма змінними областях без умов на нескінченності. Доведено існування, єдиність і неперервну залежність від вхідних даних узагальнених розв'язків таких задач у відповідних узагальнених просторах Лебега та Соболєва. Отримано апріорні оцінки узагальнених розв'язків досліджуваних задач.

Ключові слова: задача Фур'є, параболічна система, нелінійне параболічне рівняння, змінний показник нелінійності, необмежена область, метод Фаедо-Гальоркіна, метод монотонності.

1. Вступ

Описуючи процеси теплопровідності або дифузії в момент, який достатньо віддалений від початкового (коли початковий стан практично не впливає на проходження процесу), зазвичай, виникає задача про відшукання розв'язку параболічного рівняння чи системи, який визначений для всіх значень часової змінної з проміжку $(-\infty, T)$ (початковий момент збігається з $-\infty$) і задовольняє відповідні крайові умови. Зрозуміло, що в цьому випадку початкових умов у класичному сенсі ставити не можна. Таку задачу називають задачею Фур'є або задачею без початкових умов для відповідних рівнянь чи систем. Формулюючи ці задачі, замість класичної початкової умови потрібно, можливо, накладати певні умови на поведінку розв'язку, коли часова змінна прямує до $-\infty$. І це, як показують відповідні приклади, справді так є для лінійних і багатьох нелінійних рівнянь [1, 2, 3]. Але існують нелінійні рівняння, для яких розв'язки задачі Фур'є однозначно визначаються без умов на

2020 Mathematics Subject Classification: 35D30, 35G50, 35G60, 35K41, 45K05

їх поведінку при прямуванні часової змінної до $-\infty$ [4, 5]. Крім того, для певних класів нелінійних параболічних рівнянь в необмежених за всіма змінними областях для єдиності розв'язків відповідних задач також не потрібно умов на їх поведінку при прямуванні всіх змінних до нескінченності [6, 7, 8, 9, 10, 11]. Проілюструємо це на прикладі задачі

$$u_t - u_{xx} + |u|^{p-2}u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \qquad u|_{x=0} = 0,$$

де $Q := (0,+\infty) \times (-\infty, T]$, $p \geqslant 2$, $T > 0$ — довільні фіксовані сталі, $f : Q \to \mathbb{R}$ — деяка функція. Легко переконатися, що при $p = 2$ (лінійне рівняння) і $f = 0$ ця задача має безліч класичних розв'язків вигляду $u_A(x,t) := Axe^{-t}$, $(x,t) \in Q$, де A — довільна дійсна стала. Як випливає з результатів праці [1] єдиність класичного розв'язку такої задачі буде за додаткової умови на його поведінку на нескінченності вигляду: $|u(x,t)| \leqslant Ce^{-t}$, $\;(x,t) \in Q$, де $C > 0$ — деяка, залежна від u, стала, а існування класичного розв'язку цієї задачі, який задовольняє згадану додаткову умову, гарантується умовами: f — неперервна і $|f(x,t)| \leqslant Be^{-t}$, $(x,t) \in Q$, де $B > 0$ — деяка, залежна від f, стала.

Але в [7] вперше було доведено, що у випадку, коли $p > 2$ і $f : Q \to \mathbb{R}$ — будь-яка вимірна функція така, що її звуження на множину $Q_R := (0,R) \times (T-R, T]$ належить простору $L^{p'}(Q_R)$ для будь-якого $R > 0$, де p' — спряжене до p, тобто $1/p + 1/p' = 1$, ця задача має тільки один узагальнений розв'язок, який є класичним за певної гладкості функції f.

Ми розглядаємо новий клас нелінійних параболічних систем, для якого вірний такий самий результат стосовно задачі Фур'є. Рівняння в цих системах мають змінні показники нелінійності. Такого типу рівняння активно досліджуються в багатьох працях [12, 13, 14, 15, 16]. Це пов'язано з тим, що рівняння зі змінними показниками нелінійності виникають при математичному моделюванні різних типів фізичних процесів і, зокрема, описують потоки електрореологічних речовин, процеси відновлення зображень, електричний струм у кондукторі під впливом змінного температурного поля [14].

2. Основні позначення та поняття

Нехай n, N — які-небудь натуральні числа. Під $\mathbb{R}^k$, де $k = n$ або $k = N$, розумітимемо лінійний простір, складений з впорядкованих наборів $y = (y_1, \ldots, y_k)^\top$ дійсних чисел у вигляді вектор-стовпчиків і наділений скалярним добутком $(y,z) := \sum\limits_{i=1}^{k} y_i z_i$ і нормою $|y| := \big(\sum\limits_{i=1}^{k} |y_i|^2\big)^{1/2}$. Під $\mathbb{R}^{N\times n}$ розумітимемо лінійний простір дійсних матриць $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^n)$, де $\eta^k = (\eta^k_1, \ldots, \eta^k_N)^\top \in \mathbb{R}^N, k = \overline{1,n}$, з нормою $|\eta| := \big(\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{k=1}^{n} |\eta^k_i|^2\big)^{1/2}$.

Нехай Ω — необмежена область у просторі $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею $\Gamma := \partial\Omega$; ν — одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ. Не зменшуючи загальності, припустимо, що $0 \in \Omega$ і для довільного $R > 0$ позначимо через Ω_R зв'язну компоненту множини $\Omega \cap \{x : |x| < R\}$ таку, що $0 \in \Omega_R$. Приймемо $\Gamma_R := \Gamma \cap \partial\,\Omega_R$ для довільного $R > 0$.

Розглянемо лінійний простір $C^1(\overline{\Omega})$ (складений з неперервно-диференційовних в Ω функцій, які разом зі своїми похідними першого порядку мають неперервне продовження на $\overline{\Omega}$) і його підпростір $C^1_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$, елементами якого є функції з носіями, що є компактами в $\overline{\Omega}$, та підпростір $C^1_{\mathrm{c}}(\Omega)$, елементами якого є функції з носіями, що є компактами в Ω. Очевидно, що $C^1_{\mathrm{c}}(\Omega) \subset C^1_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega}) \subset C^1(\overline{\Omega})$.

Для будь-якого $q \in [1, \infty]$ позначимо

$$L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \{v(x), x \in \Omega \,:\, v|_{\Omega_R} \in L^q(\Omega_R) \;\forall R > 0\}.$$

Тут і далі під $v|_{\Omega_R}$ розумітимемо звуження функції $v(x), x \in \Omega$, на множину Ω_R.

Для довільного $R > 0$ під $H^1(\Omega_R)$ розумітимемо простір Соболєва визначених на Ω_R функцій, тобто $H^1(\Omega_R) := \{v \in L^2(\Omega) \,:\, v_{x_j} \in L^2(\Omega),\, j = \overline{1,n}\}$, з нормою

$$\|v\|_{H^1(\Omega_R)} := \left(\int\limits_{\Omega_R} \left[|\nabla v(x)|^2 + |v(x)|^2 \right] dx \right)^{1/2},$$

де тут і далі $\nabla v(x) = (v_{x_1}(x), ..., v_{x_n}(x))$, $x \in \Omega$, — градієнт функції v. Приймемо

$$H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) := \{v \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \,:\, v_{x_j} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\, j = \overline{1,n}\}$$

і на цьому просторі введемо систему півнорм за правилом: $\left\{ \|v\|_{H^1(\Omega_R)},\; R > 0 \right\}$. Ця система півнорм задає топологію локально опуклого простору. Замикання простору $C^1_{\mathrm{c}}(\Omega)$ в $H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ позначатимемо через $\overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Очевидно, що збіжність послідовності $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ (відповідно, в $\overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$) означає існування елемента $v \in H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ (відповідно, $v \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$) такого, що $\|v_k - v\|_{H^1(\Omega_R)} \to 0$ при $k \to \infty$ для кожного $R > 0$.

Під $\overset{\circ}{H}{}^1_R(\Omega)$, де $R > 0$ — будь-яке, розумітимемо замикання в просторі $H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ його підпростору $\{v \in C^1_c(\Omega) \,:\, \operatorname{supp} v \subset \Omega_R\}$. Очевидно, що простір $\overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ є індуктивною границею сім'ї просторів $\{\overset{\circ}{H}{}^1_R(\Omega) \,:\, R > 0\}$. Приймемо $\overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{c}}(\Omega) := \bigcup\limits_{R>0} \overset{\circ}{H}{}^1_R(\Omega)$.

Через $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_R)$ позначимо простір, складений зі звужень елементів простору $\overset{\circ}{H}{}^1_R(\Omega)$ на область Ω_R, тобто замикання в $H^1(\Omega_R)$ простору

$$C^1_c(\Omega_R) := \{v \in C^1(\Omega_R) \,:\, \operatorname{supp} v \subset \Omega_R\}.$$

Нехай $T \in \mathbb{R}$ — яке-небудь число. Позначимо

$$Q := \Omega \times (-\infty, T), \quad \Sigma := \Gamma \times (-\infty, T);$$

$$Q_R := \Omega_R \times (T - R, T), \quad \Sigma_R = \Gamma_R \times (T - R, T), \quad R > 0.$$

Для довільного $R > 0$ введемо простори

$$H^{1,0}(Q_R) := \{w \in L^2(Q_R) \,:\, w_{x_j} \in L^2(Q_R),\, j = \overline{1,n}\}$$

з нормою

$$\|w\|_{H^{1,0}(Q_R)} := \left(\int\limits_{\Omega_R} \left[|\nabla w(x,t)|^2 + |w(x,t)|^2 \right] dxdt \right)^{1/2};$$

$$H_0^{1,0}(Q_R) := \{w \in H^{1,0}(Q_R) \,:\, w(\cdot,t) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_R) \quad \text{для м. в.} \;\; t \in (T-R,T)\},$$

а також простори

$$L^q_{\rm loc}(\overline{Q}) = \{v(x,t), (x,t) \in Q \,:\, v|_{Q_R} \in L^q(Q_R) \;\; \forall R > 0\}, \quad q \in [1,\infty];$$

$$H^{1,0}_{\rm loc}(\overline{Q}) = \{v \in L^2_{\rm loc}(\overline{Q}) \,:\, v_{x_j} \in L^2_{\rm loc}(\overline{Q}), \; j = \overline{1,n}\};$$

$$H^{1,0}_{0,{\rm loc}}(\overline{Q}) = \{v \in H^{1,0}_{\rm loc}(\overline{Q}) \,:\, v(\cdot,t) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\rm loc}(\overline{\Omega}) \quad \text{для м. в.} \;\; t \in (-\infty,T)\}.$$

У просторах $L^q_{\rm loc}(\overline{Q}), H^{1,0}_{\rm loc}(\overline{Q})$ і $H^{1,0}_{0,{\rm loc}}(\overline{Q})$ визначаємо збіжність послідовностей так само, як в $L^q_{\rm loc}(\overline{\Omega})$ чи $H^1_{\rm loc}(\overline{\Omega})$, тобто послідовність елементів простору $L^q_{\rm loc}(\overline{Q})$ чи $H^{1,0}_{\rm loc}(\overline{Q})$ (відповідно, $H^{1,0}_{0,{\rm loc}}(\overline{Q})$) збіжна в $L^q_{\rm loc}(\overline{Q})$ чи $H^{1,0}_{\rm loc}(\overline{Q})$ (відповідно, в $H^{1,0}_{0,{\rm loc}}(\overline{Q})$), якщо для кожного $R > 0$ послідовність звужень на Q_R членів заданої послідовності є збіжною відповідно в $L^q(Q_R)$ та $H^{1,0}(Q_R)$. Простори $L^q_{\rm loc}(\overline{Q})$, $H^{1,0}_{\rm loc}(\overline{Q})$, $H^{1,0}_{0,{\rm loc}}(\overline{Q})$ є локально опуклими просторами.

Приймемо

$$C((-\infty,T]; L_{2,{\rm loc}}(\overline{\Omega})) = \{v : Q \to \mathbb{R} \;:\; t \mapsto v(\cdot,t)|_{\Omega_R} \in C((-\infty,T];\, L_2(\Omega_R)) \, \forall\, R > 0\}.$$

Скажемо, що послідовність $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ збіжна до v в $C((-\infty,T]; L_{2,{\rm loc}}(\overline{\Omega}))$, якщо для кожного $R > 0$ послідовність $\{v_k|_{Q_R}\}$ збіжна до $v|_{Q_R}$ в $C([T-R,T]; L_2(\Omega_R))$.

Нехай D — довільна область в $\mathbb{R}^n$, $r \in L^\infty(D)$ — яка-небудь функція така, що $r(x) \geqslant 1$ для майже всіх $x \in D$, причому якщо $r(x) > 1$ для майже всіх $x \in D$, то $r'(x)$, $x \in D$, — функція, яка визначена рівністю $\dfrac{1}{r(x)} + \dfrac{1}{r'(x)} = 1$ для майже всіх $x \in D$. Нехай $L^{r(\cdot)}(D)$ є лінійний простір (класів) вимірних функцій $v : D \to \mathbb{R}$, для яких функціонал $\rho_{r,D}(v) := \displaystyle\int_D |v(x)|^{r(x)}\, dx$ приймає скінчені значення, з нормою

$$\|v\|_{L^{r(\cdot)}(D)} := \inf\{\lambda > 0 \,:\, \rho_{r,D}(v/\lambda) \leqslant 1\}.$$

Цей простір називають *узагальненим простором Лебега* або *простором Лебега зі змінним показником підсумування* (див., наприклад, [14]). Зазначимо таке: якщо

$$r(x) = r = {\rm const} \geqslant 1$$

для майже всіх $x \in D$, то $L^{r(\cdot)}(D) = L^r(D)$ і $\|\cdot\|_{L^{r(\cdot)}(D)} = \|\cdot\|_{L^r(D)}$. Відомо, що коли

$$1 < \operatorname*{ess\,inf}_{x\in D} r(x) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in D} r(x) < \infty,$$

то спряжений до $L^{r(\cdot)}(D)$ простір можна ототожнити з простором $L^{r'(\cdot)}(D)$. Якщо $G := D \times (T_0, T_1)$ $(-\infty \leqslant T_0 < T_1 \leqslant +\infty)$, то простір $L^{r(\cdot)}(G)$ визначаємо подібно до $L^{r(\cdot)}(D)$ з функціоналом

$$\rho_{r,G}(w) := \iint_D |w(x,t)|^{r(x)}\, dxdt$$

замість $\rho_{r,D}(v)$.

Нехай $p \in L^\infty_{\rm loc}(\overline{\Omega})$, причому $p(x) \geqslant 1$ для майже всіх $x \in Q$. Для кожного $R > 0$ приймемо $\rho_{p,R}(w) := \rho_{p,Q_R}(w)$. Приймемо

$$L^{p(\cdot)}_{\rm loc}(\overline{Q}) = \big\{w \in L^1_{\rm loc}(\overline{Q}) : w|_{Q_R} \in L^{p(\cdot)}(Q_R) \;\; \forall\, R > 0\big\}.$$

На просторі $L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ вводиться топологія, за якою збіжність послідовностей його елементів визначається так само, як в $L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$.

Позначимо через $C^1_c(-\infty, T)$ лінійний простір неперервно диференційовних функцій, які визначені на промені $(-\infty, T)$ і носії яких є компактами на цьому промені.

3. Постановка задачі і формулювання основного результату

Нехай X — деяка множина. Через X^N позначатимемо декартів степінь множини X з показником N ($X^N := \underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{N\text{-разів}}$), елементи якого записуватимемо у вигляді вектор-стовпчиків. Якщо X— лінійний топологічний (відповідно, нормований) простір, то на X^N природним чином вводиться лінійна структура та топологія (відповідно, норма).

Позначимо

$$\mathbb{P} := \{p \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega) \,:\, \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega_R} p(x) > 1 \ \forall R > 0\}.$$

Очевидно, що коли $p \in \mathbb{P}$, то $p' \in \mathbb{P}$, де $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{p'(x)} = 1$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Під $\mathbb{A}_p$, де $p \in \mathbb{P}$, розумітимемо множину впорядкованих наборів $(a^0, a^1, \ldots, a^n)$=:(a^j) з $n+1$ визначених на $Q \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times n}$ зі значеннями в $\mathbb{R}^N$ вектор-функцій

$$a^j(x,t,\xi,\eta) := (a^j_1(x,t,\xi,\eta), ..., a^j_N(x,t,\xi,\eta))^\top,$$
$$(x,t,\xi,\eta) \in Q \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times n},\ j = \overline{0,n},$$

які задовольняють такі умови:

1) для кожного $j \in \{0,1,...,n\}$ вектор-функція $a^j : Q \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R}^N$є каратеодорівською, тобто для будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^N$ і $\eta \in \mathbb{R}^{N\times n}$ вектор-функція $a^j(\cdot,\xi,\eta) : Q \to \mathbb{R}^N$— вимірна за Лебегом та для майже всіх $(x,t) \in Q$ вектор-функція $a^j(x,t,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times n} \to \mathbb{R}^N$— неперервна;

2) для майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^N, \eta \in \mathbb{R}^{N\times n}$ виконуються нерівності

$$|a^0_i(x,t,\xi,\eta)| \leqslant h^0_{i,1}(x,t)(|\xi|^{p(x)-1} + |\eta|^{2/p'(x)}) + h^0_{i,2}(x,t), \quad i = \overline{1,N},$$

$$|a^j_i(x,t,\xi,\eta)| \leqslant h^j_{i,1}(x,t)(|\xi| + |\eta|) + h^j_{i,2}(x,t), \quad i = \overline{1,N}, \quad j = \overline{1,n},$$

де $h^j_{i,1} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{0,n}$; $h^0_{i,2} \in L^{p'(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$; $h^j_{i,2} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,n}$.

Нехай $\mathbb{F}_p$ —множина, елементами якої є впорядковані набори $(f^0, f^1, \ldots, f^n) =: (f^j)$ з $n+1$ визначених на Q вектор-функцій зі значеннями в $\mathbb{R}^N$ (тобто $f^j = (f^j_1, \ldots, f^j_N)^\top$, де $f^j_i : Q \to \mathbb{R}^N$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{0,n}$), які задовольняють умову: $f^0_i \in L^{p'(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $f^j_i \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,n}$, тобто $\mathbb{F}_p := L^{p'(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \times \big[L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})\big]^{N-1}$.

Приймемо

$$\Phi_p := \{\varphi \in [H^{1,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})]^N : \varphi_t \in [L^{p'(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})]^N\}.$$

Будемо говорити, що послідовність $\{\varphi^k\}_{k=1}^\infty \subset \Phi_p$ збігається до φ в Φ_p, якщо $\varphi^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ в $[H^{1,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})]^N$ і $\varphi^k_t \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_t$ в $[L^{p'(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})]^N$.

Позначимо

$$\mathbb{U}_p := [H^{1,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C((-\infty,T]; L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))]^N.$$

А тепер сформулюємо *задачу*, яку далі будемо досліджувати.

Нехай $(a^0, a^1, \dots, a^n) =: (a^j) \in \mathbb{A}_p$, $(f^0, f^1, \dots, f^n) =: (f^j) \in \mathbb{F}_p$, $\varphi \in \Phi_p$ — довільно задані. Будемо шукати функцію $u = (u_1, \dots, u_N)^\top \in \mathbb{U}_p$, яка задовольняє (в певному сенсі) систему рівнянь

$$u_{i,t} - \sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j} a_i^j(x,t,u,\nabla u) + a_i^0(x,t,u,\nabla u) = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f_i^j(x,t) + f_i^0(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$

$i = \overline{1,N}$, та крайові умови

$$u_i = \varphi_i \quad \text{на} \ \Sigma, \quad i = \overline{1,N},$$

або те саме, але у векторній формі,

$$u_t - \sum_{j=1}^n \frac{d}{dx_j} a^j(x,t,u,\nabla u) + a^0(x,t,u,\nabla u) = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f^j(x,t) + f^0(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u = \varphi \quad \text{на} \ \Sigma. \tag{2}$$

Це є задача Фур'є або, іншими словами, задача без початкових умов для систем рівнянь вигляду (1). Далі цю задачу коротко називатимемо задачею (1), (2).

Означення 1. Узагальненим розв'язком задачі (1), (2) називають функцію $u \in \mathbb{U}_p$ таку, що $u - \varphi \in H^{1,0}_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ і виконується рівність

$$\iint_Q \big[-(u,\psi)\omega' + \big\{ \sum_{j=1}^n (a^j(x,t,u,\nabla u), \psi_{x_j}) + (a^0(x,t,u,\nabla u), \psi) \big\}\omega \big]\, dxdt =$$

$$= \iint_Q \big\{ \sum_{j=1}^n (f^j, \psi_{x_j}) + (f^0, \psi) \big\}\omega \, dxdt \tag{3}$$

для будь-яких $\psi \in [\overset{\circ}{H}{}^1_c(\Omega) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega)]^N$ і $\omega \in C^1_c(-\infty, T)$.

Множину узагальнених розв'язків (з $\mathbb{U}_p$) задачі (1), (2) для заданих значень $(a^j) \in \mathbb{A}_p$, $(f^j) \in \mathbb{F}_p$, $\varphi \in \Phi_p$ позначатимемо через $SPF((a^j), (f^j), \varphi)$.

Означення 2. Нехай $\widetilde{\mathbb{A}_p} \subset \mathbb{A}_p$, $\widetilde{\mathbb{F}_p} \subset \mathbb{F}_p$, $\widetilde{\Phi_p} \subset \Phi_p$.

Скажемо, задача (1), (2) є **однозначно розв'язною** на просторі $\widetilde{\mathbb{A}_p} \times \widetilde{\mathbb{F}_p} \times \widetilde{\Phi_p}$, якщо для будь-яких $(a^j) \in \widetilde{\mathbb{A}_p}$, $(f^j) \in \widetilde{\mathbb{F}_p}$, $\varphi \in \widetilde{\Phi_p}$ множина $SPF((a^j), (f^j), \varphi)$ складається з одного елемента.

Скажемо, задача (1), (2) є **коректною** на просторі $\widetilde{\mathbb{A}_p} \times \widetilde{\mathbb{F}_p} \times \widetilde{\Phi_p}$, якщо вона є однозначно розв'язна на цьому просторі і для довільних послідовностей $\{(a^{j,k})\}_{k=1}^\infty \subset \widetilde{\mathbb{A}_p}$, $\{(f^{j,k})\}_{k=1}^\infty \subset \widetilde{\mathbb{F}_p}$, $\{\varphi^k\}_{k=1}^\infty \subset \widetilde{\Phi_p}$ таких, що $(a^{j,k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (a^j)$ в $\widetilde{\mathbb{A}_p}$,

$(f^{j,k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (f^j)$ в $\widetilde{\mathbb{F}_p}$, $\varphi^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ в $\widetilde{\Phi_p}$, маємо $u^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$ в $\mathbb{U}_p$, де $u^k \in SPF((a^{j,k}),(f^{j,k}),\varphi^k)$, $k \in \mathbb{N}$, $\quad u \in SPF((a^j),(f^j),\varphi)$.

Окреслимо точніше проблему, яку розглядаємо стосовно коректності поставленої задачі. Як уже згадувалося вище, існують нелінійні параболічні рівняння, для яких задача Фур'є в необмежених за всіма змінними має єдиний узагальнений розв'язок. Тут нас буде цікавити питання про поширення цього результату на випадок системи рівнянь, тобто шукатимемо множину $\mathbb{P}^* \subset \mathbb{P}$ і топологічні простори $\widetilde{\mathbb{A}_p}, \widetilde{\mathbb{F}_p}, \widetilde{\Phi_p}$, де $p \in \mathbb{P}^*$ такі, що задача (1), (2) на просторі $\widetilde{\mathbb{A}_p} \times \widetilde{\mathbb{F}_p} \times \widetilde{\Phi_p}$ є коректною для кожного $p \in \mathbb{P}^*$.

Враховуючи сказане стосовно часткового випадку нашої задачі, можна висунути гіпотезу: множина $\mathbb{P}^*$ складається з елементів $\mathbb{P}$ таких, що

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p(x) =: p^- > 2, \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p(x) =: p^+ < \infty,$$

і для кожного $p \in \mathbb{P}^*$ множина $\mathbb{A}_p^*$ має елементами набори функцій $(a^j) \in \mathbb{A}_p$, які задовольняють умови:

3) існує стала $B > 0$ така, що для кожного $j = \overline{1,n}$, майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких ξ, $\widetilde{\xi}$ з $\mathbb{R}^N$ та η, $\widetilde{\eta}$ з $\mathbb{R}^{N\times n}$ виконується нерівність:

$$|a^j(x,t,\xi,\eta) - a^j(x,t,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})| \leqslant B(|\xi-\widetilde{\xi}| + |\eta-\widetilde{\eta}|)$$

(значення B може залежати від (a^j));

4) існують (залежні від (a^j)) сталі $K_1 > 0$, $K_2 \geqslant 0$, $K_3 > 0$ такі, що для майже всіх $(x,t) \in Q$ та будь-яких ξ, $\widetilde{\xi}$ з $\mathbb{R}^N$ та η, $\widetilde{\eta}$ з $\mathbb{R}^{N\times n}$ виконується нерівність:

$$\sum_{j=1}^{n}(a^j(x,t,\xi,\eta) - a^j(x,t,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}), \eta^j - \widetilde{\eta}^j) + (a^0(x,t,\xi,\eta) - a^0(x,t,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}), \xi - \widetilde{\xi}) \geqslant$$

$$\geqslant K_1|\eta-\widetilde{\eta}|^2 + K_2|\xi-\widetilde{\xi}|^2 + K_3|\xi-\widetilde{\xi}|^{p(x)},$$

причому, якщо $p^+ \geqslant \dfrac{2(n+1)}{n}$, то (обов'язково) $K_2 > 0$.

Скажемо, що послідовність $\{(a^{j,k})\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{A}_p^*$ збіжна до (a^j) в $\mathbb{A}_p^*$, якщо елементи $(a^{j,k})$, $k \in \mathbb{N}$, і елемент (a^j) задовольняють умови **3**) і **4**) з одними і тими самими сталими B, K_1, K_2, K_3 і для кожного $R > 0$ маємо

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{(x,t)\in Q_R} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N, \eta\in\mathbb{R}^{N\times n}} \Big(\frac{|a^{0,k}(x,t,\xi,\eta) - a^0(x,t,\xi,\eta)|}{|\xi|^{p(x)-1} + |\eta|^{2/p'(x)} + 1} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \frac{|a^{j,k}(x,t,\xi,\eta) - a^j(x,t,\xi,\eta)|}{|\xi| + |\eta| + 1} \Big) = 0.$$

Позначимо через $\mathbb{A}_p^{**}$ підмножину множини $\mathbb{A}_p^*$, яка складається з елементів $(a^j) \in \mathbb{A}_p^*$, які задовольняють додаткову умову:

5) для майже всіх $(x,t) \in Q$ і довільних $\xi, \widetilde{\xi} \in \mathbb{R}^N$, $\eta, \widetilde{\eta} \in \mathbb{R}^{N\times n}$ виконується нерівність

$$|a^0(x,t,\xi,\eta) - a^0(x,t,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})| \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{h}_0(x,t)\Big(\big(|\eta|+|\widetilde{\eta}|\big)^{(p(x)-2)/p(x)}|\eta-\widetilde{\eta}| + \big(|\xi|+|\widetilde{\xi}|\big)^{p(x)-2}|\xi-\widetilde{\xi}|\Big),$$

де $\widetilde{h}_0 \in L^\infty_{\rm loc}(\overline{Q})$.

Далі для спрощення записів використовуємо позначення:

$$a^j(v)(x,t) := a^j(x,t,v(x,t),\nabla v(x,t)), \quad (x,t)\in Q, \quad j=\overline{0,n}.$$

Підтвердження висунутої гіпотези є основним результатом цієї праці, який сформульований у такій теоремі.

Теорема 1. *Нехай $p\in\mathbb{P}^*$. Тоді правильні такі твердження:*

1°. *Задача (1), (2) є однозначно розв'язною на просторі $\mathbb{A}^*_p\times\mathbb{F}_p\times\Phi_p$ і для будь-яких $(a^j)\in\mathbb{A}^*_p, (f^j)\in\mathbb{F}_p$, $\varphi\in\Phi_p$ функція $u\in SPF((a^j),(f^j),\varphi)$ має оцінку*

$$\max_{t\in[T-R_0,T]}\int\limits_{\Omega_{R_0}}|u(x,t)|^2\,dx+\iint\limits_{Q_{R_0}}\big[|\nabla u|^2+K_2|u|^2+|u|^{p(x)}\big]\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\varkappa}\Big\{C_1R^{n-\frac{q}{q-2}}+C_2\iint\limits_{Q_R}\big[|f^0-a^0(\varphi)-\varphi_t|^{p'(x)}+$$

$$+\sum_{j=1}^n|f^j-a^j(\varphi)|^2\big]\,dxdt\Big\}+C_3\iint\limits_{Q_{R_0}}\big[|\nabla\varphi|^2+K_2|\varphi|^2+|\varphi|^{p(x)}\big]\,dxdt+$$

$$+C_4\max_{t\in[T-R_0,T]}\int\limits_{\Omega_{R_0}}|\varphi(x,t)|^2\,dx, \tag{4}$$

*де R_0, R — довільні сталі такі, що $0<R_0<R$, $R\geqslant 1$, а $q=p^+$, якщо $K_2=0$, і $q\in(2,p^-]\cup\{p^+\}$ при $K_2>0$; $\varkappa>\max\left\{\dfrac{3p^-}{p^--2},\dfrac{3q}{q-2}\right\}$ — довільне фіксоване число; C_1, C_2, C_3, C_4 — додатні сталі, які залежать тільки від B, K_1, K_2, K_3 (з умов **3**) і **4**)), p^-, p^+, n, q, $\varkappa$.*

2°. *Задача (1), (2) є коректною на просторі $\mathbb{A}^*_p\times\mathbb{F}_p\times\{0\}$ і і для будь-яких $(a^j)\in\mathbb{A}^*_p, (f^j)\in\mathbb{F}_p$ функція $u\in SPF((a^j),(f^j),0)$ має оцінку (4) з $\varphi=0$.*

3°. *Задача (1), (2) є коректною на просторі $\mathbb{A}^{**}_p\times\mathbb{F}_p\times\Phi_p$ і і для будь-яких $(a^j)\in\mathbb{A}^*_p, (f^j)\in\mathbb{F}_p$, $\varphi\in\Phi_p$ функція $u\in SPF((a^j),(f^j),\varphi)$ має оцінку (4).*

Зауваження 1. Прикладом системи (1), для якої правильне твердження **3°** теореми 1 (див. [10]), є рівняння

$$u_t-\sum_{j=1}^n\big(\widehat{a}^j(x,t)u_{x_j}\big)_{x_j}+\widehat{a}^0(x,t)|u|^{p(x)-2}u=f(x,t), \quad (x,t)\in Q,$$

де $p\in\mathbb{P}^*$, $p^+<\dfrac{2(n+1)}{n}$, $\widehat{a}^j\in L^\infty(Q)$, $\operatorname*{ess\,inf}_Q\widehat{a}^j>0$, $j=\overline{0,n}$.

4. Допоміжні твердження

Для доведення теореми нам будуть потрібні деякі допоміжні твердження.

Твердження 1 ([13, 14]). *Нехай $p \in \mathbb{P}$. Тоді для довільного $R > 0$ і будь-якої функції $v \in L^{p(\cdot)}(Q_R)$ правильні нерівності*

$$\mathbf{s}_{1/p}\big(\rho_{p,R}(v)\big) \leqslant \|v\|_{L^{p(\cdot)}(Q_R)} \leqslant \mathbf{S}_{1/p}\big(\rho_{p,R}(v)\big),$$

$$\mathbf{s}_p\Big(\|v\|_{L^{p(\cdot)}(Q_R)}\Big) \leqslant \rho_{p,R}(v) \leqslant \mathbf{S}_p\Big(\|v\|_{L^{p(\cdot)}(Q_R)}\Big),$$

де $\mathbf{S}_p(s) = \max\{s^{p^-}, s^{p^+}\}$, $\mathbf{s}_p(s) = \min\{s^{p^-}, s^{p^+}\}$, $\mathbf{S}_{1/p}(s) = \max\{s^{1/p^-}, s^{1/p^+}\}$, $\mathbf{s}_{1/p}(s) = \min\{s^{1/p^-}, s^{1/p^+}\}$, $s \geqslant 0$.

Нехай T_0, T_1— довільні числа, $-\infty < T_0 < T_1 < +\infty$, а $G = \Omega \times (T_0, T_1)$, $G_R = \Omega_R \times (T_0, T_1)$, $R > 0$. Простори $[L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{G})]^N$ і $[L^{p'(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{G})]^N)$ визначаються так само як, відповідно, $[L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})]^N$ та $[L^{p'(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})]^N$, використовуючи G_R замість Q_R.

Лема 1. *Нехай вектор-функції $v \in [L^2(T_0, T_1; \overset{\circ}{H}{}^1_{loc}(\overline{\Omega})) \cap L^{p(\cdot)}_{loc}(\overline{G})]^N$, $g^0 \in [L^{p'(\cdot)}_{loc}(\overline{G})]^N$, $g^j \in [L^2_{loc}(\overline{G})]^N$, $j = \overline{1,n}$ такі, що*

$$\iint\limits_G \big[-(v, \psi)\omega' + \big\{ \sum_{j=1}^n (g^j, \psi_{x_j}) + (g^0, \psi)\big\}\omega\big]\, dxdt = 0 \tag{5}$$

для будь-яких $\omega \in C^1_c(T_0, T_1)$, $\psi \in [\overset{\circ}{H}{}^1_c(\Omega) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega)]^N$, $supp\,\psi \subset \overline{\Omega_*}$, де $\Omega_* := \Omega_{R_*}$, а $R_* > 1$ — яке-небудь фіксоване число.

Тоді $v \in [C([T_0, T_1]; L^2(\Omega_R))]^N$, де $R \in (0, R_*)$ — будь-яке, і для довільних функцій $\theta \in C^1[T_0, T_1]$, $w \in C^1_c(\overline{\Omega})$, $supp\, w \subset \overline{\Omega_*}$, та будь-яких t_0, t_1, $T_0 \leqslant t_0 < t_1 \leqslant T_1$, правильна рівність

$$\theta(t_1)\int\limits_\Omega |v(x,t_1)|^2 w(x)\, dx - \theta(t_0)\int\limits_\Omega |v(x,t_0)|^2 w(x)\, dx - \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_\Omega |v(x,t)|^2 w(x)\theta'(t)\, dxdt +$$

$$+2\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_\Omega \big[\sum_{j=1}^n (g^j, (vw)_{x_j}) + (g^0, vw)\big]\theta\, dxdt = 0. \tag{6}$$

Крім того, якщо $v(x,t) = 0$ для майже всіх $(x,t) \in G \setminus G_{R_*}$, то в рівності (6) можна взяти $w = 1$.

Доведення. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $T_0 = -T$, $\quad T_1 = T$, де $T > 0$, тобто $[T_0, T_1] = [-T, T]$.

Нехай k — яке-небудь фіксоване натуральне число. Зробимо в (5) заміну змінних $t = s/\lambda_k$, де $\lambda_k = 1 + \frac{4}{kT} > 1$. У підсумку, врахувавши, що $s \in [-\lambda_k T, \lambda_k T]$, отримаємо рівність

$$\int\limits_{-\lambda_k T}^{\lambda_k T}\int\limits_{\Omega_*} \Big[-(v(x, s/\lambda_k), \psi(x))\widetilde{\omega}'(s) + \big\{\lambda_k^{-1}\sum_{j=1}^n (g^j(x, s/\lambda_k), \psi_{x_j}(x)) +$$

$$+\lambda_k^{-1}(g^0(x,s/\lambda_k),\psi(x))\big\}\widetilde{\omega}(s)\Big]\,dxdt=0 \tag{7}$$

для будь-яких функцій $\psi\in[\overset{\circ}{H}{}^1_c(\Omega_*)\cap L^{p(\cdot)}(\Omega_*)]^N$, $\widetilde{\omega}\in C^1_c(-\lambda_k T,\lambda_k T)$.

Нехай $\omega_1(z)=C_1\,e^{\frac{1}{z^2-1}}$, якщо $z\in(-1,1)$, і $\omega_1(z)=0$, якщо $z\leqslant -1$ або $z\geqslant 1$, де C_1 — стала така, що $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega_1(z)\,dz=1$. Очевидно, що $\omega_1\in C^\infty(\mathbb{R})$. Приймемо $\omega_\rho(z)=\rho^{-1}\omega_1(z/\rho)$, $z\in\mathbb{R}$, $\rho>0$. Відомо, що функції ω_ρ, $\rho>0$, є так званими ядрами усереднень.

Візьмемо в (7) $\widetilde{\omega}(s)=\omega_{1/k}(s-\tau)$, $s\in(-\lambda_k T,\lambda_k T)=(-T-4/k,T+4/k)$, де $\tau\in[-T,T]$. У підсумку отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_*}\big\{(v^k_\tau(x,\tau),\psi(x))+\sum_{i=1}^{n}(g^{j,k}(x,\tau),\psi_{x_j}(x))+(g^{0,k}(x,\tau),\psi(x))\big\}\,dx=0,\ \ \tau\in[-T,T], \tag{8}$$

де

$$v^k(x,\tau)=\int\limits_{|s-\tau|<1/k}v(x,s/\lambda_k)\omega_{1/k}(s-\tau)\,ds,\quad (x,\tau)\in\Omega\times[-T,T],$$

$$g^{j,k}(x,\tau)=\lambda_k^{-1}\int\limits_{|s-\tau|<1/k}g^j(x,s/\lambda_k)\omega_{1/k}(s-\tau)\,ds,\quad (x,\tau)\in\Omega\times[-T,T],\ j=\overline{0,n}.$$

Доведемо, що $v^k|_{G_R}\to v|_{G_R}$ в $[L^2(G_R)]^N$ при $k\to+\infty$ для будь-якого $R\in(0,R_*)$. Нехай $R>0$ — яке-небудь фіксоване число. Оскільки простір $[C(\overline{G_R})]^N$ є щільним в $[L^2(G_R)]^N$, то існує послідовність $\{\widetilde{v}^l\}_{l=1}^\infty$ елементів простору $[C(\overline{G_R})]^N$ така, що $\|v-\widetilde{v}^l\|_{[L^2(G_R)]^N}\to 0$ при $l\to\infty$.

Маємо

$$\iint\limits_{G_R}|v^k(x,\tau)-v(x,\tau)|^2\,dx\,d\tau=\iint\limits_{G_R}\Big|\int\limits_{|s-\tau|<1/k}v(x,s/\lambda_k)\,\omega_{1/k}(s-\tau)\,ds-v(x,\tau)\Big|^2\,dx\,d\tau=$$

$$=\iint\limits_{G_R}\Big|\int\limits_{|s-\tau|<1/k}\big[v(x,s/\lambda_k)-\widetilde{v}^l(x,s/\lambda_k)\big]\,\omega_{1/k}(s-\tau)\,ds+$$

$$+\int\limits_{|s-\tau|<1/k}\big[\widetilde{v}^l(x,s/\lambda_k)-\widetilde{v}^l(x,\tau/\lambda_k)\big]\cdot\omega_{1/k}(s-\tau)\,ds+$$

$$+\big[\widetilde{v}^l(x,\tau/\lambda_k)-\widetilde{v}^l(x,\tau)\big]+\big[\widetilde{v}^l(x,\tau)-v(x,\tau)\big]\Big|^2\,dx\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant 4\iint\limits_{G_R}\Big\{\Big|\int\limits_{|s-\tau|<1/k}\big[v(x,s/\lambda_k)-\widetilde{v}^l(x,s/\lambda_k)\big]\,\omega_{1/k}(s-\tau)\,ds\Big|^2+$$

$$+\Big|\int\limits_{|s-\tau|<1/k}\big[\widetilde{v}^l(x,s/\lambda_k)-\widetilde{v}^l(x,\tau/\lambda_k)\big]\cdot\omega_{1/k}(s-\tau)\,ds\Big|^2+$$

$$+\big|\widetilde{v}^l(x,\tau/\lambda_k)-\widetilde{v}^l(x,\tau)\big|^2+\big|\widetilde{v}^l(x,\tau)-v(x,\tau)\big|^2\Big\}\,dx\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant 4\Big\{\iint\limits_{G_R}\Big(\int\limits_{|s-\tau|<1/k}\big|v(x,s/\lambda_k)-\widetilde{v}^{\,l}(x,s/\lambda_k)\big|^2\,ds\Big)\Big(\int\limits_{|s-\tau|<1/k}\omega^2_{1/k}(s-\tau)\,ds\Big)\,dx\,d\tau+$$

$$+\sup_{x,|s-\tau|<1/k}\big|\widetilde{v}^{\,l}(x,s/\lambda_k)-\widetilde{v}^{\,l}(x,\tau/\lambda_k)\big|^2\cdot\mathrm{mes}\,G_R+\sup_{x,\tau}\big|\widetilde{v}^{\,l}(x,\tau/\lambda_k)-\widetilde{v}^{\,l}(x,\tau)\big|^2\cdot\mathrm{mes}\,G_R+$$

$$+\iint\limits_{G_R}\big|\widetilde{v}^{\,l}(x,\tau)-v(x,\tau)\big|^2\,dx\,d\tau\Big\}\equiv 4\,\{I_1+I_2+I_3+I_4\}. \tag{9}$$

Нехай $\varepsilon>0$ — достатньо мале дійсне число. Доведемо, що при достатньо великих значеннях $k\in\mathbb{N}$ права частина нерівності (9) буде меншою за ε. Маємо, врахувавши, що $|\omega_{1/k}(z)|\leqslant C_5\,k$, де C_5 — стала, яка від k не залежить, такі оцінки:

$$I_1:=\iint\limits_{G_R}\Big(\int\limits_{|s-\tau|<1/k}\big|v(x,s/\lambda_k)-\widetilde{v}^{\,l}(x,s/\lambda_k)\big|^2\,ds\Big)\Big(\int\limits_{|s-\tau|<1/k}\omega^2_{1/k}(s-\tau)\,ds\Big)\,dx\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C_5\,k\iint\limits_{G_R}\Big(\int\limits_{|s-\tau|<1/k}\big|v(x,s/\lambda_k)-\widetilde{v}^{\,l}(x,s/\lambda_k)\big|^2\,ds\Big)\,dx\,d\tau=\begin{bmatrix} s-\tau=z\\ s=z+\tau\\ ds=dz\end{bmatrix}=$$

$$=C_5\,k\iint\limits_{G_R}\Big(\int\limits_{|z|<1/k}\big|v(x,(z+\tau)/\lambda_k)-\widetilde{v}^{\,l}(x,(z+\tau)/\lambda_k)\big|^2\,dz\Big)\,dx\,d\tau=$$

$$=C_5\,k\int\limits_{|z|<1/k}dz\int\limits_{\Omega_R}dx\int\limits_{-T}^{T}\big|v(x,(z+\tau)/\lambda_k)-\widetilde{v}^{\,l}(x,(z+\tau)/\lambda_k)\big|^2\,d\tau=$$

$$=\begin{bmatrix} (z+\tau)/\lambda_k=t\\ \tau=\lambda_k t-z\\ d\tau=\lambda_k dt\end{bmatrix}\leqslant 2\,C_2\,\lambda_k\int\limits_{\Omega_R}dx\int\limits_{-T}^{T}\big|v(x,t)-\widetilde{v}^{\,l}(x,t)\big|^2\,dt=$$

$$=2\,C_5\,\lambda_k\iint\limits_{G_R}\big|v(x,t)-\widetilde{v}^{\,l}(x,t)\big|^2\,dx\,dt.$$

Звідси, оскільки $\|\ v-\widetilde{v}^{\,l}\ \|_{[L^2(G_R)]^N}\to 0$ при $l\to+\infty$, то випливає існування $l_0\in\mathbb{N}$ такого, що

$$I_1\leqslant 2\,C_5\,\lambda_k\iint\limits_{G_R}\big|v(x,t)-\widetilde{v}^{\,l_0}(x,t)\big|^2\,dx\,dt<\frac{\varepsilon}{16}\quad\forall\,k\in\mathbb{N}, \tag{10}$$

$$I_4:=\iint\limits_{G_R}\big|\widetilde{v}^{\,l_0}(x,t)-v(x,t)\big|^2\,dx\,d\tau<\frac{\varepsilon}{16}. \tag{11}$$

Враховуючи, що $\widetilde{v}^{\,l_0}\in C(\overline{G}_R)$ і $\overline{G}_R$ — компакт, а отже, функція $\widetilde{v}^{\,l_0}$ рівномірно неперервна на $\overline{G}_R$, знайдемо $k_0\in\mathbb{N}$ таке, що для всіх $k>k_0$

$$I_2:=\sup_{x,|s-\tau|<1/k}\big|\widetilde{v}^{\,l_0}(x,s/\lambda_k)-\widetilde{v}^{\,l_0}(x,\tau/\lambda_k)\big|^2\cdot\mathrm{mes}\,G_R<\frac{\varepsilon}{16}, \tag{12}$$

$$I_3 := \sup_{x,\,\tau}\big|\widetilde{v}^{l_0}(x,\tau/\lambda_k) - \widetilde{v}^{l_0}(x,\tau)\big|^2 \cdot \operatorname{mes} G_R < \frac{\varepsilon}{16}. \tag{13}$$

З (9), враховуючи (10) — (13), отримаємо

$$\iint\limits_{G_R} \big|v^k(x,t) - v(x,t)\big|^2\,dx\,d\tau < \varepsilon$$

для будь-якого $k > k_0$. Оскільки $\varepsilon > 0$ – довільне число, то маємо те, що нам потрібно.

Аналогічно (див. також [16]) доводиться, що

$$v^k_{x_j}|_{G_R} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v_{x_j}|_{G_R} \quad \text{в} \quad [L^2(G_R)]^N, \quad j=\overline{1,n}, \tag{14}$$

$$v^k|_{G_R} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v|_{G_R} \quad \text{в} \quad [L^{p(\cdot)}(G_R)]^N, \tag{15}$$

$$g^{0,k}|_{G_R} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g^0|_{G_R} \quad \text{в} \quad [L^{p'(\cdot)}(G_R)]^N, \tag{16}$$

$$g^{j,k}|_{G_R} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g^j|_{G_R} \quad \text{в} \quad [L^2(G_R)]^N, \quad j=\overline{1,n}. \tag{17}$$

Нехай k і l — довільні числа. Тоді з рівності (8) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_*}\{(v^{kl}_\tau(x,\tau),\psi(x))+(g^{0,kl}(x,\tau),\psi(x))+\sum_{j=1}^n(g^{j,kl}(x,\tau),\psi_{x_j}(x))\}dx=0,\ \tau\in[-T,T], \tag{18}$$

$v^{kl} := v^k - v^l,\quad g^{j,kl} := g^{j,k} - g^{j,l},\ \ k,l\in\mathbb{N},\ j=\overline{0,n}.$

Нехай $w \in C^1_{\rm c}(\overline{\Omega})$ — будь-яка така, що $\operatorname{supp} w \subset \overline{\Omega_*}$. Для довільного $\tau\in[-T,T]$ приймемо в (18) $\psi(x) = v^{k,l}(x,\tau)w(x)$, $x\in\Omega_*$. У підсумку здобудемо

$$\int\limits_{\Omega_*}\{(v^{kl}_\tau(x,\tau),v^{kl}(x,\tau))w(x)\,dx + (g^{0,kl}(x,\tau),v^{kl}(x,\tau)w(x))+$$

$$+\sum_{j=1}^n(g^{j,kl}(x,\tau),(v^{kl}(x,\tau)w(x))_{x_j})\}dx=0. \tag{19}$$

Маємо

$$\int\limits_{\Omega_*}(v^{kl}_\tau(x,\tau),v^{kl}(x,\tau))w(x)\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\int\limits_{\Omega_*}|v^{kl}(x,\tau)|^2w(x)dx,\ \ \tau\in[-T,T]. \tag{20}$$

Нехай $\theta \in C^1([-T,T])$ — будь-яка функція. Для кожного $\tau\in[-T,T]$ домножимо (19) на $\theta(\tau)$ і проінтегруємо отриману рівність за τ від τ_1 до τ_2 ($-T\leqslant\tau_2<\tau_1\leqslant T$), враховуючи (20). Тоді

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\theta(\tau)w(x)\frac{d}{d\tau}\left(\int\limits_{\Omega_*}|v^{kl}(x,\tau)|^2dx\right)d\tau + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega_*}\{(g^{0,kl}(x,\tau),v^{kl}(x,\tau)w(x))+$$

$$+\sum_{j=1}^n(g^{j,kl}(x,\tau),(v^{kl}(x,\tau)w(x))_{x_j})\}\theta(\tau)\,dxd\tau,$$

звідки отримаємо

$$\theta(\tau_2)\int\limits_{\Omega_*}|v^{kl}(x,\tau_2)|^2w(x)\,dx-\theta(\tau_1)\int\limits_{\Omega_*}|v^{kl}(x,\tau_1)|^2w(x)\,dx-$$

$$-\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega_*}|v^{kl}(x,\tau)|^2w(x)\theta'(\tau)\,dxd\tau+2\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega_*}\big\{(g^{0,kl}(x,\tau),v^{kl}(x,\tau)w(x))+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(g^{j,kl}(x,\tau),(v^{kl}(x,\tau)w(x))_{x_j})\big\}\theta(\tau)\,dxd\tau=0. \tag{21}$$

Візьмемо в (21) $\theta(\tau)=1$, якщо $\tau\in[0,T]$, $\theta(-T)=0$ і $0\leqslant\theta(\tau)\leqslant1$, $|\theta'(\tau)|\leqslant\dfrac{2}{T}$, якщо $\tau\in[-T,0)$, та $w(x)=1$, якщо $x\in\Omega_R$, $w(x)\geqslant0, x\in\Omega$, і $w(x)=0$, якщо $x\notin\Omega_{R_\Delta}$, де $R\in(0,R_*)$, $R_\Delta\in(R,R_*)$ — які-небудь фіксовані дійсні числа. Тоді з (21), прийнявши $\tau_1=-T,\tau_2=\tau\in[0,T]$, легко отримаємо нерівність

$$\max_{\tau\in[0,T]}\int\limits_{\Omega_R}|v^{kl}(x,\tau)|^2dx\leqslant2\iint\limits_{G_{R_\Delta}}\{|g^{0,kl}(x,\tau)|\,|v^{kl}(x,\tau)|w(x)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}|g^{j,kl}(x,\tau)||(v^{kl}(x,\tau)w(x))_{x_j}|\}dxd\tau+\frac{2}{T}\int\limits_{-T}^{0}\int\limits_{\Omega_{R_\Delta}}|v^{kl}(x,\tau)|^2w(x)\,dxd\tau. \tag{22}$$

Аналогічно доводиться нерівність

$$\max_{\tau\in[-T,0]}\int\limits_{\Omega_R}|v^{kl}(x,\tau)|^2\,dx\leqslant2\iint\limits_{G_{R_\Delta}}\{|g^{0,kl}(x,\tau)|\,|v^{kl}(x,\tau)|w(x)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}|g^{j,kl}(x,\tau)|\,|(v^{kl}(x,\tau)w(x))_{x_j}|\}\,dxd\tau+\frac{2}{T}\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega_{R_\Delta}}|v^{kl}(x,\tau)|^2w(x)\,dxd\tau. \tag{23}$$

З (22) і (23) одержимо нерівність

$$\max_{\tau\in[-T,T]}\int\limits_{\Omega_R}|v^{kl}(x,\tau)|^2\,dx\leqslant2\iint\limits_{G_{R_\Delta}}\{|g^{0,kl}(x,\tau)|\,|v^{kl}(x,\tau)|w(x)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}|g^{j,kl}(x,\tau)|\,|(v^{kl}(x,\tau)w(x))_{x_j}|\}\,dxd\tau+\frac{2}{T}\iint\limits_{G_{R_\Delta}}|v^{kl}(x,\tau)|^2w(x)\,dxd\tau. \tag{24}$$

Оскільки на підставі (14) — (17) права частина нерівності (24) прямує до нуля при $k,l\to+\infty$, то і ліва частина її — теж. Отже, послідовність $\{v^k|_{G_R}\}_{k=1}^{\infty}$ елементів банахового $[C([-T,T];L^2(\Omega_R))]^N$ простору є фундаментальною в цьому просторі. Але оскільки $v^k|_{G_R}\to v|_{G_R}$ при $k\to+\infty$ в $[L^2(G_R)]^N$, то

$$v^k|_{G_R}\to v|_{G_R}\ \text{ при }\ k\to\infty\ \text{ в }\ [C([-T,T];L^2(\Omega_R))]^N,$$

а отже, $v|_{G_R} \in [C([-T,T];L^2(\Omega_R))]^N$.

Тепер для довільного $\tau \in [-T,T]$ приймемо в (8) $\psi(x) = v^k(x,\tau)\, w(x)\, \theta(\tau)$, $x \in \Omega$, де $w \in C^1_c(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} w \subset \overline{\Omega_*}$, $\theta \in C^1([-T,T])$. На підставі тих самих міркувань, з яких ми отримали (21), одержимо

$$\theta(t_1)\int\limits_{\Omega_*}|v^k(x,t_1)|^2 w(x)dx - \theta(t_0)\int\limits_{\Omega_*}|v^k(x,t_0)|^2 w(x)dx - \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{\Omega_*}|v(x,t)|^2 w(x)\theta'(t)\,dxdt +$$

$$+2\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{\Omega_*}\{(g^{0,k}(x,\tau), v^k(x,\tau)w(x)) + \sum_{j=1}^{n}(g^{j,k}(x,\tau),(v^k(x,\tau)w(x))_{x_j})\}\theta(\tau)\,dxd\tau = 0, \tag{25}$$

де $t_0, t_1 \in [-T,T]$, $t_0 < t_1$, $k \in \mathbb{N}$ — довільні.

Перейдемо в рівності (25) до границі при $k \to \infty$, врахувавши вищесказане, і отримаємо (6). □

Лема 2. *Нехай $p \in \mathbb{P}^*$, $(a^j) \in \mathbb{A}^*_p$ і для кожного $l \in \{1,2\}$ функції $(f^{j,l}) \in \mathbb{F}_p$ та $u^l \in \mathbb{U}_p$ такі, що $u^1 - u^2 \in [H^{1,0}_0(Q_{R_*})]^N$ і*

$$\iint\limits_{Q_{R_*}}\big[-(u^l,\psi)\omega' + \big\{\sum_{j=1}^{n}(a^j(x,t,u^l,\nabla u^l),\psi_{x_j}) + (a^0(x,t,u^l,\nabla u^l),\psi)\big\}\omega\big]\,dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q_{R_*}}\{\sum_{j=1}^{n}(f^{j,l},\psi_{x_j}) + (f^{0,l},\psi)\}\omega\,dxdt \tag{26}$$

для будь-яких $\psi \in [\overset{\circ}{H}{}^1_c(\Omega)) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega)]^N$ і $\omega \in C^1_c(-\infty,T)$ таких, що supp $\psi \subset \overline{\Omega_{R_*}}$ та supp $\omega \subset (T-R_*,T)$, де $R_* \geqslant 1$ — деяке число.

Тоді для будь-яких чисел R_0, R таких, що $0 < R_0 < R \leqslant R_*$, $R \geqslant 1$, правильна нерівність

$$\max_{t\in[T-R_0,T]}\int\limits_{\Omega_{R_0}}|u^1(x,t)-u^2(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}}\big[|\nabla u^1 - \nabla u^2|^2 + K_2|u^1-u^2|^2 +$$

$$+|u^1-u^2|^{p(x)}\big]\,dxdt \leqslant \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\varkappa}\big[C_1 R^{n+1-q/(q-2)} +$$

$$+C_2\iint\limits_{Q_R}\big\{\sum_{j=1}^{n}|f^{j,1}-f^{j,2}|^2 + |f^{0,1}-f^{0,2}|^{p'(x)}\big\}\,dxdt\big], \tag{27}$$

де q і $\varkappa$ такі ж, як в теоремі 1, C_1 і C_2— деякі сталі, які залежать тільки від B, K_1, K_2, K_3 (з умов 3) і 4)), q, $\varkappa$, p^-, p^+, n.

Доведення. Приймемо $v := u^1 - u^2$. З інтегральних тотожностей, отриманих з (26) по черзі для $l \in \{1, 2\}$, маємо

$$\iint\limits_{Q_{R_*}} \{-(v,\psi)\omega' + \{\sum_{j=1}^{n}(a^j(x,t,u^1,\nabla u^1) - a^j(x,t,u^2,\nabla u^2), \psi_{x_j}) + (a^0(x,t,u^1,\nabla u^1)-$$

$$-a^0(x,t,u^2,\nabla u^2),\psi)\}\omega\,dxdt = \iint\limits_{Q_{R_*}} \{\sum_{j=1}^{n}(f^{j,1} - f^{j,2}, \psi_{x_j}) + (f^{0,l} - f^{0,2}, \psi)\}\omega\,dxdt \tag{28}$$

для будь-яких $\psi \in [\overset{\circ}{H}{}^1_c(\overline{\Omega})) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega)]^N$ і $\omega \in C^1_c(-\infty, T)$ таких, що $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{\Omega_{R_*}}$ та $\operatorname{supp}\omega \subset (T - R_*, T)$.

З (28) за лемою 1 одержимо

$$\theta(t_1)\int\limits_{\Omega_{R_*}} |v(x,t_1)|^2 w(x)\,dx - \theta(t_0)\int\limits_{\Omega_{R_*}} |v(x,t_0)|^2 w(x)\,dx - \iint\limits_{Q_{R_*}} |v(x,t)|^2 w(x)\theta'(t)\,dxdt+$$

$$+2\iint\limits_{Q_{R_*}}\{\sum_{j=1}^{n}(a^j(x,t,u^1,\nabla u^1) - a^j(x,t,u^2,\nabla u^2), (vw)_{x_j})+$$

$$+(a^0(x,t,u^1,\nabla u^1) - a^0(x,t,u^2,\nabla u^2), vw)\}\theta(t)\,dxdt =$$

$$= 2\iint\limits_{Q_{R_*}}\{\sum_{j=1}^{n}(f^{j,1}(x,t) - f^{j,2}(x,t), (vw)_{x_j}) + (f^{0,1}(x,t) - f^{0,2}(x,t), vw)\}\,\theta(t)\,dxdt, \tag{29}$$

де $\theta \in C^1([T - R_*, T]),\ w \in C^1_c(\overline{\Omega}),\ \operatorname{supp} w \subset \overline{\Omega_{R_*}},\ T - R_* \leqslant t_0 < t_1 \leqslant T$ — довільні.

Нехай $R_0,\ R$— будь-які дійсні числа такі, що $0 < R_0 < R \leqslant R_*,\quad R \geqslant 1$. Приймемо $\chi(t) = R - |t - T|$, якщо $t \in [T - R, T]$, і $\chi(t) = 0$, коли $t < T - R$; $\zeta(x) = (R^2 - |x|^2)/R$, якщо $|x| \leqslant R$, і $\zeta(x) = 0$, коли $|x| > R$.

Візьмемо в (29) $t_0 = T - R,\ t_1 = \tau \in (T - R, T],\ \theta = \chi^r,\ w = \zeta^s$, де $r > 0,\ s > 0$— достатньо великі числа (їх значення уточнимо пізніше; очевидно, що при $r > 1$ та $s > 1$ маємо $\chi^r \in C^1((-\infty, T]),\ \zeta^s \in C^1(\overline{\Omega}),\ \operatorname{supp}\zeta^s \subset \overline{\Omega_R}$). У підсумку отримаємо рівність

$$\chi^r(\tau)\int\limits_{\Omega_R} |v(x,\tau)|^2\,\zeta^s(x)\,dx + 2\iint\limits_{Q_R^\tau}\{\sum_{j=1}^{n}(a^j(x,t,u^1,\nabla u^1) - a^j(x,t,u^2,\nabla u^2), (v\zeta^s)_{x_j})+$$

$$+(a^0(x,t,u^1,\nabla u^1) - a^0(x,t,u^2,\nabla u^2), v\zeta^s)\}\,dxdt = r\iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^2\,\zeta^s(x)\,\chi^{r-1}(t)\,dxdt+$$

$$+2\iint\limits_{Q_R^\tau}\{\sum_{j=1}^{n}(f^{j,1}(x,t) - f^{j,2}(x,t), (v\zeta^s)_{x_j}) + (f^{0,1}(x,t) - f^{0,2}(x,t), v\zeta^s)\}\,\chi^r(t)\,dxdt, \tag{30}$$

де

$$Q_R^\tau := \Omega_R \times (T - R, \tau), \quad \tau \in (T - R, T].$$

Очевидно, що
$$(v\zeta^s)_{x_j} = v_{x_j}\zeta^s + sv\zeta^{s-1}\zeta_{x_j}.$$
Підставивши цей вираз в (30), отримаємо
$$\chi^r(\tau)\int\limits_{\Omega_R}|v(x,\tau)|^2\zeta^s(x)\,dx + 2\iint\limits_{Q_R^\tau}\{\sum_{j=1}^n(a^j(x,t,u^1,\nabla u^1) - a^j(x,t,u^2,\nabla u^2), v_{x_j})+$$
$$+(a^0(x,t,u^1,\nabla u^1) - a^0(x,t,u^2,\nabla u^2), v)\}\zeta^s\chi^r\,dxdt = r\iint\limits_{Q_R^\tau}|v(x,\tau)|^2\zeta^s\,\chi^{r-1}\,dxdt-$$
$$-2s\iint\limits_{Q_R^\tau}\{\sum_{j=1}^n(a^j(x,t,u^1,\nabla u^1) - a^j(x,t,u^2,\nabla u^2), v)\,\zeta_{x_j}\zeta^{s-1}\,\chi^r\,dxdt+$$
$$+2\iint\limits_{Q_R^\tau}\{\sum_{j=1}^n(f^{j,1}(x,t) - f^{j,2}(x,t), v_{x_j}) + (f^{0,1}(x,t) - f^{0,2}(x,t), v)\}\zeta^s\,\chi^r\,dxdt+$$
$$+2s\iint\limits_{Q_R^\tau}\sum_{j=1}^n(f^{j,1}(x,t) - f^{j,2}(x,t), v)\zeta^{s-1}\zeta_{x_j}\,\chi^r\,dxdt. \tag{31}$$
Оцінимо члени рівності (31). Враховуючи умови **4**), маємо
$$\iint\limits_{Q_R^\tau}\Big\{\sum_{j=1}^n(a^j(x,t,u^1,\nabla u^1) - a^j(x,t,u^2,\nabla u^2), v_{x_j}) + (a^0(x,t,u^1,\nabla u^1) - a^0(x,t,u^2,\nabla u^2), v)\Big\}\times$$
$$\times\zeta^s\chi^r\,dxdt \geqslant \iint\limits_{Q_R^\tau}[K_1|\nabla v(x,t)|^2 + K_2|v(x,t)|^2 + K_3|v(x,t)|^{p(x)}]\,\zeta^s\,\chi^r\,dxdt. \tag{32}$$
Використовуючи умову **3**) і оцінки $|\zeta_{x_j}| \leqslant 2,\ j = \overline{1,n}$, одержимо
$$-2s\iint\limits_{Q_R^\tau}\sum_{j=1}^n(a^j(x,t,u^1,\nabla u^1) - a^j(x,t,u^2,\nabla u^2), v)\,\zeta_{x_j}\zeta^{s-1}\,\chi^r\,dxdt \leqslant$$
$$\leqslant 2s\iint\limits_{Q_R^\tau}\sum_{j=1}^n|a^j(x,t,u^1,\nabla u^1) - a^j(x,t,u^2,\nabla u^2)|\,|v|\,|\zeta_{x_j}|\,\zeta^{s-1}\,\chi^r\,dxdt \leqslant$$
$$\leqslant 4sn\iint\limits_{Q_R^\tau}B(|v| + |\nabla v|)\,|v|\,\zeta^{s-1}\,\chi^r\,dxdt. \tag{33}$$
З (31) на підставі (32), (33) отримаємо
$$\chi^r(\tau)\int\limits_{\Omega_R}|v(x,\tau)|^2\,\zeta^s(x)\,dx + 2\iint\limits_{Q_R^\tau}[K_1|\nabla v(x,t)|^2 + K_2|v(x,t)|^2 + K_3|v(x,t)|^{p(x)}]\zeta^s\chi^r\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant r \iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^2 \zeta^s(x)\chi^{r-1}(t)\,dxdt + 4snB \iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^2 \zeta^{s-1}(x)\,\chi^r(t)\,dxdt+$$

$$+4snB \iint\limits_{Q_R^\tau} |\nabla v(x,t)|\,|v(x,t)|\,\zeta^{s-1}(x)\,\chi^r(t)\,dxdt+$$

$$+2 \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{j=1}^n \{|f^{j,1}(x,t) - f^{j,2}(x,t)|\,|v_{x_j}| + |f^{0,1}(x,t) - f^{0,2}(x,t)|\,|v|\}\,\zeta^s\,\chi^r\,dxdt+$$

$$+4s \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{j=1}^n |f^{j,1}(x,t) - f^{j,2}(x,t)|\,|v|\,\zeta^{s-1}(x)\,\chi^r(t)\,dxdt. \tag{34}$$

Далі використовуватимемо нерівність Юнга

$$ab \leqslant \varepsilon a^r + M(\varepsilon, r) b^{r'},$$

де $\varepsilon > 0,\ r > 1,\ \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r'} = 1,\ M(\varepsilon, r) = \dfrac{r-1}{r}(r\varepsilon)^{1/(1-r)}$. Оцінимо зверху члени правої частини нерівності (34), використовуючи нерівності Гельдера і Юнга, так

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} |\nabla v(x,t)|\,|v(x,t)|\,\zeta^{s-1}(x)\,\chi^r(t)\,dxdt = \iint\limits_{Q_R^\tau} (|\nabla v|\,\zeta^{s/2}\,\chi^{r/2})\,(|v|\,\zeta^{s/2-1}\,\chi^{r/2})\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_1 \iint\limits_{Q_R^\tau} |\nabla v(x,t)|^2 \zeta^s(x)\,\chi^r(t)\,dxdt + M(\varepsilon_1, 2) \iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^2 \zeta^{s-2}(x)\,\chi^r(t)\,dxdt, \tag{35}$$

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{j=1}^n |f^{j,1}(x,t) - f^{j,2}(x,t)|\,|v_{x_j}(x,t)|\,\zeta^s\,\chi^r\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_2 \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{j=1}^n |v_{x_j}(x,t)|^2 \zeta^s\,\chi^r\,dxdt + M(\varepsilon_2, 2) \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{j=1}^n |f^{j,1}(x,t) - f^{j,2}(x,t)|^2 \zeta^s\,\chi^r\,dxdt =$$

$$= \varepsilon_2 \iint\limits_{Q_R^\tau} |\nabla v(x,t)|^2 \zeta^s\,\chi^r\,dxdt + M(\varepsilon_2, 2) \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{j=1}^n |f^{j,1}(x,t) - f^{j,2}(x,t)|^2 \zeta^s\,\chi^r\,dxdt, \tag{36}$$

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} |f^{0,1}(x,t) - f^{0,2}(x,t)|\,|v(x,t)|\,\zeta^s\,\chi^r\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_3 \iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^{p(x)} \zeta^s \chi^r dxdt + \iint\limits_{Q_R^\tau} M(\varepsilon_3, p(x))|f^{0,1}(x,t) - f^{0,2}(x,t)|^{p'(x)} \zeta^s \chi^r dxdt, \tag{37}$$

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{j=1}^n |f^{j,1}(x,t) - f^{j,2}(x,t)|\,|v(x,t)|\,\zeta^{s-1}\,\chi^r\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_4 n \iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^2 \zeta^{s-2}\chi^r dxdt + M(\varepsilon_4, 2) \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{j=1}^n |f^{j,1}(x,t) - f^{j,2}(x,t)|^2 \zeta^s \chi^r \, dxdt, \tag{38}$$

де $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4 > 0$— довільні числа.

Нехай $q \in (2, p^-]$. Тоді, прийнявши в нерівності Юнга

$$a = |v(x,t)|^2 \zeta^{2s/q} \chi^{2r/q}, \quad b = \zeta^{s(q-2)/q-k} \chi^{r(q-2)/q}, \quad k = 1, 2,$$

отримаємо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^2 \zeta^{s-k} \chi^r \, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_5 \iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^q \zeta^s \chi^r \, dxdt + M(\varepsilon_5, q) \iint\limits_{Q_R^\tau} \zeta^{s-kq/(q-2)} \chi^r \, dxdt, \quad k = 1, 2, \tag{39}$$

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^2 \zeta^s \chi^{r-1} \, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_6 \iint\limits_{Q_R^\tau} |v(x,t)|^q \zeta^s \chi^r \, dxdt + M(\varepsilon_6, q) \iint\limits_{Q_R^\tau} \zeta^s \chi^{r-q/(q-2)} \, dxdt, \tag{40}$$

де ε_5, ε_6 — довільні додатні числа.

Вибравши ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, ε_5, ε_6 достатньо малими, з (34)–(39) одержимо

$$\chi^r(\tau) \int\limits_{\Omega_R} |v(x,\tau)|^2 \zeta^s(x) \, dx + \iint\limits_{Q_R^\tau} \big[|v|^2 + K_2 |\nabla v|^2 + |v|^{p(x)}\big] \zeta^s \chi^r \, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \iint\limits_{Q_R^\tau} \zeta^s \chi^{r-q/(q-2)} \, dxdt + C_2 \iint\limits_{Q_R^\tau} \zeta^{s-kq/(q-2)} \chi^r \, dxdt +$$

$$+ C_3 \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{j=1}^n \{|f^{j,1}(x,t) - f^{j,2}(x,t)|^2 + |f^{0,1}(x,t) - f^{0,2}(x,t)|^{p'(x)}\} \zeta^s \chi^r \, dxdt, \quad k = 1, 2, \tag{41}$$

де C_1, C_2, $C_3 > 0$ — сталі, які залежать тільки від p^-, p^+, q, n, r, s, B, K_1, K_2, K_3.

Враховуючи, що $R \geqslant 1$, $0 \leqslant \zeta(x) \leqslant R$, причому $R - R_0 \leqslant \zeta(x)$, коли $|x| \leqslant R_0$, і те, що $R - R_0 \leqslant \chi(t) \leqslant R$, $t \in [0, R_0]$, та вибравши $s > 2q/(q-2)$, з (41) отримаємо

$$(R-R_0)^{r+s} \Big\{ \max_{t \in [T-R_0, T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |v(x,t)|^2 \, dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \big[|v(x,t)|^2 + K_2 |\nabla v(x,t)|^2 + |v(x,t)|^{p(x)}\big] dxdt \Big\} \leqslant$$

$$\leqslant R^{r+s} \big[C_1 R^{n+1-q/(q-2)} + C_2 \iint\limits_{Q_R^\tau} \Big\{ \sum_{j=1}^n |f^{j,1}(x,t) - f^{j,2}(x,t)|^2 +$$

$$+ |f^{0,1}(x,t) - f^{0,2}(x,t)|^{p'(x)} \Big\} \, dxdt \big], \tag{42}$$

де C_1, C_2 — додатні сталі. Прийнявши $\varkappa = r + s$, ми легко отримуємо (27). □

Наслідок 1 (наслідок з леми 2). *Нехай $p \in \mathbb{P}^*$ і $(a^j) \in \mathbb{A}_p^*$, а функції $(f^j) \in \mathbb{F}_p$, $\varphi \in \Phi_p$, $w \in \mathbb{U}_p$ такі, що $w - \varphi \in H^{1,0}_{0,loc}(\overline{Q})$ і*

$$\iint\limits_{Q_{R_*}} \big[-(w,\psi)\omega' + \big\{ \sum_{j=1}^n (a^j(x,t,w,\nabla w), \psi_{x_j}) + (a^0(x,t,w,\nabla w),\psi)\big\}\omega\big]\, dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q_{R_*}} \big\{ \sum_{j=1}^n (f^j, \psi_{x_j}) + (f^0,\psi)\big\}\omega \, dxdt \tag{43}$$

для будь-яких $\psi \in [\overset{\circ}{H}{}^1_c(\Omega) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega)]^N$, $\omega \in C^1_c(-\infty, T)$ таких, що $supp\,\psi \subset \overline{\Omega_{R_*}}$, $supp\,\omega \subset (T - R_*, T)$, де $R_* \geqslant 1$ — деяке число.

Тоді для будь-яких чисел R_0, R таких, що $0 < R_0 < R \leqslant R_*$, $R \geqslant 1$, правильна нерівність

$$\max_{t\in[T-R_0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |w(x,t)|^2\, dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \big[|\nabla w|^2 + K_2|w|^2 + |w|^{p(x)}\big]\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\varkappa} \big\{C_1 R^{n+1-q/(q-2)} + C_2 \iint\limits_{Q_R} \big[\sum_{j=1}^n |f^j - a^j(\varphi)|^2 +$$

$$+ |f^0 - a^0(\varphi) - \varphi_t|^{p'(x)}\big]\, dxdt\big\} + C_3 \iint\limits_{Q_R} \big[|\nabla\varphi|^2 + K_2|\varphi|^2 + |\varphi|^{p(x)}\big]\, dxdt +$$

$$+ C_4 \max_{t\in[T-R_0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |\varphi(x,t)|^2\, dx, \tag{44}$$

де q, $\varkappa$, C_1, C_2, C_3, $C_4 > 0$ — такі ж, як в теоремі 1.

Доведення. Спочатку зауважимо, що

$$\iint\limits_{Q_R} \{-(\varphi,\psi)\omega' + \sum_{j=1}^n (a^j(\varphi), \psi_{x_j})\omega\}\, dxdt = \iint\limits_{Q_R} \{(\varphi_t,\psi)\omega + \sum_{j=1}^n (a^j(\varphi), \psi_{x_j})\omega\}\, dxdt$$

для будь-яких $\psi \in [\overset{\circ}{H}{}^1_c(\Omega) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega)]^N$, $\omega \in C^1_c(-\infty, T)$.

Врахувавши це, на підставі леми 2, прийнявши

$$u^1 = w, \quad u^2 = \varphi, \quad f^{j,1} = f^j, \quad f^{j,2} = a^j(\varphi), \quad j = \overline{1,n}, \quad f^{0,2} = \varphi_t + a^0(\varphi),$$

отримаємо

$$\max_{t\in[T-R_0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |w(x,t) - \varphi(x,t)|^2\, dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} [|\nabla w - \nabla\varphi|^2 + K_2|w-\varphi|^2 +$$

$$+ |w-\varphi|^{p(x)}]\, dxdt \leqslant \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\varkappa} \big[C_1 R^{n+1-q/(q-2)} +$$

$$+C_2 \iint\limits_{Q_R} \{\sum_{j=1}^{n} |f^j - a^j(\varphi)|^2 + |f^0 - a^0(\varphi) - \varphi_t|^{p'(x)}\} \, dxdt\big]. \tag{45}$$

Зауважимо, що правильною є така нерівність

$$|a-b|^q \geqslant 2^{1-q}|a|^q - |b|^q \tag{46}$$

для будь-яких a, $b \in \mathbb{R}$ і $q \geqslant 1$. Справді, для $q = 1$ ця нерівність очевидна. Нехай $q > 1$. Застосуємо нерівність Гельдера до

$$|a|^q = |a-b+b|^q \leqslant (|a-b|+|b|)^q \leqslant 2^{q-1}(|a-b|^q + |b|^q),$$

звідси випливає (46). З (45) на підставі (46) одержуємо (44). □

5. Побудова апроксимацій узагальненого розв'язку задачі (1), (2) на просторі $\mathbb{A}_p^* \times \mathbb{F}_p \times \Phi_p$, де $p \in \mathbb{P}^*$

Нехай $(a^j) \in \mathbb{A}_p^*$, $(f^j) \in \mathbb{F}_p$, $\varphi \in \Phi_p$ для деякого $p \in \mathbb{P}^*$. Виберемо послідовності $\{\varphi^k\}_{k=1}^\infty$ і $\{(f^{j,k})\}_{k=1}^\infty$ такі, що $\varphi^k \in \Phi_p$, $(f^{j,k}) \in \mathbb{F}_p \; \forall\, k \in \mathbb{N}$ і $\varphi^k(x,t) = \varphi(x,t)$, $f^{j,k}(x,t) = f^j(x,t), j = \overline{1,n}$, для майже всіх $(x,t) \in Q_{k-3/4}$, та $\varphi^k(x,t) = 0$, $f^{j,k}(x,t) = 0$, $j = \overline{1,n}$, для $(x,t) \in Q/Q_{k-1/2}$.

Нехай $k \in \mathbb{N}$ — довільне фіксоване число. Розглянемо задачу: знайти функцію

$$u^k \in [H^{1,0}(Q_k) \cap L^{p(\cdot)}(Q_k) \cap C([T-k,T];L^2(\Omega_k))]^N$$

таку, що $u^k - \varphi^k \in [H_0^{1,0}(Q_k)]^N$, $u^k|_{t=T-k} = 0$ і правильна рівність

$$\iint\limits_{Q_k} \big[-(u^k,\psi)\omega' + \big\{\sum_{j=1}^{n}(a^j(x,t,u^k,\nabla u^k),\psi_{x_j}) + (a^0(x,t,u^k,\nabla u^k),\psi)\big\}\omega\big]\, dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q_k} \big\{\sum_{j=1}^{n}(f^{j,k},\psi_{x_j}) + (f^{0,k},\psi)\big\}\omega \, dxdt \tag{47}$$

для будь-яких $\psi \in [\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_k) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega_k)]^N$, $\omega \in C_c^1(T-k,T)$.

Доведемо, що ця задача має тільки один узагальнений розв'язок, тобто існує єдина функція u^k, яка володіє потрібними нам властивостями.

Зробимо в (47) заміну змінних: $u^k = v + \varphi^k$. Матимемо

$$\iint\limits_{Q_k} \big[-(v+\varphi^k,\psi)\omega' + \big\{\sum_{j=1}^{n}(a^j(x,t,v+\varphi^k,\nabla(v+\varphi^k)),\psi_{x_j}) +$$

$$+(a^0(x,t,v+\varphi^k,\nabla(v+\varphi^k)),\psi)\big\}\omega\big]\, dxdt = \iint\limits_{Q_k} \big\{\sum_{j=1}^{n}(f^{j,k},\psi_{x_j}) + (f^{0,k},\psi)\big\}\omega\, dxdt.$$

Перетворимо цю рівність так:

$$\iint\limits_{Q_k} \big[-(v,\psi)\omega' + (\varphi_t^k,\psi)\omega + \big\{\sum_{j=1}^{n}(a^j(x,t,v+\varphi^k,\nabla(v+\varphi^k)) - a^j(x,t,\varphi^k,\nabla\varphi^k),\psi_{x_j}) +$$

$$+(a^0(x,t,v+\varphi^k,\nabla(v+\varphi^k)) - a^0(x,t,\varphi^k,\nabla\varphi^k),\psi)\big\}\omega\big]\, dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q_k} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} (f^{j,k} - a^j(x,t,\varphi^k,\nabla\varphi^k), \psi_{x_j}) + (f^{0,k} - a^0(x,t,\varphi^k,\nabla\varphi^k), \psi) \Big\}\omega\, dxdt. \tag{48}$$

Введемо такі позначення:

$$\widetilde{a}^j(x,t,\xi,\eta) := a^j(x,t,\xi+\varphi^k,\eta+\nabla\varphi^k)) - a^j(x,t,\varphi^k,\nabla\varphi^k),$$

$$\widetilde{a}^0(x,t,\xi,\eta) := a^0(x,t,\xi+\varphi^k,\eta+\nabla\varphi^k) - a^j(x,t,\varphi^k,\nabla\varphi^k),$$

$$\widetilde{f}^{j,k}(x,t) := f^{j,k}(x,t) - a^j(x,t,\varphi^k,\nabla\varphi^k),$$

$$\widetilde{f}^{\,0,k}(x,t) := f^{0,k}(x,t) - a^0(x,t,\varphi^k,\nabla\varphi^k) - \varphi^k_t(x,t) \tag{49}$$

для майже всіх $(x,t) \in Q$.

Легко переконатися, що $(\widetilde{a}^j) \in \mathbb{A}^*_p$ і $(\widetilde{f}^j) \in \mathbb{F}_p$, причому виконуються умови 3) та 4) із заміною (a^j) на $(\widetilde{a}^j)$, звідки, зокрема, маємо

$$\sum_{j=1}^{n} (\widetilde{a}^j(x,t,\xi,\eta),\eta^j) + (\widetilde{a}^0(x,t,\xi,\eta),\xi) \geqslant K_1|\eta|^2 + K_2|\xi|^2 + K_3|\xi|^{p(x)},\ \xi\in\mathbb{R}^N, \eta\in\mathbb{R}^{N\times n}, \tag{50}$$

де K_1, K_2, K_3— такі, як в **4**) для (a^j).

Врахувавши введені позначення, з (48) отримаємо

$$\iint\limits_{Q_k} \big[-(v,\psi)\omega' + \Big\{ \sum_{j=1}^{n} (\widetilde{a}^j(x,t,v,\nabla v), \psi_{x_j}) + (\widetilde{a}^0(x,t,v,\nabla v), \psi) \Big\}\omega \big]\, dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q_k} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} (\widetilde{f}^{j,k}, \psi_{x_j}) + (\widetilde{f}^{\,0,k}, \psi) \Big\}\omega\, dxdt \tag{51}$$

для будь-яких $\psi \in [\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_k) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega_k)]^N,\ \omega \in C^1_{\mathrm{c}}(T-k,T)$.

Доведемо існування функції

$$v \in [H^{1,0}_0(Q_k) \cap L^{p(\cdot)}(Q_k) \cap C([T-k,T];L^2(\Omega_k))]^N, \quad v|_{t=T-k} = 0,$$

яка задовольняє інтегральну тотожність (51). Для цього скористаємося методом Фаедо-Гальоркіна.

Виберемо лінійно незалежну повну в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_k) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega_k)$ систему функцій $\{w_j\}_{j=1}^\infty$. Для кожного $\nu \in \mathbb{N}$ шукаємо гальоркінське наближення $v^{\,\nu} = (v^\nu_1,\dots,v^\nu_N)^\top$ у вигляді

$$v^\nu_i(x,t) = \sum_{m=1}^{\nu} c^{\nu,m}_i(t)\, w_m(x), \quad (x,t) \in \overline{Q_k}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{52}$$

де функції $c^{\nu,j}_i,\ i = \overline{1,N},\ m = \overline{1,\nu},$ — абсолютно неперервні на $[T-k,T]$ і такими, що

$$\int\limits_{\Omega_k} [v^\nu_{i,t}\, w_l + \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}^j_i(x,t,v^\nu,\nabla v^\nu) w_{l,x_j} + \widetilde{a}^0_i(x,t,v^\nu,\nabla v^\nu)\, w_l -$$

$$(53)\qquad -\sum_{j=1}^{n}\widetilde{f}_i^{j,k}\,w_{l,x_j}-\widetilde{f}_i^{0,k}\,w_l]\,dx=0,\quad t\in(T-k,T],\ i=\overline{1,N},\ l=\overline{1,\nu},$$

та задовольняє умову

$$(54)\qquad v_i^{\nu}(x,T-k)=0,\quad i=\overline{1,N}.$$

Очевидно, що знаходження v^{ν} є еквівалентне відшуканню набору абсолютно неперервних функцій $c_i^{\nu,m}(t)$, $t\in[T-k,T]$, $i=\overline{1,N}$, $m=\overline{1,\nu}$, який є розв'язком системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\sum_{m=1}^{\nu}\Big(\int\limits_{\Omega_k}w_l\,w_m\,dx\Big)\,(c_i^{\nu,m})'+$$

$$+\int\limits_{\Omega_k}\Big[\sum_{j=1}^{n}\widetilde{a}_i^j\big(x,t,(\sum_{m=1}^{\nu}c_1^{\nu,m}w_m,\ldots,\sum_{m=1}^{\nu}c_N^{\nu,m}w_m)^{\top},(\sum_{m=1}^{\nu}c_1^{\nu,m}\nabla w_m,\ldots,\sum_{m=1}^{\nu}c_N^{\nu,m}\,\nabla w_m)^{\top}\big)w_{l,x_j}+$$

$$+\widetilde{a}_i^0\big(x,t,(\sum_{m=1}^{\nu}c_1^{\nu,m}\,w_m,\ldots,\sum_{m=1}^{\nu}c_N^{\nu,m}\,w_m)^{\top},(\sum_{m=1}^{\nu}c_1^{\nu,m}\,\nabla w_m,\ldots,\sum_{m=1}^{\nu}c_N^{\nu,m}\,\nabla w_m)^{\top}\big)w_l-$$

$$(55)\qquad -\sum_{j=1}^{n}\widetilde{f}_i^{j,k}w_{l,x_j}-\widetilde{f}_i^{0,k}w_l\Big]\,dx=0,\quad t\in[T-k,T],\ i=\overline{1,N},\ l=\overline{1,\nu},$$

з початковою умовою

$$(56)\qquad c_i^{\nu,m}(0)=0,\quad i=\overline{1,N},\ m=\overline{1,\nu}.$$

Оскільки стала матриця

$$\left(\int\limits_{\Omega_k}w_l w_m\,dx\right)_{l,m=1}^{\nu}$$

є невиродженою і виконуються умови **1**) — **4**), то з відомих результатів (див., наприклад, [17]) випливає, що задача (55), (56) має єдиний непродовжуваний розв'язок $c_i^{\nu,m}(t)$, $t\in[T-k,t_1\rangle$, $i=\overline{1,N}$, $m=\overline{1,\nu}$, де $t_1\in(0,T]$, а символом "$\rangle$"позначається дужка ")"або "]".

Доведемо, що $[T-k,t_1\rangle=[T-k,T]$ і послідовність $\{v^{\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$ збігається в певному сенсі до v. Для цього знайдемо відповідні оцінки. З цією метою для кожних $i\in\{1,\ldots,N\}$ та $l\in\{1,\ldots,\nu\}$ домножимо рівність системи (53) з номерами i,l на $c_i^{\nu,l}(t)$, де $t\in[T-k,t_1\rangle$, і підсумуємо отримані рівності та проінтегруємо за t від $T-k$ до $\tau\in(0,t_1)$. У підсумку отримаємо

$$\int\limits_{T-k}^{\tau}\int\limits_{\Omega_k}(v_t^{\nu},v^{\nu})\,dxdt+\int\limits_{T-k}^{\tau}\int\limits_{\Omega_k}\Big[\sum_{j=1}^{n}\big(\widetilde{a}^j(x,t,v^{\nu},\nabla v^{\nu}),v_{x_j}^{\nu}\big)+$$

$$(57)\qquad +\big(\widetilde{a}^{\,0}(x,t,v^{\nu},\nabla v^{\nu}),v^{\nu}\big)\Big]\,dxdt=\int\limits_{T-k}^{\tau}\int\limits_{\Omega_k}\Big[\sum_{j=1}^{n}\big(\widetilde{f}^{j,k},v_{x_j}^{\nu}\big)+\big(\widetilde{f}^{\,0,k},v^{\nu}\big)\Big]\,dxdt.$$

Перетворимо перший член рівності (57), врахувавши (54), так

$$\int_{T-k}^{\tau}\int_{\Omega_k}(v_t^\nu, v^\nu)\,dxdt = \frac{1}{2}\int_{T-k}^{\tau}\int_{\Omega_k}\frac{d}{dt}(|v^\nu|^2)\,dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_k}|v^\nu(x,\tau)|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_k}|v^\nu(x,T-k)|^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{\Omega_k}|v^\nu(x,\tau)|^2)\,dx. \tag{58}$$

З (57), (58), врахувавши (50), матимемо

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_k}|v^\nu(x,\tau)|^2\,dx + \int_{T-k}^{\tau}\int_{\Omega_k}[K_1|\nabla v^\nu|^2 + K_2|v^\nu|^2 + K_3|v^\nu|^{p(x)}]\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{T-k}^{\tau}\int_{\Omega_k}\{\sum_{j=1}^{n}(\widetilde{f}^{j,k}, v_{x_j}^\nu) + (\widetilde{f}^{0,k}, v^\nu)\}\,dxdt. \tag{59}$$

На підставі нерівності Юнга матимемо

$$\int_{T-k}^{\tau}\int_{\Omega_k}(\widetilde{f}^{j,k}, v_{x_j}^\nu)\,dxdt \leqslant \int_{T-k}^{\tau}\int_{\Omega_k}|\widetilde{f}^{j,k}|\,|v_{x_j}^\nu|\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_7\int_{T-k}^{\tau}\int_{\Omega_k}|v_{x_j}^\nu|^2\,dxdt + C_1(\varepsilon_7)\int_{T-k}^{\tau}\int_{\Omega_k}|\widetilde{f}^{j,k}|^2\,dxdt, \quad j=\overline{1,n}, \tag{60}$$

$$\int_{T-k}^{\tau}\int_{\Omega_k}(\widetilde{f}^{0,k}, v^\nu)\,dxdt \leqslant \int_{T-k}^{\tau}\int_{\Omega_k}|\widetilde{f}^{0,k}|\,|v^\nu|\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_0\int_{T-k}^{\tau}\int_{\Omega_k}|v^\nu|^{p(x)}\,dxdt + C_2(\varepsilon_0)\int_{T-k}^{\tau}\int_{\Omega_k}|\widetilde{f}^{0,k}|^{p'(x)}\,dxdt, \tag{61}$$

де $\varepsilon_7, \varepsilon_8 > 0$ — довільні числа. Звідси, взявши $\varepsilon_7 = \frac{1}{2}K_1$, $j=\overline{1,\nu}$, $\varepsilon_8 = \frac{1}{2}K_3$, та з (59) отримаємо

$$\int_{\Omega_k}|v^\nu(x,\tau)|^2\,dx + \int_{T-k}^{\tau}\int_{\Omega_k}\big[|\nabla v^\nu|^2 + |v^\nu|^{p(x)}\big]\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_6\int_{T-k}^{\tau}\int_{\Omega_k}\big[\sum_{j=1}^{n}|\widetilde{f}^{j,k}|^2 + |\widetilde{f}^{0,k}|^{p'(x)}\big]\,dxdt, \tag{62}$$

де $C_6 > 0$ — стала, яка від k і ν не залежить.

Зокрема, з (62) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_k} |v^\nu(x,\tau)|^2\,dx \leqslant C_7, \quad \tau\in[T-k,t_1\rangle, \tag{63}$$

де $C_7>0$ — стала, яка від τ, k, ν не залежить. Оскільки

$$\int\limits_{\Omega_k} |v_i^\nu(x,\tau)|^2\,dx = \sum_{m,l=1}^{\nu}\Big(\int\limits_{\Omega_k}(w_m,w_l)\,dx\Big)c_i^{\nu,m}(\tau)c_i^{\nu,l}(\tau) \geqslant R_\nu \sum_{m=1}^{\nu}|c_i^{\nu,m}(\tau)|^2,$$

$\tau\in[T-k,t_1\rangle$, $i=\overline{1,N}$, де $R_\nu>0$ — стала, яка від τ не залежить, то з (63) випливає, що функції $c_i^\nu(t)$, $i=\overline{1,\nu}$, визначені на всьому відрізку $[0,T]$, тобто $[T-k,t_1\rangle=[T-k,T]$. Тоді з (62) і умов теореми матимемо

$$\int\limits_{\Omega_k} |v^\nu(x,t)|^2\,dx \leqslant C_8 \quad \forall\, t\in[0,T], \tag{64}$$

$$\iint\limits_{Q_k}[|\nabla v^\nu|^2+|v^\nu|^{p(x)}]\,dxdt \leqslant C_9, \tag{65}$$

$$\iint\limits_{Q_k}|\widetilde{a}^{\,0}(x,t,v^\nu,\nabla v^\nu)|^{p'(x)}\,dxdt \leqslant C_{10}, \tag{66}$$

$$\iint\limits_{Q_k}|\widetilde{a}^j(x,t,v^\nu,\nabla v^\nu)|^2\,dxdt \leqslant C_{11}, \quad j=\overline{1,n}, \tag{67}$$

де C_8, C_9, C_{10}, $C_{11}0$ — сталі, які від ν не залежать. На підставі оцінок (64) — (67) приходимо до висновку, що існують підпослідовність послідовності $\{v^\nu\}$, яку теж позначимо через $\{v^\nu\}$, і функції

$$v\in[H_0^{1,0}(Q_k)\cap L^{p(\cdot)}(Q_k)\cap L^\infty(T-k,\,T;L^2(\Omega_k))]^N$$

та $\chi^j\in[L^2(Q_k)]^N$, $j=\overline{1,n}$, $\chi^0\in[L^{p'(\cdot)}(Q_k)]^N$ такі, що

$$v^\nu \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{слабко в} \quad [L^\infty(T-k,\,T;L^2(\Omega_k))]^N, \tag{68}$$

$$v^\nu \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{слабко в} \quad [L^{p(\cdot)}(Q_k)]^N, \tag{69}$$

$$v^\nu \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{слабко в} \quad [H_0^{1,0}(Q_k)]^N, \tag{70}$$

$$a^0(\cdot,\cdot,v^\nu(\cdot,\cdot),\nabla v^\nu(\cdot,\cdot)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi^0(\cdot,\cdot) \quad \text{слабко в} \quad [L^{p'(\cdot)}(Q_k)]^N, \tag{71}$$

$$a^j(\cdot,\cdot,v^\nu(\cdot,\cdot),\nabla v^\nu(\cdot,\cdot)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi^j(\cdot,\cdot) \quad \text{слабко в} \quad [L^2(Q_k)]^N,\ j=\overline{1,n}. \tag{72}$$

Доведемо, що v — шукана функція. Нехай μ — яке-небудь натуральне число і $\nu\geqslant\mu$. Візьмемо довільний набір чисел γ_i^m, $i=\overline{1,N}$, $m=\overline{1,\mu}$, і будь-яку функцію θ з простору $C^1[T-k,T]$ і для кожних $i\in\{1,\dots,N\}$ та $l\in\{1,\dots,\mu\}$ домножимо рівність системи (53) з "номерами" i, l на $\gamma_i^l\theta(t)$, де $t \in [T-k, T]$, і підсумуємо отримані рівності та проінтегруємо за t від $T-k$ до T. У підсумку одержимо

$$\iint\limits_{Q_k}\{(v_t^\nu,\psi)+\sum_{j=1}^n(\widetilde{a}^j(x,t,v^\nu,\nabla v^\nu),\psi_{x_j})+(\widetilde{a}^0(x,t,v^\nu,\nabla v^\nu),\psi)\}\theta\,dxdt=$$

$$=\iint\limits_{Q_k}\{\sum_{j=1}^n(\widetilde{f}^{j,k},\psi_{x_j})+(\widetilde{f}^{0,k},\psi)\}\theta\,dxdt \tag{73}$$

або те саме

$$\int\limits_{\Omega_k}(v^\nu(x,T),\psi(x))\theta(T)\,dx-\iint\limits_{Q_k}(v^\nu,\psi)\theta'\,dxdt+\iint\limits_{Q_k}\{\sum_{j=1}^n(\widetilde{a}^j(x,t,v^\nu,\nabla v^\nu),\psi_{x_j})+$$

$$+(\widetilde{a}^0(x,t,v^\nu,\nabla v^\nu),\psi)\}\theta\,dxdt-\iint\limits_{Q_k}\{\sum_{j=1}^n(\widetilde{f}^{j,k},\psi_{x_j})+(\widetilde{f}^{0,k},\psi)\}\theta\,dxdt=0, \tag{74}$$

де

$$\psi:=(\sum_{m=1}^\mu\gamma_1^m w_m,\dots,\sum_{m=1}^\mu\gamma_N^m w_m)^\top\in[V^\mu]^N:=[\{\sum_{l=1}^\mu\gamma_l w_l(x),x\in\Omega_k\colon\gamma_l\in\mathbb{R},\,l\in\overline{1,\nu}\}]^N.$$

Тепер зауважимо, що з (64) випливає оцінка

$$\|v^\nu(x,T)\|_{[L^2(\Omega)]^N}\leqslant C_{12}, \tag{75}$$

де $C_{12}>0$ — стала, яка не залежить від ν. Отже, існують підпослідовність послідовності $\{v^\nu\}$, яку позначимо теж через $\{v^\nu\}$, і функція $\xi\in[L^2(\Omega)]^N$ такі, що

$$v^\nu(\cdot,T)\underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow}\xi(\cdot)\quad\text{слабко в}\quad[L^2(\Omega)]^N. \tag{76}$$

Тепер, врахувавши (68) — (72), (76), перейдемо в (74) до границі при $\nu\to\infty$. У підсумку отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_k}(\xi(x),\psi(x))\theta(T)\,dx-\iint\limits_{Q_k}(v,\psi)\theta'\,dxdt+\iint\limits_{Q_k}\{\sum_{j=1}^n(\chi^j,\psi_{x_j})+(\chi^0,\psi)-$$

$$-\sum_{j=1}^n(\widetilde{f}^{j,k},\psi_{x_j})-(\widetilde{f}^{\,0,k},\psi)\}\theta\,dxdt=0 \tag{77}$$

для будь-яких $\psi\in[V^l]^N$, де l — довільне натуральне число. Оскільки множина $\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}}[V^l]^N$ є щільною в просторі $[\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_k)\cap L^{p(\cdot)}(\Omega_k)]^N$, то тотожність (77) виконується для будь-яких $\psi\in[\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_k)\cap L^{p(\cdot)}(\Omega_k)]^N$. Зокрема, звідси отримаємо

$$-\int\limits_{Q_k}(v,\psi)\omega'\,dxdt+\iint\limits_{Q_k}\{\sum_{j=1}^n(\chi^j,\psi_{x_j})+(\chi^0,\psi)-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}(\widetilde{f}^{j,k},\psi_{x_j})-(\widetilde{f}^{0,k},\psi)\}\omega\,dxdt=0 \tag{78}$$

для будь-яких $\psi\in[\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_k)\cap L^{p(\cdot)}(\Omega_k)]^N$ і $\omega\in C^1_{\mathrm{c}}(T-k,T)$.

Зауважимо, що з (78) і леми 1 випливає, що $v\in[C([0,T];L^2(\Omega_k))]^N$, тобто має зміст значення $v(\cdot,T)$. Доведемо, що $\xi(\cdot)=v(\cdot,T)$. Приймемо в (77) замість θ вираз $\theta\,h_\delta$, де $\delta\in(0,k)$ — довільне число, $h_\delta(t)=1$, коли $t<T-\delta$, $h_\delta(t)=0$, коли $t>T$, $h_\delta(t)=-(t-T)/\delta$, коли $t\in[T-\delta,T]$. У підсумку матимемо

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_{T-\delta}^{T}\int\limits_{\Omega_k}(v,\psi)\theta\,dxdt-\int\limits_{Q_k}(v,\psi)\theta' h_\delta\,dxdt+\iint\limits_{Q_k}\{\sum_{j=1}^{n}(\chi^j,\psi_{x_j})+(\chi^0,\psi)-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}(\widetilde{f}^{j,k},\psi_{x_j})-(\widetilde{f}^{0,k},\psi)\}\theta h_\delta\,dxdt=0. \tag{79}$$

Перейдемо в цій рівності до границі, коли $\delta\to0$. Врахувавши, що

$$v\in[C([0,T];L^2(\Omega))]^N,$$

отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_k}(v(x,T),\psi(x))\theta(T)\,dxdt-\iint\limits_{Q_k}(v,\psi)\theta'\,dxdt+\iint\limits_{Q_k}\{\sum_{j=1}^{n}(\chi^j,\psi_{x_j})+(\chi^0,\psi)-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}(\widetilde{f}^{j,k},\psi_{x_j})-(\widetilde{f}^{0,k},\psi)\}\theta\,dxdt=0 \tag{80}$$

для будь-яких $\psi\in[\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_k)\cap L^{p(\cdot)}(\Omega_k)]^N$ і $\theta\in C^1[T-k,T]$. Звідси та з (77) випливає, що $\xi(x)=v(x,T)$ для майже всіх $x\in\Omega_k$, тобто (див. (76)) маємо

$$v^\nu(\cdot,T)\underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow}v(\cdot,T)\quad\text{слабко в}\quad[L^2(\Omega)]^N. \tag{81}$$

Зокрема, звідси маємо

$$\|v(\cdot,T)\|_{[L^2(\Omega)]^N}\leqslant\varliminf_{\nu\to+\infty}\|v^\nu(\cdot,T)\|_{[L^2(\Omega)]^N}. \tag{82}$$

Тепер доведемо, що

$$\iint\limits_{Q_k}\Big\{\sum_{j=1}^{n}(\chi^j,\psi_{x_j})+(\chi^0,\psi)\Big\}\omega\,dxdt=$$

$$=\iint\limits_{Q_k}\{\sum_{j=1}^{n}(\widetilde{a}^j(x,t,v,\nabla v),\psi_{x_j})+(\widetilde{a}^0(x,t,v,\nabla v),\psi)\}\omega\,dxdt \tag{83}$$

для будь-яких $\psi \in [\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_k) \cap L^{p(\cdot)}(\Omega_k)]^N$ і $\omega \in C^1_c(T-k,T)$. Для цього розглянемо вираз

$$M_\nu := \iint\limits_{Q_k} \Big\{ \sum_{j=1}^n \big(\widetilde{a}^j(x,t,w,\nabla w) - \widetilde{a}^j(x,t,v^\nu,\nabla v^\nu), w_{x_j} - v^\nu_{x_j}\big) +$$

$$+ \big(\widetilde{a}^0(x,t,w,\nabla w) - \widetilde{a}^0(x,t,v^\nu,\nabla v^\nu), w - v^\nu\big)\Big\}\, dxdt, \tag{84}$$

де $w \in [H^{1,0}_0(Q_k) \cap L^{p(\cdot)}(Q_k)]^N$ — поки що довільна функція. На підставі умови **4**) правильна нерівність $M_\nu \geqslant 0$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Маємо

$$0 \leqslant M_\nu = \iint\limits_{Q_k} \Big[\sum_{j=1}^n (\widetilde{a}^j(x,t,w,\nabla w), w_{x_j} - v^\nu_{x_j}) + (\widetilde{a}^0(x,t,w,\nabla w), w - v^\nu)\Big]\, dxdt -$$

$$- \iint\limits_{Q_k} \Big[\sum_{j=1}^n (\widetilde{a}^j(x,t,v^\nu,\nabla v^\nu), w_{x_j}) - (\widetilde{a}^0(x,t,v^\nu,\nabla v^\nu), w)\Big]\, dxdt +$$

$$+ \iint\limits_{Q_k} \Big[\sum_{j=1}^n (\widetilde{a}^j(x,t,v^\nu,\nabla v^\nu), v^\nu_{x_j}) + (\widetilde{a}^0(x,t,v^\nu,\nabla v^\nu), v^\nu)\Big]\, dxdt. \tag{85}$$

З (57) і (58) при $\tau = T$ випливає

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_k} |v^\nu(x,T)|^2\, dx + \iint\limits_{Q_k} \{\sum_{j=1}^n (\widetilde{a}^j(x,t,v^\nu,\nabla v^\nu), v^\nu_{x_j}) + (\widetilde{a}^0(x,t,v^\nu,\nabla v^\nu), v^\nu) -$$

$$- \sum_{j=1}^n (\widetilde{f}^{j,k}, v^\nu_{x_j}) - (\widetilde{f}^{0,k}, v^\nu)\}\, dxdt = 0.$$

Звідси матимемо

$$\iint\limits_{Q_k} \{\sum_{j=1}^n (\widetilde{a}^j(x,t,v^\nu,\nabla v^\nu), v^\nu_{x_j}) + (\widetilde{a}^0(x,t,v^\nu,\nabla v^\nu), v^\nu)\}\, dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q_k} \{\sum_{j=1}^n (\widetilde{f}^{j,k}, v^\nu_{x_j}) + (\widetilde{f}^{0,k}, v^\nu)\}\, dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_k} |v^\nu(x,T)|^2\, dx. \tag{86}$$

Отже, з (85) і (86) отримаємо

$$0 \leqslant M_\nu = \iint\limits_{Q_k} \Big[\sum_{j=1}^n (\widetilde{a}^j(x,t,w,\nabla w), w_{x_j} - v^\nu_{x_j}) + (\widetilde{a}^0(x,t,w,\nabla w), w - v^\nu)\Big]\, dxdt -$$

$$- \iint\limits_{Q_k} \Big[\sum_{j=1}^n (\widetilde{a}^j(x,t,v^\nu,\nabla v^\nu), w_{x_j}) + (\widetilde{a}^0(x,t,v^\nu,\nabla v^\nu), w)\Big]\, dxdt +$$

$$+\iint\limits_{Q_k}\Big[\sum_{j=1}^{n}(\widetilde{f}^{j,k},v^{\nu}_{x_j})+(\widetilde{f}^{0,k},v^{\nu})\Big]\,dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_k}|v^{\nu}(x,T)|^2\,dx. \tag{87}$$

Звідси та з (68)—(72), (82) випливає, що

$$0\leqslant\varlimsup_{\nu\to\infty}M_\nu\leqslant\iint\limits_{Q_k}\Big[\sum_{j=1}^{n}(\widetilde{a}^j(x,t,w,\nabla w),w_{x_j}-v_{x_j})+(\widetilde{a}^0(x,t,w,\nabla w),w-v)\Big]\,dxdt-$$

$$-\iint\limits_{Q_k}\Big[\sum_{j=1}^{n}(\chi^j,w_{x_j})+(\chi^0,w)\Big]\,dxdt+\iint\limits_{Q_k}\Big[\sum_{j=1}^{n}(\widetilde{f}^{j,k},v_{x_j})+(\widetilde{f}^{\,0,k},v)\Big]\,dxdt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_k}|v(x,T)|^2\,dx. \tag{88}$$

З рівності (78) і леми 1 випливає, що

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_k}|v(x,T)|^2\,dx+\iint\limits_{Q_k}\Big[\sum_{j=1}^{n}(\chi^j,v_{x_j})+(\chi^0,v)\Big]\,dxdt-$$

$$-\iint\limits_{Q_k}\Big[\sum_{j=1}^{n}(\widetilde{f}^{j,k},v_{x_j})+(\widetilde{f}^{\,0,k},v)\Big]\,dxdt=0. \tag{89}$$

Отже, з (88) і (89) матимемо

$$\iint\limits_{Q_k}\Big[\sum_{j=1}^{n}(\widetilde{a}^j(x,t,w,\nabla w)-\chi^j,w_{x_j}-v_{x_j})+(\widetilde{a}^0(x,t,w,\nabla w)-\chi^0,w-v)\Big]dxdt\geqslant 0. \tag{90}$$

Приймемо в (90) $w=v+\lambda\psi\omega$, де $\lambda>0$ — довільне число, ψ — довільна функція з $[\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_k)\cap L^{p(\cdot)}(\Omega_k)]^N$, а ω — будь-яка функція з простору $C^1_{\rm c}(T-k,T)$. У підсумку отримаємо

$$\lambda\iint\limits_{Q_k}\Big[\sum_{j=1}^{n}(\widetilde{a}^j(x,t,v+\lambda\psi\omega,\nabla(v+\lambda\psi\omega))-\chi^j(x,t),\psi_{x_j}(x))+$$

$$+(\widetilde{a}^0(x,t,v+\lambda\psi\omega,\nabla(v+\lambda\psi\omega))-\chi^0(x,t),\psi(x))\Big]\omega(t)\,dxdt\geqslant 0. \tag{91}$$

Поділимо (91) на λ і перейдемо до границі, коли $\lambda\to 0+$. Тоді, врахувавши умови на (a^j) і теорему Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла, отримаємо

$$\iint\limits_{Q_k}\Big[\sum_{j=1}^{n}(\widetilde{a}^j(x,t,v,\nabla v)-\chi^j(x,t),\psi_{x_j}(x))+$$

$$+(\widetilde{a}^0(x,t,v,\nabla v)-\chi^0(x,t),\psi(x))\Big]\omega(t)\,dxdt\geqslant 0 \tag{92}$$

для будь-яких $\psi\in[\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega_k)\cap L^{p(\cdot)}(\Omega_k)]^N$, $\omega\in C^1_c(T-k,T)$.

З (92) випливає (83). На підставі (78) і (83) маємо (51). Отже, існування функції u^k ми довели. Єдиність функції u^k для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ будемо доводити методом від супротивного. Нехай $\widetilde{u}^k$ — ще одна така функція як u^k. Від інтегральної тотожності (47), записаної для u^k віднімемо цю ж тотожність, але записану для $\widetilde{u}^k$ і до отриманої тотожності застосуємо лему 1 з $t_0 = T-k,\ t_1 = \tau \in (T-k, T],\ w = 1,\ \theta = 1,\ v = u^k - \widetilde{u}^k$. У підсумку отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_k} |u^k(x,\tau) - \widetilde{u}^k(x,\tau)|^2\,dx + \int\limits_{T-k}^{\tau}\int\limits_{\Omega_k} \Big\{ \sum_{j=1}^n \big(a^j(x,t,u^k,\nabla u^k) - a^j(x,t,\widetilde{u}^k,\nabla\widetilde{u}^k),\ (u^k - \widetilde{u}^k)_{x_j}\big) +$$

$$+\big(a^0(x,t,u^k,\nabla u^k) - a^0(x,t,\widetilde{u}^k,\nabla\widetilde{u}^k),\ u^k - \widetilde{u}^k\big)\Big\}\,dxdt = 0. \tag{93}$$

З умови **4)** випливає, що другий член лівої частини (93) невід'ємний. А тому обидва члени лівої частини рівності (93) дорівнюють нулю. Звідси одержуємо, що $u^k(x,t) = \widetilde{u}^k(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q_k$.

6. Доведення основного результату

6.1. **Існування узагальненого розв'язку задачі** (1), (2) **на просторі** $\mathbb{A}_p^* \times \mathbb{F}_p \times \Phi_p$**, де** $p \in \mathbb{P}^*$**.** Нехай $(a^j) \in \mathbb{A}_p^*,\ (f^j) \in \mathbb{F}_p,\ \varphi \in \Phi_p$ для деякого $p \in \mathbb{P}^*$. Побудуємо послідовність функцій $\{u^k\}$ так, як у пункті 5. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ функцію u^k продовжимо нулем на всю множину Q і за цим продовженням залишимо позначення u^k. Доведемо, що послідовність $\{u^k\}$ містить підпослідовність, яка збігається в певному сенсі до $u \in SPF((a^j),(f^j),\varphi)$.

Нехай k і l — довільні натуральні числа більші за 1, а R_0, R — будь-які дійсні числа такі, що $0 < R_0 < R \leqslant \min\{k,l\} - 1,\ R \geqslant 1,\ q$ — дійсне число, яке задовольняє відповідні умови у формулюванні теореми 1 і таке, що $n - q/(q-2) < 0$. Тоді з леми 2, взявши $R_* := \min\{k,l\} - 1$, отримаємо

$$\max_{t\in[T-R_0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u^k(x,t) - u^l(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} [\sum_{j=1}^n |u^k_{x_j} - u^l_{x_j}|^2 + |u^k - u^l|^{p(x)}]\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_1\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\varkappa} R^{n+1-q/(q-2)}, \tag{94}$$

де $C_1 > 0,\ \varkappa > 0$ — сталі, які від R_0 і R не залежать.

Нехай $\varepsilon > 0$ — яке-небудь число. Виберемо $R \geqslant 1$ настільки великим, щоб права частина нерівності (94) була меншою за ε. Тоді для будь-яких $k > R+1$ і $l > R+1$ ліва частина нерівності (94) менша за ε. А це означає, що послідовність функцій $\{u^k|_{Q_{R_0}}\}_{k=1}^\infty$ є фундаментальною в $[H_0^{1,0}(Q_{R_0}) \cap L^{p(\cdot)}(Q_{R_0}) \cap C([T-R_0,T]; L^2(\Omega_{R_0}))]^N$. Оскільки $R_0 > 0$ — довільне число, то звідси випливає існування функції $u \in [H^{1,0}_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C((-\infty,T]; L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))]^N$ такої, що

$$u^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в} \quad [H^{1,0}_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C((-\infty,T]; L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))]^N. \tag{95}$$

Тепер зауважимо, що на підставі умови **3**) на (a^j), матимемо

$$\iint\limits_{Q_{R_0}} |a^j(x,t,u^k,\nabla u^k) - a^j(x,t,u,\nabla u)|^2\,dxdt \leqslant$$

(96)
$$\leqslant 2B^2 \iint\limits_{Q_{R_0}} [|\nabla u^k - \nabla u|^2 + |u^k - u|^2)]\,dxdt, \quad j=\overline{1,n}.$$

З (95) і (96), оскільки R_0 — довільне, випливає, що

(97)
$$a^j(\cdot,\cdot,u^k(\cdot,\cdot),\nabla u^k(\cdot,\cdot)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a^j(\cdot,\cdot,u(\cdot,\cdot),\nabla u(\cdot,\cdot)) \quad \text{(сильно) в} \quad [L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})]^N,\ j=\overline{1,n}.$$

Доведемо, що існує підпослідовність $\{u^{k_s}\}$ послідовності $\{u^k\}$ така, що

(98)
$$a^0(\cdot,\cdot,u^{k_s}(\cdot,\cdot),\nabla u^{k_s}(\cdot,\cdot)) \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} a^0(\cdot,\cdot,u(\cdot,\cdot),\nabla u(\cdot,\cdot)) \quad \text{слабко в} \quad [L^{p'(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})]^N.$$

Нехай $R_0>0$ — яке-небудь число. Тоді з наслідку леми **2** (взявши $R=R_0+1$) маємо

(99)
$$\max_{t\in[T-R_0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u^k(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} [|\nabla u^k(x,t)|^2 + |u^k(x,t)|^{p(x)}]\,dxdt \leqslant C_1(R_0),$$

де $k\geqslant R+1$, $C_1(R_0)$ — стала, яка від k не залежить. На підставі умови **2**) і нерівності Гельдера для майже всіх $(x,t)\in Q$ таких, що $p^-\leqslant p(x)\leqslant p^+$, маємо

$$|a_i^0(x,t,u^k(x,t),\nabla u^k(x,t))|^{p'(x)} \leqslant |h^0_{i,1}(x,t)(|\nabla u^k(x,t)|^{2/p'(x)} + |u^k(x,t)|^{p(x)-1})+$$

$$+h^0_{i,2}(x,t)|^{p'(x)} \leqslant (2|h^0(x,t)|^{p(x)}+1)^{\frac{p'(x)}{p(x)}}(|\nabla u^k(x,t)|^2+$$

(100)
$$+|u^k(x,t)|^{p(x)} + |h^0_{i,2}(x,t)|^{p'(x)}), \quad i=\overline{1,N}.$$

Проінтегрувавши нерівність (100) по Q_{R_0}, врахувавши (99), отримаємо

(101)
$$\iint\limits_{Q_{R_0}} |a^0(x,t,u^k(x,t),\nabla u^k(x,t))|^{p'(x)}\,dxdt \leqslant C_{13}(R_0), \quad k>R_0+2,$$

де $C_{13}(R_0)>0$ — стала, яка від k не залежить, але може залежати від R_0.

На підставі (95) і (101), врахувавши рефлексивність простору $[L^{p(\cdot)}(Q_{R_0})]^N$, робимо висновок про існування підпослідовності $\{u^{k_s}\}_{s=1}^\infty$ послідовності $\{u^k\}_{k=1}^\infty$ та функції $\chi^0\in[L^{p'(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})]^N$ таких, що

(102)
$$u^{k_s} \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{майже всюди на} \quad Q,$$

(103)
$$a^0(\cdot,\cdot,u^{k_s}(\cdot,\cdot),\nabla u^{k_s}(\cdot,\cdot)) \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} \chi^0(\cdot,\cdot) \quad \text{слабко в} \quad [L^{p'(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})]^N.$$

З відомого твердження (див., наприклад, [2]) отримаємо, що

(104)
$$\chi^0(\cdot,\cdot) = a^0(\cdot,\cdot,u(\cdot,\cdot),\nabla u(\cdot,\cdot)).$$

Зі (103) і (104) маємо (98).

Нехай $\psi \in [\overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{c}}(\Omega)\cap L^{p(\cdot)}(\Omega)]^N$. Для кожного $s \geqslant s_*$, де $s_* \in \mathbb{N}$ таке, що $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{\Omega_{k_{s_*}}}$, з означення u^{k_s} маємо

$$\iint\limits_Q \big[-(u^{k_s},\psi)\omega' + \big\{ \sum_{j=1}^n (a^j(x,t,u^{k_s},\nabla u^{k_s}),\psi_{x_j}) + (a^0(x,t,u^{k_s},\nabla u^{k_s}),\psi)\big\}\omega\big]\,dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q \big\{ \sum_{j=1}^n (f^{j,k_s},\psi_{x_j}) + (f^{0,k_s},\psi)\big\}\omega\,dxdt. \tag{105}$$

Перейдемо в (105) до границі при $s\to+\infty$. У підсумку, врахувавши (95), (97), (98), а також те, що $f^{j,k_s} \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} f$ в $\mathbb{F}_p$, отримаємо (3) для заданої функції ψ. Оскільки ψ — довільна функція, і $u^{k_s} - \varphi^{k_s} \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} u-\varphi$ в $[H^{1,0}_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q})]^N$, то ми довели, що $u \in SPF((a^j),(f^j),\varphi)$.

6.2. **Єдиність узагальненого розв'язку задачі** (1), (2) **на просторі** $\mathbb{A}^*_p\times\mathbb{F}_p\times\Phi_p$**, де** $p\in\mathbb{P}^*$**.** Доведемо, що множина $SPF((a^j),(f^j),\varphi)$ містить не більше одного елемента. Припустимо протилежне. Нехай u^1, u^2 — два різні елементи множини $SPF((a^j),(f^j),\varphi)$. З леми 2 (R_* — довільне число) маємо

$$\max_{t\in[T-R_0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u^1(x,t)-u^2(x,t)|^2\,dx \leqslant C_1\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\varkappa} R^{n+1-q/(q-2)}, \tag{106}$$

де R_0, R — довільні сталі такі, що $0<R_0<R$, $R\geqslant 1$, $q>0$ — таке, що $n+1-q/(q-2)<0$, де C_1, $\varkappa$ — сталі, які від R_0, R не залежать.

Зафіксуємо $R_0>0$ і перейдемо в (106) до границі при $R\to+\infty$. У підсумку отримаємо, що $u^1=u^2$ на Q_{R_0}. Оскільки $R_0>0$ — довільне число, то звідси маємо, що $u^1=u^2$ на Q.

6.3. **Неперервна залежність від вхідних даних узагальненого розв'язку задачі узагальненого розв'язку задачі** (1), (2) **на просторах** $\mathbb{A}^{**}_p\times\mathbb{F}_p\times\Phi_p$ **та** $\mathbb{A}^*_p\times\mathbb{F}_p\times\{0\}$**, де** $p\in\mathbb{P}^*$**.** Легко переконатися, що досить розглянути випадок задачі (1), (2) на просторі $\mathbb{A}^{**}_p\times\mathbb{F}_p\times\Phi_p$.

Нехай $(a^{j,k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (a^j)$ в $\mathbb{A}^*_p$, $(f^{j,k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (f^j)$ в $\mathbb{F}_p$, $\varphi^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$ в Φ_p і $u^k\in SPF((a^{j,k}),(f^{j,k}),\varphi^k)$, $k\in\mathbb{N}$, та $u\in SPF((a^j),(f^j),\varphi)$.

З означення функцій u^k, де $k\in\mathbb{N}$, та u маємо

$$\iint\limits_Q\big[-(v,\psi)\omega'+\big\{\sum_{j=1}^n(a^j(x,t,\varphi+v,\nabla\varphi+\nabla v),\psi_{x_j})+(a^0(x,t,\varphi+v,\nabla\varphi+\nabla v),\psi)\big\}\omega\big]dxdt =$$

$$= \iint\limits_Q \Big\{\sum_{j=1}^n (f^j,\psi_{x_j}) + (f^0-\varphi_t,\psi)\Big\}\omega\,dxdt, \tag{107}$$

$$\iint\limits_Q\big[-(v^k,\psi)\omega'+\big\{\sum_{j=1}^n(a^j(x,t,\varphi+v^k,\nabla\varphi+\nabla v^k),\psi_{x_j})+(a^0(x,t,\varphi+v^k,\nabla\varphi+\nabla v^k),\psi)\big\}\omega\big]dxdt=$$

$$= \iint\limits_{Q} \{\sum_{j=1}^{n}(f^{j,k} + a^j(x,t,\varphi+v^k,\nabla\varphi+\nabla v^k) - a^{j,k}(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k), \psi_{x_j})+$$

$$+(f^{0,k}+a^0(x,t,\varphi+v^k,\nabla\varphi+\nabla v^k)-a^{0,k}(x,t,\varphi+v^k,\nabla\varphi+\nabla v^k)-\varphi_t^k,\ \psi)\}\omega\, dxdt, \tag{108}$$

де $v := u-\varphi,\ v^k := u^k-\varphi^k,\ k\in\mathbb{N},\ \psi$ — довільна функція з $[\overset{\circ}{H}{}^1_{\rm c}(\Omega)\cap L^{p(\cdot)}(\Omega)]^N$, а ω — будь-яка функція з $C_{\rm c}^{\infty}(-\infty,T)$.

З (107) і (108) на підставі леми 2 маємо

$$\max_{t\in[T-R_0,T]}\int\limits_{\Omega_{R_0}}|v^k(x,t)-v(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}}\big[\sum_{j=1}^{n}|v^k_{x_j}-v_{x_j}|^2+|v^k-v|^{p(x)}\big]\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\frac{R}{R-R_0}\Big)^{\varkappa}\big[C_1\,R^{n+1-q/(q-2)} + C_2\iint\limits_{Q_R}\{\sum_{j=1}^{n}|f^{j,k}-f^j+a^j(x,t,\varphi+v^k,\nabla\varphi+\nabla v^k)-$$

$$-a^{j,k}(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)|^2+|f^{0,k}-f^0+a^0(x,t,\varphi+v^k,\nabla\varphi+\nabla v^k)-$$

$$-a^{0,k}(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)-\varphi_t^k+\varphi_t|^{p'(x)}\}\,dxdt\big], \tag{109}$$

де R_0 і R — довільні сталі такі, що $0<R_0<R,\ R\geqslant 1;\ C_1,\ C_2,\ \varkappa,\ q$ — деякі сталі, причому $n-q/(q-2)<0$.

Зробимо такі оцінки

$$\iint\limits_{Q_R}\sum_{j=1}^{n}|f^{j,k}-f^j+a^j(x,t,\varphi+v^k,\nabla\varphi+\nabla v^k)-a^{j,k}(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)|^2dxdt \leqslant$$

$$\leqslant 2\iint\limits_{Q_R}\sum_{j=1}^{n}|f^{j,k}-f^j|^2+2\iint\limits_{Q_R}|a^{j,k}(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)-a^j(x,t,\varphi+v^k,\nabla\varphi+\nabla v^k)|^2dxdt, \tag{110}$$

$$\iint\limits_{Q_R}|a^{j,k}(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)-a^j(x,t,\varphi+v^k,\nabla\varphi+\nabla v^k)|^2\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant 2\iint\limits_{Q_R}|a^{j,k}(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)-a^j(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)|^2\,dxdt+$$

$$+2\iint\limits_{Q_R}|a^j(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)-a^j(x,t,\varphi+v^k,\nabla\varphi+\nabla v^k)|^2\,dxdt, \tag{111}$$

$$\iint\limits_{Q_R}|a^{j,k}(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)-a^j(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)|^2\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_{Q_R}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N,\,\eta\in\mathbb{R}^{N\times n}}\Big(\frac{|a^{j,k}(x,t,\xi,\eta)-a^j(x,t,\xi,\eta)|}{|\xi|+|\eta|+1}\Big)^2\Big(1+|u^k|+|\nabla u^k|\Big)^2\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant 2 \operatorname{ess} \sup_{(x,t)\in Q_R} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N,\eta\in\mathbb{R}^{N\times n}} \left(\frac{|a^{j,k}(x,t,\xi,\eta)-a^j(x,t,\xi,\eta)|}{|\xi|+|\eta|+1}\right)^2 \iint\limits_{Q_R} \left(1+|u^k|+|\nabla u^k|\right)^2 dxdt, \tag{112}$$

$$\iint\limits_{Q_R} |a^j(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)-a^j(x,t,\varphi+v^k,\nabla\varphi+\nabla v^k)|^2 dxdt \leqslant B^2 \iint\limits_{Q_R} |\nabla\varphi^k-\nabla\varphi|^2 dxdt, \tag{113}$$

$j=\overline{1,n}$. З (110) — (113) випливає, що

$$\iint\limits_{Q_R} \sum_{j=1}^n |f^{j,k}-f^j+a^j(x,t,\varphi+v^k,\nabla\varphi+\nabla v^k)-|a^{j,k}(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)|^2\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant 2\iint\limits_{Q_R} \sum_{j=1}^n |f^{j,k}-f^j|^2 dxdt + C_{14}[\operatorname{ess} \sup_{(x,t)\in Q_R} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N,\eta\in\mathbb{R}^{N\times n}} \Big(\frac{|a^{j,k}(x,t,\xi,\eta)-a^j(x,t,\xi,\eta)|}{|\xi|+|\eta|+1}\Big)^2 \times$$

$$\times \iint\limits_{Q_R} \left(1+|u^k|+|\nabla u^k|\right)^2 dxdt + \iint\limits_{Q_R} |\nabla\varphi^k-\nabla\varphi|^2\,dxdt]. \tag{114}$$

З наслідку леми 2 випливає, що для будь-якого $R>0$ маємо

$$\iint\limits_{Q_R} \left(1+|\nabla u^k(x,t)|^2+|u^k(x,t)|^{p(x)}\right) dxdt \leqslant C_{15}(R), \tag{115}$$

де $C_{15}(R)>0$ — стала, яка від $k\in\mathbb{N}$ не залежить.

З (114) і (115), на підставі припущень стосовно $\{(a^{j,k})\}_{k=1}^\infty$, $\{(f^{j,k})\}_{k=1}^\infty$, $\{(\varphi^k)\}_{k=1}^\infty$, випливає, що для будь-якого $R>0$ ліва частина нерівності (115) прямує до нуля при $k\to\infty$.

Тепер, використовуючи нерівність Гельдера, зробимо такі оцінки:

$$\iint\limits_{Q_R} |f^{0,k}(x,t)-f^0(x,t)+a^0(x,t,\varphi+v^k,\nabla\varphi+\nabla v^k)-a^{0,k}(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)-$$

$$-\varphi_t^k(x,t)+\varphi_t(x,t)|^{p'(x)}\,dxdt \leqslant 3^{\frac{1}{p^--1}}[\iint\limits_{Q_R} |f^{0,k}(x,t)-f^0(x,t)|^{p'(x)}\,dxdt+$$

$$+\iint\limits_{Q_R} |\varphi_t^k(x,t)-\varphi_t(x,t)|^{p'(x)}\,dxdt+$$

$$+\iint\limits_{Q_R} |a^{0,k}(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)-a^0(x,t,\varphi+v^k,\nabla\varphi+\nabla v^k)|^{p'(x)}]\,dxdt, \tag{116}$$

$$\iint\limits_{Q_R} |a^{0,k}(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)-a^0(x,t,\varphi+v^k,\nabla\varphi+\nabla v^k)|^{p'(x)}\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{1}{p^--1}}[\iint\limits_{Q_R} |a^{0,k}(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)-a^0(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)|^{p'(x)}\,dxdt+$$

$$+\iint\limits_{Q_R} |a^0(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)-a^0(x,t,\varphi+v^k,\nabla\varphi+\nabla v^k)|^{p'(x)}\,dxdt], \tag{117}$$

$$\iint\limits_{Q_R} |a^{0,k}(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)-a^0(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)|^{p'(x)}\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_{Q_R}\Big(\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N,\,\eta\in\mathbb{R}^{N\times n}} \frac{|a^{0,k}(x,t,\xi,\eta)-a^0(x,t,\xi,\eta)|}{|\xi|^{p(x)-1}+|\eta|^{\frac{2}{p'(x)}}+1}\Big)^{p'(x)}\cdot\Big(1+|u(x,t)|^{p(x)-1}+$$

$$+|\nabla u^k(x,t)|^{\frac{2}{p'(x)}}\Big)^{p'(x)}\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant 3^{\frac{1}{p^- -1}}\operatorname{ess}\sup_{(x,t)\in Q_R}\Big(\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N,\,\eta\in\mathbb{R}^{N\times n}} \frac{|a^{0,k}(x,t,\xi,\eta)-a^0(x,t,\xi,\eta)|}{|\xi|^{p(x)-1}+|\eta|^{\frac{2}{p'(x)}}+1}\Big)^{p(x)/(p(x)-1)}\times$$

$$\times\iint\limits_{Q_R}\Big(1+|u^k(x,t)|^{p(x)}+|\nabla u^k(x,t)|^2\Big)\,dxdt, \tag{118}$$

$$\iint\limits_{Q_R} |a^0(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)-a^0(x,t,\varphi+v^k,\nabla\varphi+\nabla v^k)|^{p'(x)}\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_{Q_R} |\widetilde{h}_0(x,t)|^{p'(x)}\big[\,(|\nabla\varphi^k(x,t)+\nabla v^k(x,t)|+|\nabla\varphi(x,t)+\nabla v^k(x,t)|)^{(p(x)-2)/p(x)}\times$$

$$\times|\nabla\varphi^k(x,t)-\nabla\varphi(x,t)|+(|\varphi^k(x,t)+v^k(x,t)|+|\varphi(x,t)+v^k(x,t)|)^{p(x)-2}\times$$

$$\times|\varphi^k(x,t)-\varphi(x,t)|\,\big]^{p'(x)}\,dxdt \leqslant C_{16}(R)\iint\limits_{Q_R}\{(|\nabla\varphi^k(x,t)|+|\nabla\varphi(x,t)|+$$

$$+|\nabla v^k(x,t)|)^{(p(x)-2)/(p(x)-1)}\cdot|\nabla\varphi^k(x,t)-\nabla\varphi(x,t)|^{p(x)/(p(x)-1)}+$$

$$+(|\varphi^k(x,t)|+|\varphi(x,t)|+|v^k(x,t)|)^{p(x)(p(x)-2)/(p(x)-1)}\times$$

$$\times|\varphi^k(x,t)-\varphi(x,t)|^{p(x)/(p(x)-1)}\}\,dxdt. \tag{119}$$

Тут ми використали умову **5**). Застосувавши нерівність Гельдера з

$$q(x)=2(p(x)-1)/p(x),\ \ q'(x)=2(p(x)-1)/(p(x)-2),\quad x\in\Omega,$$

та використавши твердження 1, отримаємо

$$\iint\limits_{Q_R}(|\nabla\varphi^k(x,t)|+|\nabla\varphi(x,t)|+|\nabla v^k(x,t)|)^{(p(x)-2)/(p(x)-1)}\times$$

$$\times|\nabla\varphi^k(x,t)-\nabla\varphi(x,t)|^{p(x)/(p(x)-1)}\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_{16}(R)\|\,(\,|\nabla\varphi^k(\cdot,\cdot)|+|\nabla\varphi(\cdot,\cdot)|+|\nabla v^k(\cdot,\cdot)|)^{(p(\cdot)-2)/(p(\cdot)-1)}\,\|_{L^{q(\cdot)}(Q_R)}\times$$

$$\times\|\,|\nabla\varphi^k(\cdot,\cdot)-\nabla\varphi(\cdot,\cdot)|^{p(\cdot)/(p(\cdot)-1)}\|_{L^{q'(\cdot)}(Q_R)} \leqslant$$

$$\leqslant C_{17}(R)\cdot\mathbf{S}_{\frac{p-2}{2(p-1)}}\big(\,\|\,|\nabla\varphi^k|+|\nabla\varphi|+|\nabla v^k|\,\|^2_{L^2(Q_R)}\big)\cdot\mathbf{S}_{\frac{p}{2(p-1)}}\big(\,\|\nabla\varphi^k-\nabla\varphi\|^2_{L^2(Q_R)}\big), \tag{120}$$

де $\mathbf{S}_q$ визначено в твердженні 1, $C_{16}(R), C_{17}(R)$ — додатні сталі, які від k не залежать.

Тепер застосуємо нерівність Гельдера з $q(x) = (p(x)-1)/(p(x)-2)$, $q'(x) = p(x)-1, x \in \Omega$, та використаємо твердження 1

$$\iint\limits_{Q_R}(|\varphi^k(x,t)|+|\varphi(x,t)|+|v^k(x,t)|)^{p(x)(p(x)-2)/(p(x)-1)}\cdot|\varphi^k(x,t)-\varphi(x,t)|^{p(x)/(p(x)-1)}dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_{18}(R)\|\,(\,|\varphi^k(\cdot,\cdot)|+|\varphi(\cdot,\cdot)|+|v^k(\cdot,\cdot)|)^{p(\cdot)(p(\cdot)-2)/(p(\cdot)-1)}\,\|_{L^{q(\cdot)}(Q_R)}\cdot\|\,|\varphi^k(\cdot,\cdot)-$$

$$-\varphi(\cdot,\cdot)|^{p(\cdot)/(p(\cdot)-1)}\|_{L^{q'(\cdot)}(Q_R)}\leqslant C_{19}(R)\mathbf{S}_{\frac{p-2}{p-1}}(\iint\limits_{Q_R}(|\varphi^k(x,t)|+|\varphi(x,t)|+|v^k(x,t)|)^{p(x)}dxdt)\times$$

$$\times\mathbf{S}_{\frac{1}{p-1}}(\iint\limits_{Q_R}|\varphi^k(x,t)-\varphi(x,t)|^{p(x)}\,dxdt)\leqslant C_{20}(R)\,\mathbf{S}_{\frac{p-2}{p-1}}(\mathbf{S}_p(\|\,|\varphi^k(x,t)|+|\varphi(x,t)|+$$

$$+|v^k(x,t)|\,\|_{L^{p(\cdot)}(Q_R)}))\cdot\mathbf{S}_{\frac{1}{p-1}}(\mathbf{S}_p(\|\varphi^k-\varphi\|_{L^{p(\cdot)}(Q_R)})), \tag{121}$$

де $C_{18}(R), C_{19}(R), C_{20}(R)$ — деякі, не залежні від k, сталі. Враховуючи, що

$$\|\,|\nabla\varphi^k(x,t)|+|\nabla\varphi(x,t)|+|\nabla v^k(x,t)|\,\|_{L^2(Q_R)}\leqslant C_{21}(R),$$

$$\|\,|\varphi^k(x,t)|+|\varphi(x,t)|+|v^k(x,t)|\,\|_{L^{p(\cdot)}(Q_R)}\leqslant C_{22}(R),$$

де $R>0$ — довільне число, $C_{21}(R)$, $C_{22}(R)$ — сталі, які від k не залежать, і те, що $\|f^{0,k}-f^0\|_{[L^{p'(\cdot)}(Q_R)]^N}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$, $\sum\limits_{j=1}^{n}\|f^{j,k}-f^j\|_{[L^2(Q_R)]^N}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$, $\|\varphi^k-\varphi\|_{[L^{p(\cdot)}(Q_R)]^N}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$, $\|\,|\nabla\varphi^k-\nabla\varphi|\,\|_{L^2(Q_R)}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$, $\|\varphi^k_t-\varphi_t\|_{[L^{p'(\cdot)}(Q_R)]^N}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$, з (117)–(121) отримаємо, що ліва частина нерівності (116) прямує до нуля при $k\to\infty$.

Нехай $\varepsilon>0$ — будь-яке, як завгодно мале число. Зафіксуємо довільно вибране R_0 і виберемо $R\geqslant\max\{1;2\,R_0\}$ настільки великим, щоб

$$C_1\Big(\tfrac{R}{R-R_0}\Big)R^{n+1-q/(q-2)}<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{122}$$

і зафіксуємо це значення.

Оскільки $\dfrac{R}{R-R_0}\leqslant 1+\dfrac{R}{R-R_0}\leqslant 2$ і $R\geqslant 2R_0$, то зі сказаного вище випливає існування $k_0\in\mathbb{N}$ такого, що

$$C_2\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\varkappa}\iint\limits_{Q_R}\{\sum_{j=1}^{n}|f^{j,k}-f^j+a^j(x,t,\varphi+v^k,\nabla\varphi+\nabla v^k)-$$

$$-a^{j,k}(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)|^2+|f^{0,k}-f^0+a^0(x,t,\varphi+v^k,\nabla\varphi+\nabla v^k)-$$

$$-a^{0,k}(x,t,\varphi^k+v^k,\nabla\varphi^k+\nabla v^k)-\varphi^k_t+\varphi^k|^{p'(x)}\}\,dxdt\leqslant\frac{\varepsilon}{2} \tag{123}$$

для будь-яких $k\geqslant k_0$.

З (109), (122) і (123) отримуємо

$$\max_{t\in[T-R_0,T]}\int\limits_{\Omega_{R_0}}|v^k(x,t)-v(x,t)|\,dx+\iint\limits_{Q_{R_0}}[|\nabla v^k-\nabla v|^2+|v^k-v|^{p(x)}]\,dxdt<\varepsilon \tag{124}$$

для будь-яких $k \geqslant k_0$. Звідси випливає збіжність

$$u^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в} \quad [H^{1,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \cap C((-\infty, T]; L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))]^N,$$

що і потрібно було довести.

Список використаної літератури

1. А. Н. Тихонов, *Теоремы единственности для уравнений теплопроводности*, Мат. сб. **42** (1935), no. 2, 199–216.
2. Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Москва, 1972.
3. Н. М. Бокало, *Энергетические оценки решений и однозначная разрешимость задачи Фурье для линейных и квазилинейных параболических уравнений*, Дифференц. уравнения **8** (1994), no. 8, 1325–1334; **English version:** N. M. Bokalo, *Energy estimates for solutions and unique solvability of the Fourier problem for linear and quasilinear parabolic equations*, Differ. Equ. **30** (1994), no. 8, 1226–1234.
4. Н. М. Бокало, *О задаче без начальних условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений*, Труды семинара им. И. Г. Петровского **14** (1989), 3–44.
5. П. Я. Пукач, *Про задачу без початкових умов для деяких нелінійних параболічних систем*, Укр. мат. ж. **46** (1994), no. 4, 484-–487. **English version:** P. Ya. Pukach, *On the problem without initial conditions for a nonlinear degenerating parabolic system*, Ukr. Math. J. **46** (1994), no. 4, 484–487. DOI: 10.1007/BF01060422
6. М. М. Бокало, І. Б. Паучок, *Про коректність задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності,* Мат. студії **24** (2006), no. 1, 25–48.
7. Н. М. Бокало, *Об однозначной разрешимости краевых задач для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности*, Сиб. мат. ж. **34** (1993), no. 4, 33–40. **English version:** N. M. Bokalo, *On unique solvability of boundary value problems for semilinear parabolic equations in unbounded domains without conditions at infinity*, Sib. Math. J. **34** (1993), no. 4, 620–627. DOI: 10.1007/BF00975162
8. H. Brézis, *Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without condition at infinity*, Appl. Math. Optimization **12** (1984), no. 3, 271–282. DOI: 10.1007/BF01449045
9. F. Bernis, *Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity*, Arch. Ration. Mech. Anal. **106** (1989), no. 3, 217–241. DOI: 10.1007/BF00281214
10. М. Бокало, *Однозначна розв'язність задачі без початкових умов для сильно нелінійних еліптико-параболічних рівнянь*, Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична **72** (2010), 10–25.
11. Н. М. Бокало, *Корректность первой краевой задачи и задачи Коши для некоторых квазилинейных параболических систем без условий на бесконечности*, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **25** (2006), 35–54; **English version:** N. M. Bokalo, *Correctness of the first boundary-value problem and the Cauchy problem for some quasilinear parabolic systems without conditions at infinity*, J. Math. Sci. **135** (2006), no. 1, 2625–2636. DOI: 10.1007/s10958-006-0134-6
12. O. Kovacik and I. Rakosnic, *On spaces $L^{p(x)}, W^{k,p(x)}$*, Czechosl. Math. J. **41** (1991), no. 4, 592–618.
13. О. М. Бугрій, *Параболічні варіаційні нерівності в узагальнених просторах Лебега*, Наукові записки Вінницького держ. пед. ун-ту ім. М. Коцюбинського. Серія фіз.-мат. (2002), no. 1, 310–321.
14. L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, and M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, Springer, Heidelberg, 2011.

15. O. Buhrii and N. Buhrii, *Nonlocal in time problem for anisotropic parabolic equations with variable exponents of nonlinearities*, J. Math. Anal. Appl. **473** (2019), no. 2, 695-711. DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.12.058
16. M. M. Bokalo, O. M. Buhrii, and R.A. Mashiyev, *Unique solvability of initial-boundary-value problems for anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity*, J. Nonlinear Evol. Equ. Appl. **6** (2013), 67-87.
17. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, Москва, 1958.

Стаття: надійшла до редколегії 03.09.2022
доопрацьована 09.11.2022
прийнята до друку 22.12.2022

CORRECTNESS OF THE FOURIER PROBLEM FOR NONLINEAR PARABOLIC SYSTEMS IN UNBOUNDED IN ALL VARIABLES DOMAINS WITHOUT CONDITIONS AT INFINITY

Mykola BOKALO, Taras BOKALO

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str.6 1, 79000, Lviv, UKRAINE
e-mails: mm.bokalo@gmail.com, tbokalo@gmail.com

The Fourier problem with inhomogeneous boundary conditions for nonlinear parabolic systems with variable exponents of nonlinearity in unbounded in all variables domains without conditions at infinity is considered. The existence, uniqueness, and continuous dependence of input data of weak solutions of such problems in the corresponding generalized Lebesgue and Sobolev spaces are proved. Also estimates of the solutions are obtained.

Key words: Fourier problem, parabolic system, nonlinear parabolic equation, variable exponent of nonlinearity, unbounded domain, Faedo-Galyorkin method, monotone method.