ISSN 2078-3744. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2014. Випуск 79. С. 5–11*
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2014. Issue 79. P. 5–11

УДК 519.21

ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДЛЯ РЕДУКОВАНИХ ПРОЦЕСІВ З НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

Ірина БАЗИЛЕВИЧ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: i_ bazylevych@yahoo.com

Знайдено асимптотику твірної функції при $\tau \downarrow 0$, $t \downarrow 0$ і вигляд інтегрального рівняння для редукованого гіллястого процесу з неперервним часом.

Ключові слова: гіллястий процес, редукований гіллястий процес, твірна функція, інтегральне рівняння, функція розподілу, асимптотичне представлення, випадкова величина.

1. Вступ. Вперше редуковані гіллясті процеси були досліджені 1975 р. у статті А.М. Зубкова [6]. В ній досліджувалась поведінка найближчого загального предка. А К. Флейшман і Р. Зігмунд-Шультц ввели поняття "редукований процес" [12].

Розглянемо однорідний гіллястий процес $\mu(t)$ – кількість частинок у момент часу t за умови, що в початковий момент часу була одна частинка. Випадковий процес $\mu(t, t+\tau)$, який позначає кількість частинок у момент часу t, які в момент часу $t+\tau$ мають непорожнє потомство $(t \geqslant 0; \tau \geqslant 0)$, називають редукованим процесом.

Дослідженню різних властивостей редукованих процесів присвячені праці [2], [3], [4], [5], [7], [11], [13], [14]. Але у всіх них досліджували гіллясті процеси з дискретним часом. Лише у працях А.Л. Якиміва розглядали редуковані гіллясті процеси з неперервним часом [9], [10].

Ми отримали такі результати:

1) процес $\mu(t, t+\tau)$ – неоднорідний марківський процес при фіксованому $t+\tau$ по t;
2) при $\tau \to 0$ скінченновимірні розподіли редукованого процесу збігаються до розподілу гіллястого процесу;
3) досліджено взаємозв'язок розподілів при $t = (t+\tau)\varepsilon$ між $\mu(t, t+\tau)$ і $\mu(t)$;
4) досліджено поведінку граничних розподілів при $\tau \to \infty$ для докритичних і надкритичних процесів.

Розглянуто гіллясті процеси загального вигляду (тобто немає врахування докритичності, критичності, надкритичності). Асимптотики при $\tau \downarrow 0$, $t \downarrow 0$ t і τ є незалежними.

2. Формулювання задачі. Розглядаємо однорідний гіллястий процес $\mu(t)$ з неперервним часом. Процес $\mu(t, t+\tau)$ – редукований гіллястий процес, який відповідає процесу $\mu(t)$.

Нехай $F(t, s)$ – твірна функція процесу $\mu(t)$, а $f(s)$ – твірна функція щільностей перехідних ймовірностей цього процесу.

Введемо твірну функцію

$$\Phi(t, \tau, s) = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\mu(t, t+\tau) = k, \mu(t) > 0\} s^k$$

та твірну функцію редукованого процесу

$$\psi(t; \tau; s) = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\mu(t, t+\tau) = k | \mu(t) > 0\} s^k.$$

Функція $\Phi(t, \tau, s)$ виражається через твірну функцію процесу $\mu(t)$

$$\Phi(t, \tau, s) = F(t; s(1 - F(\tau; 0)) + F(\tau; 0)) - F(t; 0),$$

твірна функція гіллястого редукованого процесу дорівнює ([1])

$$\psi(t, \tau, s) = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\mu(t, t+\tau) = k | \mu(t) > 0\} s^k =$$

$$= \frac{F(t; s(1 - F(\tau, 0)) + F(\tau, 0)) - F(t+\tau, 0)}{1 - F(t+\tau, 0)}.$$

3. Асимптотика редукованого гіллястого процесу з неперервним часом при $\tau \downarrow 0$ та при $t \downarrow 0$.

Теорема 1. *При $\tau \downarrow 0$ виконується асимптотичне зображення*

$$\Phi(t; \tau; s) = F(t; s(1 - \tau p_0) + \tau p_0) - F(t; 0) + o(\tau).$$

При $t \downarrow 0$ $\Phi(t, \tau, s)$ має асимптотичне зображення

$$\Phi(t, \tau, s) = s(1 - F(\tau, 0)) + F(\tau, 0) + t(f[(1 - F(\tau, 0))s + F(\tau, 0)] - p_0) + o(t).$$

Доведення. Спочатку розглядаємо асимптотику при $\tau \downarrow 0$. Відомо [8], що при $t \downarrow 0$ асимптотика твірної функції гіллястого процесу з неперервним часом така:

$$F(t; s) = s + tf(s) + o(t).$$

За означенням $f(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \ldots + p_n s^n +$, тому

$$\Phi(t, \tau, s) = F(t; s(1 - F(\tau; 0)) + F(\tau; 0)) - F(t; 0) =$$

$$= F(t; s(1 - \tau f(0) + o(\tau)) + \tau f(0) + o(\tau)) - F(t; 0) =$$

$$= F(t; s(1 - \tau p_0 - o(\tau)) + \tau p_0 + o(\tau)) - F(t; 0).$$

Враховуючи неперервність по s в крузі $|s| \leqslant 1$ твірної функції, отримуємо

$$\Phi(t, \tau, s) = F(t; s(1 - \tau p_0) + \tau p_0) - F(t; 0) + o(\tau).$$

Переходимо до асимптотики при $t \downarrow 0$. Позаяк [8]

$$F(t, s_1) = s_1 + tf(s_1) + o(t)$$

і $s_1 = s(1 - F(\tau, 0)) + F(\tau, 0)$,

$$\Phi(t, \tau, s) = F(t, s_1) - F(t, 0),$$
$$F(t, 0) = 0 + tf(0) + o(t),$$
$$f(0) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + ...|_{s=0} = p_0,$$
$$F(t, 0) = tp_0 + o(t),$$

то $\Phi(t, \tau, s)$ при $t \downarrow 0$

$$\Phi(t, \tau, s) = s_1 + tf(s_1) + o_1(t) - [tp_0 + o_2(t)] = s_1 + (f(s_1) - p_0)t + o(t) =$$
$$= s(1 - F(\tau, 0)) + F(\tau, 0) + t(f[(1 - F(\tau, 0))s + F(\tau, 0)] - p_0) + o(t).$$

Теорема доведена. □

Зауваження 1. Дослідимо сенс виразу:

$$f[(1 - F(\tau, 0))s + F(\tau, 0)] - p_0.$$
$$f(\tilde{s}) = p_0 + p_1(\tilde{s}) + p_2(\tilde{s}) + ...$$
$$f(\tilde{s}) - p_0 = p_1(\tilde{s}) + p_2(\tilde{s}) + ...$$

Це твірна функція щільностей перехідних ймовірностей без виродження.

Лема 1. *Нехай у початковий момент часу було k частинок. Випадкова величина η – момент першого перетворення процесу. Тоді випадкова величина η має показниковий розподіл з параметром $-kp_1$.*

Доведення. Нехай η_1 – випадкова величина, яка позначає момент першого перетворення першої частинки, η_2 – другої частинки, ..., η_k – k-ї частинки. Тоді момент першого перетворення процесу дорівнює мінімуму моментів перетворення всіх частинок, тобто

$$\eta = \min(\eta_1, \ldots, \eta_k). \tag{1}$$

Позаяк за означенням гіллястого процесу частинки розмножуються за тим самим законом і незалежно одна від одної, то і випадкові величини η_1, η_2, ..., η_k – незалежні однаково розподілені випадкові величини.

З курсу теорії ймовірностей відомо таке: якщо випадкові величини η_1, η_2, ..., η_k – незалежні і $\eta = \min(\eta_1, \ldots, \eta_k)$, то функція розподілу випадкової величини η дорівнює

$$F_\eta(x) = F_{\min(\eta_1, \ldots, \eta_k)}(x) = 1 - (1 - F_{\eta_1}(x)) \cdot \ldots \cdot (1 - F_{\eta_k}(x)),$$

де $F_{\eta_j}(x)$ – функція розподілу випадкової величини η_j. Відомо [8], що для всіх j випадкові величини η_j мають показниковий розподіл з параметром $-p_1$, тому

$$F_\eta(x) = 1 - (e^{p_1 x})(e^{p_1 x}) \ldots (e^{p_1 x}) = 1 - e^{kp_1 x}.$$

Отже, випадкова величина η_j має показниковий розподіл з параметром $-kp_1$. Лема доведена. □

Лема 2. *Розглядаємо випадкову величину* $\zeta(t)$ *– момент першого перетворення після моменту часу* t. *Нехай* $0 \leqslant t \leqslant v$. *Позначимо* $u = v - t$. *Тоді функція розподілу випадкової величини* $\zeta(t)$ $G_t(u)$ $(u \geqslant 0)$ *визначається з рівності*

$$1 - G_t(u) = F(t, e^{p_1 u}) - F(t, 0).$$

Доведення. Нехай $\zeta(t)$ – момент першого перетворення процесу після моменту часу t. Тоді

$$1 - G_t(u) = P\{\zeta(t) \geqslant u\} = \sum_{k=1}^{\infty}\{\zeta(t) \geqslant u|\mu(t) = k\}P\{\mu(t) = k\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{kp_1 u} P\{\mu(t) = k\} = \sum_{k=1}^{\infty}(e^{p_1 u})^k P\{\mu(t) = k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(e^{p_1 u})^k P\{\mu(t) = k\} - P\{\mu(t) = 0\} = F(t, e^{p_1 u}) - F(t, 0).$$

Лема доведена. □

Лема 3. *Твірна функція* $\Phi(t, \tau, s, \zeta(t) > \tau)$ *дорівнює*

$$\Phi(t, \tau, s, \zeta(t) > \tau) = (F(t, s) - F(t, 0))(F(t, e^{p_1 \tau}) - F(t, 0)).$$

Доведення.

$$\Phi(t, \tau, s|\zeta(t) > \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\mu(t, t + \tau) = k\}s^k = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\mu(t) = k\}s^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{\mu(t) = k\}s^k - P\{\mu(t) = 0\} = F(t; s) - F(t, 0).$$

Відповідно,

$$\begin{aligned}\Phi(t, \tau, s, \zeta(t) > \tau) &= \Phi(t, \tau, s|\zeta(t) > \tau)P\{\zeta(t) > \tau\} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{\mu(t, t + \tau) = k\}s^k P\{\zeta(t) > \tau\} = \\ &= (F(t, s) - F(t, 0))(F(t, e^{p_1 \tau}) - F(t, 0)).\end{aligned}$$

Лема доведена. □

Теорема 2. *Для твірної функції* $\Phi(t, \tau, s)$ *правильне інтегральне рівняння*

$$\begin{aligned}\Phi(t, \tau, s) = \int_0^{\tau} h(\Phi(t - u; \tau; s))dG_t(u) + \\ +(F(t, s) - F(t, 0))(F(t, e^{p_1 \tau}) - F(t, 0)),\end{aligned}$$

де $h(s)$ *– твірна функцій щільностей умовних перехідних ймовірностей за умови, що перетворення відбулось*

$$h(s) = \frac{f(s) - p_1 s}{-p_1}.$$

Доведення. Розглядаємо твірну функцію $\Phi(t, \tau, s)$. Зафіксуємо t. Нехай $\zeta(t)$ – момент першого після t перетворення. Можливі два випадки $\zeta(t) > \tau$ або $\zeta(t) \leqslant \tau$.

Розглядаємо спочатку простіший випадок $\zeta(t) > \tau$. Це означає таке: до моменту τ включно перетворення не відбулось, що еквівалентно тому, що кількість частинок в момент часу t, які в момент часу $t + \tau$ мають непорожню множину нащадків (практично, це ті самі частинки) дорівнює кількості частинок в момент часу t, тобто

$$\{\mu(t, t + \tau) = k | \mu(t) = k, \zeta(t) > \tau\}.$$

З леми 3 отримаємо, що

$$\Phi(t, \tau, s, \zeta(t) > \tau) = (F(t, s) - F(t, 0))(F(t, e^{p_1 \tau}) - F(t, 0)).$$

Отже, твірна функція $\Phi(t, \tau, s)$ у цьому випадку набуває вигляду

$$\Phi(t, \tau, s, \zeta(t) \geqslant \tau) = (F(t; s) - F(t, 0))(F(t, e^{p_1 \tau}) - F(t, 0)).$$

Переходимо до другого випадку.

Нехай перше перетворення процесу відбулось на проміжку часу $(t + u; t + u + \triangle u]$. Припустимо, що в момент часу t кількість частинок дорівнює k. Враховуючи означення редукованого процесу, $\mu(t; t + \tau)$ позначає кількість частинок у момент часу t, які на момент часу $t + \tau$ мають непорожнє потомство (або самі ще живуть). Це означає, що $\forall\ v \in (t; t + u]\ \mu(t; t + \tau) = \mu(v; t + \tau)$.

Далі, кількість частинок у момент часу t, які в момент часу $t + \tau$ мають ненульове потомство, дорівнює кількості частинок у момент перетворення і які в момент часу $t + u$ мають ненульове потомство.

Враховуючи [8], ми отримуємо, що

$$\Phi(t, \tau, s, \zeta(t) < \tau) = \int_0^\tau [h(\Phi(t, \tau - u, s)] dG_t(u),$$

тут

$$h(s) = \frac{f(s) - p_1 s}{-p_1}.$$

Отже,

$$\Phi(t, \tau, s) = \int_0^\tau [h(\Phi(t, \tau - u, s)] dG_t(u) + (F(t, s) - F(t, 0))(F(t, e^{p_1 \tau}) - F(t, 0)).$$

Теорема доведена. □

Список використаної літератури

1. *Ватутин В.А.* Ветвящиеся процессы и их применение / *В.А. Ватутин.* – М: МИАН, 2008. – Вып. 8.
2. *Ватутин В.А.* О расстоянии до ближайшего общего предка в ветвящихся процессах Беллмана-Харриса / *В.А. Ватутин* // Мат. заметки. – 1979. – Т. 25, №5. – С. 733–741.
3. *Ватутин В.А.* Редуцированные ветвящиеся процессы в случайной среде: критический случай / *В.А. Ватутин* // Теор. вероятн. и её примен. – Т. 47, №1. – С. 21–38.

4. *Ватутин В.А.* Предельные теоремы для редуцированных ветвящихся процессов в случайной среде / *В.А. Ватутин, Е.Е. Дьяконова* // Теор. вероятн. и её примен. – 2007. – Т. 52, №2. – С. 271–300.
5. *Ватутин В.А.* Волны в редуцированных ветвящихся процессах в случайной среде / *В.А. Ватутин, Е.Е. Дьяконова* // Теор. вероятн. и её примен. – 2008. – Т. 53, №4. – С. 665–683.
6. *Зубков А.М.* Предельные распределения расстояния до ближайшего общего предка / *А.М. Зубков* // Теория вероятностей и ее применения. – 1975. – Т. 20, №3. – С. 614–623.
7. *Сагитов С.М.* Общие предки в критических ветвящихся процессах Беллмана-Харриса с несколькими типами частиц / *С.М. Сагитов* // Изв. АН Каз ССР Сер. физ-мат. н. – 1982. – №3. – С. 66–69.
8. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы / *Б.А. Севастьянов.* – М.: Наука, 1971.
9. *Якымив А.Л.* Докритические и надкритические редуцированные ветвящиеся процессы / *А.Л. Якымив.* – М., 1980.
10. *Якымив А.Л.* Редуцирование ветвящиеся процессы / *А.Л. Якымив* // Теория вероятностей и ее применения. – 1980. – Т. 25, №3. – С. 593–596.
11. *Borovkov K.A.* Reduced critical branching processes in random environment / *K.A. Borovkov, V.A. Vatutin* // Stoch. Proc. and their Appl. – 1997. – Vol. 71, №2. – P. 225—240.
12. *Fleischmann K.* The structure of reduced critical Galton-Watson processes / *K. Fleischmann, R. Siegmund-Schultze* // Math. Nachr. – 1977. – Vol. 79. – P. 233–241.
13. *Lager A.* Reduces branching processes with very heavy tails / *A. Lager, S. Sagitov* // arhiv:0710.2750 v1[math. PR], 15.10.2007.
14. *Rahimov I.* Limit distribution for generalized reduced branching processes / *I. Rahimov* // PDF version.

Стаття: надійшла до редакції 16.10.2013
прийнята до друку 11.12.2013

INTEGRAL EQUATION FOR PROCESSES WITH CONTINUOUS TIME

Iryna BAZYLEVYCH

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: i_bazylevych@yahoo.com

The asymptotics of the generating function as $\tau \downarrow 0$ and $t \downarrow 0$, and the integral equation for reduced branching processes with continuous time are constructed.

Key words: branching process, reduced branching processes, generating function, integral equation, distribution function, asymptotics, random variable.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ РЕДУЦИРУИМЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Ирина БАЗИЛЕВИЧ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: i_bazylevych@yahoo.com

Найдено асимптотику производящей функции при $\tau \downarrow 0$, $t \downarrow 0$ и интегральное уравнение для редуцируимого ветвящегося процесса с непрерывным временем.

Ключевые слова: ветвящийся процесс, редуцируимый ветвящийся процесс, производящая функция, интегральное уравнение, функция распределения, асимптотическое представление, случайная величина.