*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2022. Випуск 94. С. 79–88*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2022. Issue 94. P. 79–88*
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.94.079-088

УДК 517.53

# ПРО АБСЦИСУ ІСНУВАННЯ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ВИПАДКОВИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ З ДОВІЛЬНИМИ ДОДАТНИМИ ПОКАЗНИКАМИ

**Андрій БОДНАРЧУК, Марія КУРИЛЯК, Олег СКАСКІВ**

*Львівський національний університет ім. І. Франка,*
*вул. Університетська 1, 79000, м. Львів*
*e-mails: 8andriy1111@gmail.com, kuryliakmariya@gmail.com, olskask@gmail.com*

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ – фіксований ймовірнісний простір, $(f_n(\omega))$ – послідовність комплекснозначних випадкових величин, $\Lambda = (\lambda_n(\omega))$ – послідовність невід'ємних дійсних випадкових величин на цьому ймовірнісному просторі, причому попарно різних, тобто таких, що майже напевно (м.н.) $\lambda_k(\omega) \neq \lambda_n(\omega)$, якщо $k \neq n$. Доведено, що для абсциси $\sigma_\mu(F, \omega)$ існування максимального члена ряду Діріхле

$$F(z) = F(z, \omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(\omega) e^{z\lambda_n(\omega)},$$

м.н. виконується рівність

$$\sigma_\mu(F, \omega) = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|f_n(\omega)|}{\lambda_n(\omega)}.$$

У випадку, якщо виконується умова $\ln n = o(\ln|f_n(\omega)|)$ $(n \to +\infty)$, то абсциси збіжності й абсолютної збіжності ряду Діріхле дорівнюють абсцисі існування максимального члена. Отримані твердження застосовано до гаусових рядів Діріхле, тобто рядів з детермінованою послідовністю показників $\lambda_n(\omega) \equiv \lambda \in \mathbb{R}_+$ у випадку, коли коефіцієнти $f_n \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma_n^2)$, тобто, є центрованими комплекснозначними випадковими величинами з дисперсією $\sigma_n^2$.

*Ключові слова:* ряд Діріхле, гаусові випадкові величини, абсциса існування максимального члена, абсциса збіжності.

*2020 Mathematics Subject Classification*: 30B50

## 1. Абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле: загальний випадок

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ — фіксований ймовірнісний простір, де $\Omega$ — простір елементарних подій, $\mathcal{A}$ — $\sigma$-алгебра підмножин $\Omega$, а $\mathbb{P}$ — зліченно-адитивна ймовірнісна міра, визначена на $\sigma$-алгебрі $\mathcal{A}$, тобто ймовірність. Нехай також $\mathbf{f} = (f_n(\omega))_{n=0}^{+\infty}$ – послідовність комплекснозначних випадкових величин, $\Lambda = (\lambda_n(\omega))_{n=0}^{+\infty}$ – послідовність невід'ємних дійсних випадкових величин на цьому ймовірнісному просторі, причому попарно різних, тобто таких, що майже напевно (м.н.) $\lambda_s(\omega) \neq \lambda_l(\omega)$, якщо $s \neq l$.

Через $\mathcal{D}$ позначимо клас випадкових рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = F(z, \omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k(\omega)}, \tag{1}$$

де $z \in \mathbb{C}, \omega \in \Omega$ таких, що кожний ряд $F(z, \omega)$ з цього класу задовольняє умову: $(\forall \omega \in \Omega)(\exists x_* = x_*(F, \omega) < 0)$:

$$f_k(\omega) e^{x_* \lambda_k(\omega)} \to 0 \quad (n \to +\infty) \ \text{ м.н.}$$

Нехай $\Pi_x := \{z \in \mathbb{C} : Re\ z < x\}$ – півплощина комплексної площини $\mathbb{C}$.

Позначимо абсциси збіжності випадкового ряду Діріхле $F(z, \omega)$:

$\sigma_a(F, \omega) := \sup\{x : \text{ряд } F(z, \omega) \text{ збіжний абсолютно в } \Pi_x\}$;

$\sigma_{зб}(F, \omega) := \sup\{x : \text{ряд } F(z, \omega) \text{ збіжний в } \Pi_x\}$;

$\sigma_\mu(F, \omega) := \sup\{\sigma\colon (\forall x < \sigma)[f_k(\omega) e^{x\lambda_k(\omega)} \to 0,\ n \to +\infty)]\}$ — абсциса існування максимального члена ряду $F(z, \omega)$.

Максимальний член ряду $F(z, \omega)$ позначаємо

$\mu(x, F) := \sup\{|f_k(\omega)| e^{x\lambda_k(\omega)} :\ n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Відомо (див., наприклад, [1,3,4,6]), що у випадку, коли послідовність показників $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$, $\lambda_k(\omega) \equiv \lambda_k$ є монотонно зростаючою до нескінченності послідовністю, тобто $\lambda_k < \lambda_{n+1} \uparrow +\infty$, $0 \leqslant n \uparrow +\infty$ і

$$\tau(\Lambda) := \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_k} = 0,$$

то за теоремою Валірона

$$\sigma(F) = \sigma_{зб}(F) = \alpha_0(F) := \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{\ln|a_k|}{\lambda_k}$$

для ряду Діріхле з детермінованою послідовністю коефіцієнтів $f_k(\omega) \equiv a_k$. Зазначимо, що у цьому випадку нескладно перевірити, що $\alpha_0(F) = \sigma_\mu(F)$, тому

$$\sigma(F) = \sigma_{зб}(F) = \alpha_0(F) = \sigma_\mu(F).$$

У загальному випадку

$$\sigma(F) \leqslant \sigma_{зб}(F) \leqslant \sigma_\mu(F) \leqslant \sigma(F) + \tau.$$

Існують ряди Діріхле (див., наприклад, [2,3]), для яких досягаються всі рівності в останній потрійній нерівності. Зокрема, існують три ряди Діріхле $F_1,\ F_2,\ F_3$ такі, що

$$\sigma(F_1) = \sigma_\mu(F_1), \quad \sigma_{зб}(F_2) = \sigma_\mu(F_2), \quad \sigma_\mu(F_3) = \sigma(F_3) + \tau.$$

У статті [4] доведено таке твердження.

**Твердження 1.** *Нехай послідовність $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$ така, що*

(2) $$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \lambda_k(\omega) > 0 \quad \textit{м.н.}$$

*Якщо $F \in \mathcal{D}$, то*

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(F,\omega) := \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} \quad \textit{м.н.}$$

У зв'язку з цим виникає **запитання** наскільки умова (2) є істотною для того, щоб $\sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(F,\omega)$ м.н.?

Нескладно перевіряється таке: якщо

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_k(\omega) = 0,$$

то

$$F \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow f_k(\omega) \to 0 \ (n \to +\infty).$$

З останнього ж, очевидно, випливає, що

$$\sigma_\mu(F,\omega) = +\infty = \alpha_0(F,\omega).$$

Справджується таке загальніше твердження.

**Твердження 2.** *Нехай*

(3) $$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \lambda_k(\omega) < +\infty \ \textit{м.н.}$$

1. *Якщо $F \in \mathcal{D}$, то $\sigma_\mu(F,\omega) = +\infty = \alpha_0(F,\omega)$ м.н.*
2. *$F \in \mathcal{D} \iff f_k(\omega) \to 0 \ (n \to +\infty)$.*

*Доведення.* З належності ряду $F$ до класу $\mathcal{D}$ випливає існування $x_* < 0$ такого, що

$$f_k(\omega)e^{x_*\lambda_k(\omega)} \to 0 \quad (k \to +\infty).$$

З умови (3) маємо, що $\lambda^*(\omega) := \sup\{\lambda_k(\omega) : n \in \mathbb{Z}_+\} \in (0,+\infty)$ м.н.

Нехай $x > 0$ – довільне число. Тоді

$$|f_k(\omega)|e^{x\lambda_k(\omega)} = |f_k(\omega)|e^{x_*\lambda_k(\omega)} \cdot e^{(x-x_*)\lambda_k(\omega)} \leqslant$$
$$\leqslant |f_k(\omega)|e^{x_*\lambda_k(\omega)} \cdot e^{|x-x_*|\lambda^*(\omega)} \to 0 \quad (k \to +\infty)$$

як добуток нескінченно малої послідовності на сталу $C = e^{|x-x_*|\lambda^*(\omega)}$. Звідси, з одного боку, через довільність у виборі числа $x > 0$ отримуємо, що $\sigma_\mu(F,\omega) = +\infty$. З іншого боку,

$$|f_k(\omega)| \leqslant |f_k(\omega)|e^{x\lambda_k(\omega)} \to 0 \ (n \to +\infty),$$

звідки $\alpha_0(F,\omega) = +\infty$.

Навпаки, очевидно таке: якщо $f_k(\omega) \to 0 \ (n \to +\infty)$, то $F \in \mathcal{D}$. □

З тверджень 1 і 2 отримуємо таке твердження, яке вказує на те, що висновок твердження 1 правильний в класі $\mathcal{D}$ без умови (2). Саме, у ньому отримуємо вичерпну відповідь на сформульоване вище питання про істотність умови (2) для ряду $F \in \mathcal{D}$.

**Твердження 3.** *Нехай $F \in \mathcal{D}$. Тоді $\sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(F,\omega)$ м.н.*

*Доведення.* Нехай

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_1(\omega) := \{n \in \mathbb{Z}_+ \colon \lambda_k(\omega) \leqslant 1\},$$
$$\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_2(\omega) := \mathbb{Z}_+ \setminus \mathcal{N}_1.$$

Для $F \in \mathcal{D}$ розглянемо два ряди

$$F_1(z,\omega) = \sum_{n\in\mathcal{N}_1} f_k(\omega)e^{z\lambda_k(\omega)},$$
$$F_2(z,\omega) = \sum_{n\in\mathcal{N}_2} f_k(\omega)e^{z\lambda_k(\omega)}.$$

З твердження 1 у випадку $F_2 \in \mathcal{D}$ маємо, що

$$\sigma_\mu(F_2,\omega) = \alpha_0(F_2,\omega) = \varliminf_{n\to+\infty,\ n\in\mathcal{N}_2} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)}.$$

З твердження 2 у випадку $F_1 \in \mathcal{D}$ отримуємо, що

$$\sigma_\mu(F_1,\omega) = \alpha_0(F_1,\omega) = +\infty.$$

Зауважимо тепер, що $F \in \mathcal{D} \Longrightarrow$ або $i)$ $F_1 \in \mathcal{D}$, або ж $ii)$ $F_2 \in \mathcal{D}$.

$i)$ Якщо $F_1 \notin \mathcal{D}$, то або

$$(\forall x)\colon\ f_k(\omega)e^{x\lambda_k(\omega)} \not\to 0\ (n \to +\infty,\ n \in \mathcal{N}_1),$$

що неможливо, або $|\mathcal{N}_1| < +\infty$, а це означає, що

$$\mathcal{N}_1 = \mathbb{N} \setminus \{n\colon 0 \leqslant n \leqslant n_0 < +\infty\}.$$

Тоді, $F_2 \in \mathcal{D}$ і, тому,

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \sigma_\mu(F_2,\omega) = \alpha_0(F_2,\omega) = \alpha_0(F,\omega).$$

$ii)$ Якщо $F_2 \notin \mathcal{D}$, то або

$$(\forall x)\colon\ f_k(\omega)e^{x\lambda_k(\omega)} \not\to 0\ (n \to +\infty,\ n \in \mathcal{N}_2),$$

що неможливо, або $|\mathcal{N}_2| < +\infty$, а це означає, що

$$\mathcal{N}_2 = \mathbb{N} \setminus \{n\colon 0 \leqslant n \leqslant n_0 < +\infty\}.$$

Тоді, $F_1 \in \mathcal{D}$ і, тому,

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \sigma_\mu(F_1,\omega) = \alpha_0(F_1,\omega) = \alpha_0(F,\omega),$$

тобто

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \alpha_0(F,\omega) = +\infty.$$

Залишається розглянути випадок $F_1 \in \mathcal{D}$ і $F_2 \in \mathcal{D}$. Тоді, з одного боку, очевидно, що

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \inf\{\sigma_\mu(F_1,\omega),\ \sigma_\mu(F_2,\omega)\} = \inf\{\alpha_0(F_1,\omega),\ \alpha_0(F_2,\omega)\},$$

а з іншого боку —

$$\inf\{\alpha_0(F_1,\omega),\ \alpha_0(F_2,\omega)\} = \alpha_0(F,\omega).$$

Твердження 3 доведено повністю. □

За допомогою твердження 3 далі отримаємо таке твердження.

**Твердження 4.** *Нехай $F \in \mathcal{D}$. Якщо виконується умова* $\ln n = o(\ln |f_k(\omega)|)$ $(n \to +\infty)$*, то м.н.*

$$\sigma_a(F,\omega) = \sigma_{зб}(F,\omega) = \alpha_0(F,\omega) = \sigma_\mu(F,\omega).$$

Твердження 5 доведене в [7] (також див. [4, 6, 8], де це твердження формулюється у наведеному нижче вигляді).

**Твердження 5.** *Нехай $F \in \mathcal{D}$. Тоді*

$$\sigma_a(F,\omega) \leqslant \sigma_{зб}(F,\omega) \leqslant \alpha_0(F,\omega) \quad (\forall \omega \in \Omega),$$

*і*

$$\sigma_a(F,\omega) \geqslant \gamma(\omega)\alpha_0(F,\omega) - \delta(\omega) \geqslant \gamma(\omega)\sigma_{зб}(F,\omega) - \delta(\omega) \tag{4}$$

*для довільних дійсних випадкових величин $\gamma, \delta$ і для всіх $\omega \in \Omega$ таких, що $\gamma(\omega) > 0$ і*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{1-\gamma(\omega)} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} < +\infty. \tag{5}$$

Зазначимо, що у статті [4] розглядаються ряди Діріхле з м.н. попарно різними невід'ємними показниками такими, що $\varliminf\limits_{n\to+\infty} \lambda_n(\omega) > 0$ м.н. і елементарний аналіз доведення зі статті [7] показує, що це твердження правильне і для класу рядів Діріхле, що розглядаються у цій статті, тобто, твердження 5 залишається правильним без цієї останньої умови. З тверджень 3 і 5 отримуємо таке твердження 6 (це твердження 5 з [4], доведене там за умови $\varliminf\limits_{n\to+\infty} \lambda_n(\omega) > 0$ м.н.).

**Твердження 6.** *Нехай $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ має вигляд* (1)*. Якщо для довільних функцій $\gamma, \delta \colon \Omega \to \mathbb{R}$ і всіх $\omega \in \Omega$ таких, що $\gamma(\omega) \geqslant 0$ м.н. виконується умова* (5)*, то м.н. виконуються співвідношення*

$$\sigma_a(F,\omega) \geqslant \gamma(\omega)\alpha_0(F,\omega) - \delta(\omega) = \gamma(\omega)\sigma_\mu(\omega) - \delta(\omega) \geqslant \gamma(\omega)\sigma_{зб}(F,\omega) - \delta(\omega). \tag{6}$$

Якщо повторити доведення твердження 9 зі статті [4] на підставі твердження 6, то ми отримаємо, що твердження 9 правильне і без умови $\varliminf\limits_{n\to+\infty} \lambda_n(\omega) > 0$ м.н. Зокрема, справджується твердження 7.

**Твердження 7.** *Нехай $F \in \mathcal{D}$ і має вигляд* (1)*, а*

$$h_1(\omega) := \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\ln n},$$
$$h_2(\omega) := \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\ln n}.$$

$1^0$. *Якщо $h_1(\omega) \in [-\infty, 0)$ м.н., то нерівності*

$$\sigma_a(F,\omega) \geqslant (1-\gamma_1(\omega))\alpha_0(\omega) = (1-\gamma_1(\omega))\sigma_\mu(F,\omega) \geqslant (1-\gamma_1(\omega))\sigma_{зб}(F,\omega) \tag{7}$$

*виконуються м.н. з* $\gamma_1(\omega) = \dfrac{1}{h_1(\omega)}$.

$2^0$. *Якщо* $h_2(\omega) \in (1, +\infty]$ *м.н., то нерівності* (7) *виконуються м.н. з* $\gamma_1(\omega) = \dfrac{1}{h_2(\omega)}$. *У цьому випадку вважаємо, що* $1/\infty = 0$.

$3^0$. *Якщо* $(|f_k(\omega)|)$ *– послідовність незалежних випадкових величин, то у випадку, коли* $h_1(\omega) \in (-\infty, 0)$ *м.н. або* $h_2(\omega) \in (1, +\infty)$ *м.н., відповідно, існують* $h_1 \in (-\infty, 0)$ *або* $h_2 \in (1, +\infty)$*, відповідно, такі, що* $h_1(\omega) = h_1$ *м.н. або* $h_2(\omega) = h_2$ *м.н., відповідно, і нерівності* (7) *виконуються м.н. з* $\gamma_1(\omega) = \dfrac{1}{h_1}$ *або з* $\gamma_1(\omega) = \dfrac{1}{h_2}$*, відповідно.*

З твердження 7 і твердження 8 зі статті [4], зокрема, отримуємо таке твердження.

**Твердження 8.** *Нехай* $F \in \mathcal{D}$. *Якщо м.н.*

$$\tau(\Lambda, \omega) := \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\lambda_k(\omega)} = 0 \quad \text{або} \qquad \ln n = o(\ln |f_k(\omega)|)\ (n \to +\infty),$$

*то м.н. виконуються рівності*

$$\sigma_{зб}(F, \omega) = \sigma_a(F, \omega) = \sigma_\mu(F, \omega) = \alpha_0(F, \omega).$$

Зазначимо, що це твердження порівняно з подібним твердженням 10 зі статті [4], не містить умови $\varliminf\limits_{n\to+\infty} \lambda_n(\omega) > 0$ м.н., а також дещо уточнює саме його формулювання.

## 2. Гаусові ряди Діріхле з детермінованими невід'ємними показниками

У цьому пункті розглядаємо ряди Діріхле з детермінованою послідовністю показників $\Lambda$, тобто, $\lambda_k(\omega) \equiv \lambda_k \in [0, +\infty)$ $(n \geqslant 0)$ і $\lambda_k \neq \lambda_n$ $(\forall n \neq n)$. Розглянемо спочатку випадкові ряди Діріхле вигляду

$$F(z) = F(z, \omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n(\omega) e^{z\lambda_n} \quad (z \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega), \tag{8}$$

де $\xi_n \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma_n^2)$ — комплекснозначні гаусові випадкові величини, тобто такі, що випадкові величини $\eta_n = \dfrac{\xi_n}{\sigma_n}$, $\sigma_n > 0$ $(n \geqslant 0)$ мають щільність розподілу $p_\eta$ таку, що

$$p_\eta(z) = \frac{1}{\pi} e^{-|z|^2} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Зрозуміло, що математичне сподівання $\mathbf{M}\eta_n = 0$, а дисперсія $\mathbf{D}\eta_n = 1$, тобто $\mathbf{D}\xi_n = \sigma_n^2$. Крім того, нескладно перевіряється, що

$$\mathbb{P}\{\omega \colon |\eta_n| \geqslant \lambda\} = e^{-\lambda^2},$$

а тому

$$\mathbb{P}\{\omega \colon |\eta_n| < \lambda\} = 1 - e^{-\lambda^2} \leqslant \lambda^2.$$

Зауважимо тепер, що ряд, складений з дисперсій членів початкового ряду, набуває вигляду

$$F_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{D}\big(\xi_n(\omega)e^{z\lambda_n}\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{M}\big|\xi_n(\omega)e^{z\lambda_n}\big|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n^2 e^{2x\lambda_n} \quad (z = x+iy),$$

тому за теоремою Колмогорова про три ряди [9, с. 198–204]

$$\sigma_{\text{зб}}(F,\omega) \geqslant \sigma_a(F_2) \quad \text{м.н.}$$

Протилежну нерівність (тобто рівність) можна отримати у випадку лише послідовності незалежних випадкових гаусових коефіцієнтів і в загальному це не правильно.

Проте виявляється, що рівність у випадку гаусових коефіцієнтів забезпечують природні умови або на послідовність показників, або на послідовність дисперсій гаусових коефіцієнтів. Доведемо тепер таке твердження.

**Твердження 9.** *Нехай $\xi_n \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,\sigma_n^2)$. Якщо для послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$ виконується умова $\tau(\Lambda) = 0$ або для послідовності $(\sigma_n)$ виконується умова $\ln n = o(\ln\sigma_n)$ $(n \to +\infty)$, то для абсцис збіжності ряду* (8) *виконується*

$$\sigma_{зб}(F,\omega) = \sigma_a(F,\omega) = \sigma_\mu(F,\omega) = \sigma_* \quad \textit{м.н.}$$

*Доведення.* Зауважимо спочатку, що у випадку

$$\sigma_* := \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln\sigma_n}{\lambda_n} > -\infty$$

виконується $\sigma_\mu(F_2) > -\infty$, тобто $F_2 \in \mathcal{D}$.

З іншого боку, застосовуючи стандартні міркування на підставі першої частини леми Бореля-Кантелі, отримуємо, що нерівності

$$-\varepsilon\ln n \leqslant -\ln|\eta_n(\omega)| \leqslant \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\ln n \tag{9}$$

виконуються м.н. для всіх достатньо великих $n \geqslant n_0(\omega)$; $\varepsilon > 0$ — довільне. Справді, нехай

$$A_n = \{\omega\colon |\eta_n(\omega)| \geqslant n^\varepsilon\}.$$

Оскільки

$$\mathbb{P}(|\eta_n| \geqslant \lambda) = \exp(-\lambda^2),$$

то $\mathbb{P}(A_n) = \exp(-n^{2\varepsilon})$, звідки

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^{2\varepsilon}} < +\infty.$$

Тому, за першою частиною леми Бореля-Кантелі з ймовірністю, що дорівнює одиниці, відбувається лише скінченна кількість подій $(A_n)$, тобто існує $D_1 \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(D_1) = 1$ така, що для кожного $\omega \in D_1$ виконується

$$(\exists n_1(\omega))(\forall n \geqslant n_1(\omega)) : |\eta_n(\omega)| \leqslant n^\varepsilon.$$

Якщо тепер розглянути

$$B_n = \{\omega\colon |\eta_n(\omega)| < n^{-1/2-\varepsilon}\},$$

то $\mathbb{P}(B_n) \leqslant n^{-1-2\varepsilon}$, звідки $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) < +\infty$. Тому, як і перед цим, отримуємо, що існує $D_2 \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(D_2) = 1$ така, що для кожного $\omega \in D_2$ виконується

$$(\exists n_2(\omega))(\forall n \geqslant n_2(\omega)) : |\eta_n(\omega)| \geqslant n^{-1/2-\varepsilon}.$$

Залишається вибрати

$$n_0(\omega) = \max\{n_1(\omega), n_2(\omega)\}, \qquad D := D_1 \cap D_2.$$

Тоді для кожного $\omega \in D$ нерівності (9) виконуються для всіх $n \geqslant n_o(\omega)$. Але $\mathbb{P}(D) = 1$.

З нерівностей (9) нескладно отримуємо, що у випадку $\sigma_* > -\infty$ також виконується $\sigma_\mu(F, \omega) > -\infty$ м.н., тобто, $F \in \mathcal{D}$.

Звідси, за доведеним у першому пункті м.н.

$$\begin{aligned}\sigma_\mu(F, \omega) = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln(\sigma_n|\eta_n(\omega)|)}{\lambda_n} &\leqslant \\ \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln\sigma_n + \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\ln n}{\lambda_n} &\leqslant \\ \leqslant \sigma_* + \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\tau(\Lambda),&\end{aligned}$$

а також м.н.

$$\sigma_\mu(F, \omega) \geqslant \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln\sigma_n - \varepsilon\ln n}{\lambda_n} \geqslant \sigma_* - \varepsilon\tau(\Lambda).$$

У випадку $\tau(\Lambda) = 0$ маємо м.н.

$$\sigma_\mu(F, \omega) = \sigma_*.$$

Тому, застосовуючи доведене у першому пункті до $F_2$, отримуємо, що м.н.

$$\sigma_\mu(F_2) = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln\sigma_n}{\lambda_n} = \sigma_* = \sigma_\mu(F, \omega).$$

Якщо тепер припустити, що виконується умова

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\ln\sigma_n} = 0,$$

то подібно отримаємо, що

$$\sigma_\mu(F, \omega) \geqslant \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln\sigma_n + o(\ln\sigma_n)}{\lambda_n} \geqslant \sigma_*,$$

а також

$$\sigma_\mu(F, \omega) = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln(\sigma_n|\eta_n(\omega)|)}{\lambda_n} \leqslant \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln\sigma_n + o(\ln\sigma_n)}{\lambda_n} \leqslant \sigma_*,$$

звідки знову $\sigma_\mu(F, \omega) = \sigma_* = \sigma_\mu(F_2)$ м.н.

Залишається пригадати, що як у випадку $\tau(\Lambda) = 0$, так і у випадку $\ln n = o(\ln \sigma_n)$ $(n \to +\infty)$, $\sigma_{\text{зб}}(F,\omega) = \sigma_\mu(F,\omega)$ м.н., $\sigma_a(F_2) = \sigma_\mu(F_2)$. Тому остаточно, зокрема, отримуємо, що м.н.

$$\sigma_{\text{зб}}(F,\omega) = \sigma_a(F,\omega) = \sigma_*.$$

$\square$

## Список використаної літератури

1. М. М. Шеремета, *Ряди Діріхле*, ІСДО, Київ, 1993.
2. P. V. Filevych, *On the relations between the abscissa of convergence and the abscissa of absolute convergence of random Dirichlet series*, Mat. Stud. **20** (2003), no. 1, 33–39.
3. О. Ю. Задорожна, О. Б. Скасків, *Елементарні зауваження про абсциси збіжності інтегралів Лапласа-Стілт'єса*, Буковинський матем. журн. **1** (2013), no. 3–4, 43–48.
4. О. Б. Скасків, Н. Ю. Стасів, *Абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **84** (2017), 96–112.
5. О. Б. Скасків, *Теорія ймовірностей*, Видав. І. Е. Чижиков, Львів, 2018, 143 с.
6. A. O. Kuryliak, O. B. Skaskiv, and N. Yu. Stasiv, *On the abscissas of convergence of Dirichlet series with random pairwise independent exponents*, arXiv:1703.03280, 2017, preprint.
7. A. O. Kuryliak, O. B. Skaskiv, and N. Yu. Stasiv, *On the convergence of Dirichlet series with random exponents*, Int. J. Appl. Math. **30** (2017), no. 3, 229–238.
8. А. О. Куриляк, О. Б. Скасків, Н. Ю. Стасів, *Про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками та коефіцієнтами*, Буковинський матем. журн. **5** (2017), no. 3–4, 90–97.
9. М. В. Карташов, *Імовірність, процеси, статистика*, ВПЦ Київський університет, Київ, 2007.

*Стаття: надійшла до редколегії 05.06.2022*
*доопрацьована 06.09.2022*
*прийнята до друку 22.12.2022*

# ON THE ABSCISSA OF EXISTENCE OF THE MAXIMAL TERM OF A RANDOM DIRICHLET SERIES WITH ARBITRARY POSITIVE EXPONENTS

**Andrii BODNARCHUK, Maria KURYLIAK, Oleh SKASKIV**

*Ivan Franko National University of Lviv,*
*Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, UKRAINE*
*e-mails: 8andriy1111@gmail.com, kuryliakmariya@gmail.com,*
*olskask@gmail.com*

Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ be a fixed probability space, $(f_n(\omega))$ be a sequence of complex-valued random variables, $\Lambda = (\lambda_n(\omega))$ be a sequence of non-negative real random variables on this probability space, which are pairwise different, i.e., such that almost surely (a.s.) $\lambda_k(\omega) \neq \lambda_n(\omega)$ if $k \neq n$. The article proves that for the abscissa $\sigma_\mu(F,\omega)$ the existence of the maximum term of the Dirichlet series

$$F(z) = F(z,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(\omega) e^{z\lambda_n(\omega)},$$

the equality

$$\sigma_\mu(F,\omega) = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|f_n(\omega)|}{\lambda_n(\omega)}$$

holds a.s. If the condition $\ln n = o(\ln|f_n(\omega)|)$ $(n \to +\infty)$ is fulfilled, then the abscissas of convergence and absolute convergence of the Dirichlet series are equal to the abscissa of the existence of the maximal term. The obtained statements are applied to Gaussian Dirichlet series, that is, series with a deterministic sequence of exponents $\lambda_n(\omega) \equiv \lambda \in \mathbb{R}_+$ in the case when the coefficients $f_n \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma_n^2)$, i.e., are centered complex-valued random variables with variance $\sigma_n^2$.

*Key words:* Dirichlet series, Gaussian random variables, abscissa of the existence of the maximal term, abscissa of the convergence.