ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2022. Випуск 94. С. 5–23
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2022. Issue 94. P. 5–23
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.94.005-023

УДК 517.53, 517.55

ТЕОРІЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО ІНДЕКСУ: ІДЕЇ М. М. ШЕРЕМЕТИ ТА ЇХНІЙ ПОДАЛЬШИЙ РОЗВИТОК У БАГАТОВИМІРНОМУ ВИПАДКУ

Присвячується 80-річчю від дня народження
професора Мирослава Миколайовича Шеремети

Андрій БАНДУРА[1], **Олег СКАСКІВ**[2]

[1] *Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, вул. Карпатська 11, м. Івано-Франківськ, 76019*
e-mail: andriykopanytsia@gmail.com
[2] *Львівський національний університет ім. І. Франка, вул. Університетська 1, м. Львів, 79000*
e-mail: olskask@gmail.com

В оглядовій статті викладаємо основні результатів М. М. Шеремети в теорії аналітичних функцій обмеженого індексу, які зумовили найбільший вплив на розвиток багатовимірних узагальнень поняття обмеженого індексу для різних класів аналітичних функцій. Головний внесок — це введення додатної неперервної функції l в означення обмеженого індексу, що дало змогу вивчати цілі функції з обмеженою кратністю нулів. Також М. М. Шеремета запропонував необтяжливі умови на цю функцію l, завдяки яким вдалося побудувати гнучку теорію, в рамках якої отримано аналоги більшої частини тверджень, що раніше були визначені Ґ. Фріке, С. Шахом, В. Хейманом, Р. Роєм та іншими для цілих функцій від однієї змінної обмеженого індексу. Еквівалентна форма запису цих умов, знайдена вперше М. М. Шереметою, допускає легке перенесення на багатовимірний випадок, при чому як для усього n-вимірного комплексного простору, так і для одиничної кулі чи полікруга. Окремо виділено низку тверджень М. М. Шеремети про властивості функцій з цих класів, де відповідні умови допускають певні формальні покращення порівняно з результатами М. М. Шеремети, але питання побудови змістовних прикладів на точність для цих покращень досі залишається відкритим.

2020 Mathematics Subject Classification: 30D15, 30D20, 32A10, 32A15, 32A17, 30J10

Ключові слова: ціла функція, аналітична функція, обмежений індекс, обмежений l-індекс, аналітична функція від декількох змінних.

Поняття цілої функції обмеженого індексу виникло у дисертації Дж. Макдонела [76], яку захистив за наукового керівництва Б. Лепсона (Catholic University of America, Washington, USA, 1957). Б. Лепсон та Дж. Макдонел досліджували властивості цілих розв'язків лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків та ввели новий підклас цілих функцій обмеженого індексу. Цілу функцію f, для якої існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $p \in \mathbb{Z}_+$ та всіх $z \in \mathbb{C}$ виконується нерівність

$$\frac{|f^{(p)}(z)|}{p!} \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\},$$

називають цілою функцією обмеженого індексу.

Зрозуміло, що при фіксованому z в обох частинах наведеної вище нерівності маємо коефіцієнти розвинення в ряд Тейлора в околі точки z. Позаяк функція f — ціла, її ряд Тейлора є збіжним у всій комплексній площині, а тому $\frac{|f^{(p)}(z)|}{p!} \to 0$ при $p \to +\infty$. А це й означає, що вказана нерівність виконуватиметься для кожної цілої функції при фіксованому z та деякому $N = N(z)$, залежному від z. В означенні Б. Лепсона та Дж. Макдонела припускається, що існує $N < +\infty$, яке не залежить від z таке, що $N(z) \leqslant N$ рівномірно по усіх z.

Б. Лепсон та Дж. Макдонел розглянули лінійне однорідне диференційне рівняння нескінченного порядку і будували його розв'язок як ряд Тейлора-Діріхле

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)e^{-\lambda_n z},$$

де $\lambda_n \in \mathbb{R}_+$, $\lambda_n \uparrow +\infty$ та $P_n(z)$ — многочлен степеня μ_n за певних додаткових обмежень на μ_n та λ_n.

Також Дж. Макдонел запропонував розглядати ряди загальнішого вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)e^{-\lambda_n z}, \tag{1}$$

де $f_n(z)$ — цілі функції обмеженого індексу. У своїй дисертації [76] він сформулював таку гіпотезу:

Гіпотеза 1 (Дж. Макдонел, 1957)**.** *Голоморфні розв'язки лінійного однорідного диференційного рівняння нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами допускають зображення у вигляді* (1)*, якщо нулі відповідного характеристичного рівняння мають необмежену кратність.*

Стаття написана за матеріалами доповіді, яку виголосив А. Бандура 30 червня 2023 року на урочистому засіданні Львівського математичного товариства, присвяченому 80-річчю від дня народження М. М. Шеремети.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2022. Випуск 94

Наразі цю гіпотезу не спростовано і не доведено.

Проте доволі швидко було з'ясовано, що клас цілих функцій обмеженого індексу доволі природно виникає в теорії розподілу значень та аналітичній теорії диференційних рівнянь.

Стартовою статтею для таких досліджень послугувала праця Б. Лепсона [75], в якій стисло викладено перші результати про ці функції. Естафету підхопили інші математики. Зокрема, С. М. Шах [90] довів, що кожний цілий розв'язок диференційного рівняння

$$f^{(n)}(t)+\sum_{j=0}^{n-1}a_jf^{(j)}(t)=0$$

є функцією обмеженого індексу, де $a_j\in\mathbb{C}$.

Ба більше, кожен цілий розв'язок диференціального рівняння

$$a_n(t)f^{(n)}(t)+\sum_{j=0}^{n-1}a_j(t)f^{(j)}(t)=0,$$

де $a_j(t)$ – многочлени, є функцією обмеженого індексу [91] у випадку, якщо $deg\,a_j\leqslant deg\,a_n$, $j\in\{1,\ldots,n-1\}$. Згодом цей результат С. М. Шаха було перенесено на випадок неоднорідного рівняння

$$f^{(n)}(t)+\sum_{j=0}^{n-1}a_jf^{(j)}(t)=g(t),$$

де $g(t)$ – ціла функція обмеженого індексу [66]. Довершеного вигляду цей результат набув у статті С. М. Шаха разом із Ґ. Х. Фріке [63], де вони розглянули рівняння

$$f^{(n)}(t)+\sum_{j=0}^{n-1}a_j(z)f^{(j)}(t)=g(t),$$

усі коефіцієнти $a_j(z)$ якого є цілими функціями обмеженого індексу, що задовольняють певні додаткові умови [63] на зростання.

Іншу цікаву властивість цілих функцій обмеженого індексу відкрив У. К. Хейман [69] у своїй єдиній, однак доволі ґрунтовній статті, присвяченій цілим функціям обмеженого індексу.

Вслід за У. К. Хейманом кажуть, що ціла функція $f(z)$ має обмежений розподіл значень, якщо існують сталі p, R такі, що рівняння $f(z)=w$ має не більше, ніж p коренів у кожному крузі радіуса R. У. К. Хейман довів, що кожна ціла функція має обмежений розподіл значень тоді й тільки тоді, якщо її похідна має обмежений індекс.

У зв'язку з цим варто також згадати такі властивості:

- якщо f_1, f_2 — цілі функції обмеженого індексу, то $f_1\cdot f_2$ також є цілою функцією обмеженого індексу (Ґ. Фріке, 1973 р. [65]);
- сума двох функцій обмеженого індексу може мати необмежений індекс (приклад В. Пуджа, 1969 р. [81]);
- існує ціла функція $f(z)$ обмеженого індексу така, що її похідна $f'(z)$ є функцією необмеженого індексу (С. Шах, 1971 р. [89]);

- існує ціла функція $f(z)$ обмеженого розподілу значень така, що $h(z) = e^z f(z)$ має необмежений розподіл значень (Ґ. Фріке, 1980 р. [64]). Саме, клас функцій обмеженого розподілу не замкнений стосовно операції множення.

С. Шах [90] довів, що кожна ціла функція обмеженого індексу N є функцією експоненційного типу не вищого за $N+1$, тобто, вона належить до класу цілих функцій, які мають швидкість зростання не вищу, ніж нормальний тип за порядку 1.

Цей результат спонукав багатьох математиків шукати різноманітні узагальнення поняття обмеженого індексу, які б дали змогу поширювати результати попередників на класи цілих функцій з довільним зростанням. Зокрема, різні підходи були запропоновані Т. В. Лакшмінарасімхан [74], Ґ. Франк [62], Ш. Стеліц [83], Р. Рой [82]. Однак вони не охоплювали повністю довільно швидке зростання цілих функцій.

Щоб вийти за межі класу цілих функцій експоненційного типу, А. Д. Кузик і М. М. Шеремета [73] запропонували поняття цілої функції обмеженого індексу відносно послідовності (l_n), де $(l_n(r))_{n=0}^{\infty}$ — послідовність додатних неперервних функцій на $[0;+\infty)$. В означенні цілої функції обмеженого індеку вони замінили дріб $\dfrac{|f^{(j)}(z)|}{j!}$ на $\dfrac{|f^{(j)}(z)|}{j! l_j(|z|)}$.

Ціла функція f називається функцією обмеженого індексу відносно послідовності (l_n), якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $p \in \mathbb{Z}_+$ та всіх $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{|f^{(p)}(z)|}{p! l_p(|z|)} \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k! l_k(|z|)} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\}.$$

Однак варто зазначити, що при підготовці тієї статті її автори зіткнулися з тим, що з довільною послідовністю (l_n) складно працювати, тому на пропозицію О. Скасківа за основне означення було взято окремий випадок $l_n(r) = (l(r))^n$, де l — додатна неперервна функція на $[0;+\infty)$, за r брали $|z|$. Так і з'явилося сучасне поняття цілої функції обмеженого l-індексу.

Це означення А. Д. Кузика та М. М. Шеремети виявилося напрочуд вдалим, бо дало змогу вивчати властивості доволі широкого класу цілих функцій до належно підібраної функції l.

Відомо, якщо a_k — нулі цілої функції f, p_k їхні кратності та $\overline{\lim}_{k\to+\infty} p_k = \pm\infty$, то f функція необмеженого l-індексу для кожної додатної неперервної на $[0,+\infty)$ функції l. Це випливає напряму з означення обмеженості l-індексу. Зважаючи на це, М.М. Шеремета у статті [93] сформулював таку природну проблему:

Проблема 1. *Нехай $p_k = O(1)$, $k \to \infty$. Чи існує додатна неперервна на $[0,+\infty)$ функція l, для якої ціла функція f є функцією обмеженого l-індексу?*

Відповідь на це питання виявилася ствердною. А саме, М. Т. Бордуляк ([57], див. також [55,56,99]) довела, що якщо ціла функція f має обмежену кратність нулів, то існує додатна неперервна функція l така, що функція f має обмежений l-індекс. Якщо ж кратність нулів функції зростає до нескінченності, то М. М. Шеремета зі співавторами [1,54] запропонував поняття обмеженого $l-M$-індексу, в якому модуль похідної у точці замінено на максимум модуля похідної на крузі.

Забігаючи наперед, зазначимо, що цей факт також справджується як для цілих функцій від декількох комплексних змінних [3], так і для аналітичних функцій в одиничній кулі [44]. Але в багатовимірному випадку під кратністю нульової точки z^0 цілої функції $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ розуміють таке ціле число $p_F(z^0)$, що для всіх $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}^n_+$, для яких $j_1 + j_2 + \ldots + j_n < p_F(z^0)$, справджується $F^{(J)}(z^0) = 0$, але принаймні для одного $J \in \mathbb{Z}^n_+$ такого, що $j_1 + j_2 + \ldots + j_n = p_F(z^0)$, виконується $F^{(J)}(z^0) \neq 0$. Іншими словами, всі частинні похідні порядку меншого за кратність дорівнюють нулю, але принаймні одна частинна похідна порядку, що дорівнює кратності, відмінна від нуля в цій точці.

М. М. Шеремета досить ґрунтовно розробив теорію цілих та аналітичних в обмеженій області функцій обмеженого l-індексу. Нижче перерахуємо основних його співавторів з цього напряму, упорядкованих за датою їхніх перших праць з цього напряму, а також зі зазначенням дисертацій з цього напряму, якщо такі були захищені:

(1) Кузик А. Д. (перша стаття [73] — 1986), кандидатська дисертація “Цілі функції обмеженого l-індексу” (Львів, 1992);
(2) Шукрі Абуарабі (перша стаття [1] — 1989), кандидатська дисертація “Цілі функції обмеженого $l - M$-індексу” (Львів, 1992);
(3) Строчик С. М. (перша стаття [9] — 1993), назва “Аналітичні в крузі функції обмеженого індексу”;
(4) Бордуляк М. Т. (перша стаття [5] — 1993), кандидатська дисертація “Обмеженість L-індексу цілих функцій багатьох комплексних змінних” (Львів, 1995);
(5) Кушнір В. О. (перша стаття [72] — 1999), кандидатська дисертація “Аналітичні функції обмеженого l-індексу” (Львів, 2002);
(6) Фединяк С. І. (перша стаття [77] — 1999), кандидатська дисертація “Асимптотичні властивості похідних ряду Діріхле” (Львів, 1999) містить окремий розділ про ряди Діріхле обмеженого $l - M$-індексу;
(7) Трухан Ю. С. (перша стаття [10] — 2002), кандидатська дисертація “Обмеженість l-індексу добутку Бляшке та добутку Нафталевича-Цудзі” (Львів, 2006);
(8) Зеліско М. М. (перша стаття [94] — 2003), кандидатська дисертація “Асимптотичні поводження максимуму модуля, максимального члена і середніх значень рядів Діріхле” (Львів, 2008) містить окремий розділ “Зростання максимуму модуля і максимального члена ряду Діріхле”, де, зокрема, встановлюється зв’язок між обмеженістю $l - M$-індексу та $l - \mu$-індексу ряду Діріхле;
(9) Шеремета З. М. (перша стаття [16] — 2003), назва “Обмеженість індексу цілого розв’язку одного диференціального рівняння”;
(10) Кулявець Л. В (перша стаття [71] — 2013), назва “Про обмеженість l-індексу цілих хребтових функцій”.

Згадані вище дослідження та ідеї з них доволі плідно розвивались у таких дослідженнях:

(1) Чижиков І. Е. (перша стаття [23] — 2003), докторська дисертація “Апроксимація субгармонійних функцій аналітичними та асимптотичні властивості

мероморфних в крузі функцій" (Львів, 2008) містить окремий розділ 4 "Оцінки логарифмічної похідної та їх застосування", де, зокрема, розглядається застосування цих оцінок до функцій обмеженого l-індексу;

(2) Бандура А. І. (перша стаття [2] — 2007), кандидатська дисертація "Цілі функції від декількох змінних обмеженого L-індексу за напрямом" (Львів, 2010), докторська дисертація "Властивості класів голоморфних функцій обмеженого індексу" (Львів, 2018);

(3) Петречко Н. В. (перша стаття [49] — 2016), кандидатська дисертація "Властивості функцій обмеженого індексу в одиничному бікрузі" (Львів, 2019);

(4) Цвігун В. С. (перша стаття [41] — 2017), назва "Аналітичні в $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$ функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних";

(5) Бакса В. П. (перша стаття [24] — 2019), дисертація доктора філософії "Властивості аналітичних вектор-функцій обмеженого L-індексу в двовимірній кулі" (Львів, 2021).

Також варто згадати про проф. А. А. Гольдберга, який спільно з М. М. Шереметою [67] довів, що для довільної додатної неперервної функції l такої, що $rl(r)\to+\infty$ існує ціла функція обмеженого l-індексу. Згодом вони написали ще дві статті про обмеженість l-індексу функції Міттаг-Леффлера [6] та канонічних добутків роду p (див. [68]).

М. М. Шеремета спільно з А. Д. Кузиком запропонував доволі необтяжливі умови на функцію l, завдяки виконанню яких вдалося побудувати гнучку теорію функцій обмеженого l-індексу. В одновимірному випадку ці умови можна подати у вигляді такої умови $l(r+O(1/l(r))=O(l(r))$ при $r\to+\infty$. Ці умови вперше появилися у статті [8]. До того ж при $l(r)\equiv l(|z|)$ М. М. Шереметою і В. О. Кушніром [72] вказано рівносильний їхній вигляд, який дав змогу їх нескладно узагальнювати на багатовимірний випадок:

$$0<\inf_{t_0\in\mathbb{C}}\left\{\min\left\{\frac{l(t)}{l(t_0)}:|t-t_0|\le\frac{r}{l(t_0)}\right\}\right\}\le$$
$$\le\sup_{t_0\in\mathbb{C}}\left\{\max\left\{\frac{l(t)}{l(t_0)}:|t-t_0|\le\frac{r}{l(t_0)}\right\}\right\}<\infty.$$

Клас додатних неперервних функцій l, що задовольняють зазначену умову, позначають через Q. Згадані повноцінні багатовимірні аналоги цієї умови вперше зустрічаються для обмеженого індексу за напрямком у [2], а за сукупністю змінних у [38]. Зазначимо, що достатньо вимагати виконання не для всіх r, а лише для одного. Ба більше, можна цей клас Q визначати лише умовою на супремум:

$$\exists r\in(0;\infty)\ \ 0<\lambda(r):=\sup_{z_1,z_2\in\mathbb{C}}\left\{\frac{l(z_1)}{l(z_2)}:|z_1-z_2|\le\frac{r}{\min\{l(z_1),l(z_2)\}}\right\}<\infty.$$

Цей остаточний варіант задання класу Q вперше появився у статтях [39,40] відразу для багатовимірного випадку під впливом обговорень з проф. С. Ю. Фаворовим. Зокрема, допоміжний клас $Q^n_{\mathbf{b}}$ для неперервних функцій $L:\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}_+$ визначається умовою, що для деякого $r>0$ справджується

$$0<\sup_{z\in\mathbb{C}}\sup_{t_1,t_2\in\mathbb{C}}\left\{\frac{L(z+t_1\mathbf{b})}{L(z+t_2\mathbf{b})}:|t_1-t_2|\le\frac{r}{\min\{L(z+t_1\mathbf{b}),L(z+t_2\mathbf{b})\}}\right\}<\infty,$$

а допоміжний клас Q^n для неперервних функцій $\mathbf{L} = (l_1, \dots, l_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ задається умовою, що для деякого $R = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n_+$ виконується

$$0 < \sup_{z,w\in\mathbb{C}^n} \left\{ \frac{l_j(z)}{l_j(w)} : |z_j - w_j| \leq \frac{r_j}{\min\{l_j(z), l_j(w)\}} \text{ для кожного } j \in \{1, 2, \dots, n\} \right\} < \infty,$$

або $\exists R_0 \in \mathbb{R}^n_+, \exists C, c \in \mathbb{R}^n_+ (\mathbf{0} < c \leq C),\ \forall z_0 \in \mathbb{C}^n\ \forall z \in \mathbb{D}^n[z_0, R_0/L(z_0)]$

$$c \leq \mathbf{L}(z)/\mathbf{L}(z_0) \leq C,$$

де $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbb{D}^n[z^0, R] := \{z \in \mathbb{C}^n :\ |z_j - z_j^0| \leqslant r_j,\ j \in \{1, \dots, n\}\}$, а запис $A < B$ для A, $B \in \mathbb{R}^n$ означає, що $a_j < b_j$ $(j \in \{1, \dots, n\})$.

Але це не все стосовно функції l. Ввівши додаткову умову на поводження функції l біля межі області, М. М. Шеремета зумів започаткувати змістовне дослідження аналітичних в довільній області з комплексної площини функцій обмеженого l-індексу. Хоча спроба ввести поняття обмеженого індексу для аналітичних в довільній області з $\mathbb{C}^n$ наявна ще у статті Ґ. Крішни та С. Шаха [70]. Втім насправді функції, що мають обмежений індекс у сенсі означення Ґ. Крішни та С. Шаха, є цілими навіть в інтерпретації для однієї змінної. Це випливає з необхідної умови обмеженості l-індексу для аналітичних у крузі радіуса R функцій [96, теорема 3.3, с. 71]: $\int\limits_0^r l(t)dt \to \infty$ при $r \to R$.

У найзагальнішому вигляді згадана умова М. М. Шеремети на поводження функції l біля межі області має такий вигляд:

$$l(z) > \frac{\beta}{\mathrm{dist}\{z, \partial G\}}, \quad \beta = \mathrm{const} > 1, z \in \mathbb{C},$$

де G — довільна область з комплексної площини. Вперше вона у такому вигляді появилася у статті [72], хоча для одиничного круга її можна знайти у ранішій статті [9], де вона захована у самий вигляд функції l. Саме, там розглядалася функція такого вигляду $l\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$. У багатовимірному випадку ця умова на поводження біля межі області аналітичності набула такого вигляду для різних класичних областей із $\mathbb{C}^n$:

- одиничної кулі та обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних [34]: $l_j(z) > \dfrac{\beta}{1 - |z|}$ для всіх $|z| < 1$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $z \in \mathbb{C}^n$, $\beta > \sqrt{n}$ — деяка стала;
- одиничної кулі та для обмеженого L-індексу за напрямом [45]: $L(z) > \dfrac{\beta}{1 - |z|}$ для всіх $|z| < 1$, $z \in \mathbb{C}^n$, $\beta > 1$ — деяка стала;
- одиничного полікруга та для обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних [49]: $l_j(z) > \dfrac{\beta}{1 - |z_j|}$ для всіх $|z_j| < 1$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $z \in \mathbb{C}^n$, $\beta > 1$ — деяка стала.

Загалом одновимірні дослідження за 80-90 роки М.М. Шеремети викладені у завершеному у певному сенсі вигляді у такій його монографії [96] M. Sheremeta, Analytic functions of bounded index, Mathematical Studies. Monograph Series, Vol. 6. VNTL Publishers, Lviv (1999).

Водночас зазначимо, що логічними багатовимірними продовженнями цієї книжки є дві монографії О. Скасківа разом з А. Бандурою. Перша [35] з них присвячена цілим функціям обмеженого L-індексу за напрямом, а друга [36] — аналітичним у кулі функціям обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Сюди ж можна долучити окремий розділ про цілі на зрізках функції обмеженого L-індексу за напрямком у колективній монографії [37]. Цей клас цілих на зрізках функцій доволі широкий. До нього належать неперервні за сукупністю змінних функції, що є цілими на зрізках $z+t\mathbf{b}$, як функції від комплексної змінної t при кожному $z \in \mathbb{C}^n$ та заданому напрямі $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. У випадку двох змінних сюди, зокрема, можна зачаслити функції, що є цілими за змінною z_1 (себто за напрямом $(1,0)$) при кожному фіксованому значенні змінної z_2 та неперервними за обома змінними.

В основі багатьох досліджень М. М. Шеремети з його співавторами (див., зокрема, [10, 23, 58, 68]) цілих функцій обмеженого l-індексу є логарифмічний критерій обмеженості l-індексу. Хоча це твердження у вигляді достатніх умов обмеженості індексу визначив ще Ґ. Фріке [65], зате як повноцінний цілісний критерій його опублікував саме М. М. Шереметою з А. Д. Кузиком [95]. Саме М. М. Шеремета разом зі співавторами на повну силу зумів показати можливості застосування цього критерію, як до диференційних рівнянь [14, 15, 86, 100], так і до нескінченних добутків, якими зручно зображати як цілі [23, 60, 61, 68, 97, 102], так і аналітичні в обмеженій області функції від однієї змінної [10–13, 84, 98]. Основний лейтмотив цих досліджень дифрівнянь — встановлення умов на коефіцієнти рівнянь, за яких кожен цілий чи аналітичний у деякій комплексній області розв'язок матиме обмежений l-індекс та відшуканням цієї функції l. Натомість для нескінченних добутків їхні дослідження стосувалися відшукання умов, за яких відповідний нескінченний добуток матиме обмежений l-індекс, а також розглядалися пов'язані з цим різноманітні підзадачі. Для довільного $r > 0$ та $l \in Q$ приймемо

$$n(r, z_0, 1/f) = \sum_{|a_k - z_0| < 1} 1$$

та

$$G_r(f) = \cup\{z : |z - a_k| < r/l(|a_k|)\},$$

де a_k — нулі функції f. Сформулюємо цей "логарифмічний" критерій.

Теорема 1 ([95]). *Нехай $l \in Q$. Ціла функція f має обмежений l-індекс тоді й тільки тоді, коли:*

1) *для будь-якого $r > 0$ існує $P = P(r) > 0$ така, що $|f'(z)/f(z)| < Pl(|z|)$ для кожного $z \in \mathbb{C} \setminus G_r(f)$;*
2) *для кожного $r > 0$ існує $n = n(r) \in \mathbb{Z}_+$ таке, що $n(r/l(|z_0|), z_0, 1/f) \le \tilde{n}$ для кожного $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Зважаючи на умову 2) логарифмічного критерію, М. М. Шеремета [103] досліджував умови однолистості функцій обмеженого l-індексу.

Зазначимо, що у багатовимірному випадку застосування логарифмічного критерію до канонічних добутків Веєрштрасса наштовхується на неподолані досі аналітичні труднощі, пов'язані з оцінкою модуля логарифмічної похідної за напрямом (чи за кожної змінною нарізно) зовні деякої виняткової множини, породженої нульовими точками початкової функції. Тому наразі відомі умови суто для цілих функцій з плоскими нулями з одним істотним обмеженням — усі гіперплощини нулів паралельні між собою [4, 50].

Виводячи аналог теореми 1 для цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямом, А. Бандура з О. Скасківим зуміли істотно послабити достатні умови. Ці знайдені ними достатні умови з [31, 32] виявилися новими навіть у випадку цілих функцій обмеженого індексу. Для їхнього формулювання наведемо кілька означень і позначень.

Ціла функція $F\colon\ \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ називається ([2]) *функцією обмеженого L-індексу за напрямом* $\mathbf{b}$, якщо існує $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ та всіх $z \in \mathbb{C}^n$ справджується нерівність

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^m F(z)|}{m!L^m(z)} \leqslant \max\Big\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{k!}\colon 0 \leqslant k \leqslant m_0\Big\}, \tag{2}$$

де $\partial_{\mathbf{b}}^0 F(z) = F(z), \partial_{\mathbf{b}} F(z) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j$, $\partial_{\mathbf{b}}^k F(z) = \partial_{\mathbf{b}}\Big(\partial_{\mathbf{b}}^{k-1} F(z)\Big)$, $k \geqslant 2$.

Позначимо

$$G_r = G_r^{\mathbf{b}}(F) := \bigcup_{z\colon\ F(z)=0} \{z + t\mathbf{b}\colon |t| < r/L(z)\}, \tag{3}$$

де a_k^0 — нулі функції $F(z^0 + t\mathbf{b})$ при заданому $z^0 \in \mathbb{C}^n$. Нехай

$$n_{z^0}(r) = n_{\mathbf{b}}\big(r, z^0, 1/F\big) := \sum_{|a_k^0| \leqslant r} 1$$

— лічильна функція нулів a_k^0 функції $F(z^0 + t\mathbf{b})$ у крузі $\{t \in \mathbb{C}\colon |t| \leqslant r\}$. Якщо при заданому $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та всіх $t \in \mathbb{C}$ маємо $F(z^0 + t\mathbf{b}) \equiv 0$, то вважаємо, що $n_{z^0}(r) = -1$.

Позначимо

$$n(r) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} n_z(r/L(z)).$$

Теорема 2 ([32]). *Нехай $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ — ціла функція, $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$. Тоді F є функцією обмеженого L-індексу за напрямом $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ тоді й тільки тоді, якщо обидві умови виконуються:*

1) *існують $r_1 > 0$, $P > 0$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{C}^n \setminus G_{r_1}(F)$ справджується нерівність*
$$\left|\frac{\partial_{\mathbf{b}} F(z)}{F(z)}\right| \leqslant PL(z);$$
2) *існує $r_2 \in (0, 1)$ таке, що $n(r_2) \in [0; \infty)$ та $2r_1 \cdot n(r_2) < r_2/\lambda(r_2)$, де r_1 вибране з попередньої умови.*

Зважаючи на формулювання теореми 2, виникає питання, чи існують приклади з її застосуванням, де довести виконання її умов для конкретних належно підібраних радіусів набагато легше, ніж для всіх радіусів, тобто для всіх додатних значень r_1 та r_2. Відповідь ствердна на це питання. Непрямо це показується у статті [33], де доведено, що для цілої парної функції $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ обмеженого індексу така композиція $f(\sqrt{z_1 z_2})$ є функцією необмеженого індексу за кожним напрямом $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Ця необмеженість індексу обґрунтовується для певних радіусів, хоча автори спершу написали доведення для всіх додатних значень r_1 та r_2, яке містить громіздкі обчислення і займає 6 сторінок у стильовику журналу "Математичні Студії", натомість скорочена версія доведень для певних радіусів займає 4 сторінки. До того ж у ній немає громіздких перетворень з довільними радіусами.

Варто визнати, що А. Бандурі спільно з О. Скасківим та іншими співавторами вдалося отримати певні аналоги логарифмічного критерію у вигляді достатніх умов [38, 53] для цілих функцій обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних.

Повертаючись до введеної М. М. Шереметою функції l, зазначимо, що він зумів зі своїми співавторами [73] знайти верхні оцінки зростання цілих функцій обмеженого l-індексу, використовуючи два різні підходи, розроблені У. Хейманом [69] та Шахом [92] для цілих функцій обмеженого індексу. Через появу допоміжної функції l М. М. Шеремета безперечно мав накладати певні умови на неї для отримання змістовних результатів. Ці умови допускають певні покращення, що А. Бандурою та О. Скасківим зроблено, але вони насправді суто формальні. Тобто, доволі часто після досліджень М. М. Шеремети в теорії обмеженого індексу, навіть якщо можна й помітити якісь загальніші чи покращені умови, то побудувати приклади на точність отримуваних оцінок за такої загальності умов набагато складніше. Принаймні в загальному вигляді вони нам невідомі і це досі є відкритою проблемою. З цієї точки зору умови М. М. Шеремети у певному сенсі є завершеними та непокращуваними. Обґрунтуємо це докладніше.

Наприклад, з результатів, отриманих у [51] про зростання цілих функцій обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних, випливає такий одновимірний наслідок (у тій статті — це наслідок 4.8). Позначимо $u(r,\theta)=l(re^{i\theta})$.

Наслідок 1 ([51])**.** *Нехай $l(re^{i\theta})$ — додатна неперервно диференційовна функція за змінною $r\in[0,+\infty)$ для кожного $\theta\in[0,2\pi]$. Якщо ціла функція f має обмежений l-індекс $N=N(f,l)$ та існує $C>0$ така, що $\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\max\limits_{\theta\in[0,2\pi]}\dfrac{(-u'_r(r,\theta))^+}{l^2(re^{i\theta})}=C$, то*

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\max\{|f(z)|\colon |z|=r\}}{\max\limits_{\theta\in[0,2\pi]}\int_0^r l\left(\tau e^{i\theta}\right)d\tau}\leqslant (C+1)N+1.$$

Сформульований результат точніший, ніж результат Шеремети, отриманий у випадку $n=1$, $C\neq 0$ та $l(|z|)$, адже відповідна теорема 4.4 з [96, с. 83] стверджує, що

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\max\{|f(z)|\colon |z|=r\}}{\int_0^r l(\tau)d\tau}\leqslant (C+1)(N+1).$$

Очевидно, що $NC+N+1<(C+1)(N+1)$ для $C\neq 0$ та $N\neq 0$. Однак залишається відкритим питання побудови цілої функції f та додатної неперервної функції l з такими властивостями:

(1) f має обмежений l-індекс;
(2) для усіх додатних неперервних функцій $l_1(z)$ таких, що $l_1(z)<l(z)$ та $\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\dfrac{l_1(re^{i\theta})}{l(re^{i\theta})}=0$, функція f має необмежений l_1-індекс;
(3) $\varlimsup\limits_{r\to+\infty}\max\limits_{\theta\in[0,2\pi]}\dfrac{(-u'_r(r,\theta))^+}{l^2(re^{i\theta})}=C\neq 0$;

(4) $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \dfrac{\ln\max\{|f(z)\colon |z|=r\}}{\max\limits_{\theta\in[0,2\pi]}\int_0^r l\left(\tau e^{i\theta}\right)d\tau} \leqslant (C+1)N+1;$

(5) $rl(re^{i\theta}) \to +\infty$ при $r\to\infty$ та кожному $\theta\in[0;2\pi]$.

Відповідний приклад засвідчив би змістовність уточнення зазначеного результату Шеремети.

Оцінки зростання цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямом [52] також отримані за загальніших умов на функцію l. Сформулюємо їх для одновимірного випадку як наслідок.

Наслідок 2. *Нехай $l:\mathbb{C}\to\mathbb{R}_+$ — неперервна функція та*

$$\min_{\theta\in[0,2\pi]}\varliminf_{r\to+\infty}\frac{1}{l(re^{i\theta})}\min\left\{l(te^{i\theta})\colon \frac{r}{1+\delta}\leqslant t\leqslant r\right\}=\varphi(\delta)\to\varphi_0\in(0,1] \text{ при } \delta\to+0. \tag{4}$$

Якщо ціла трансцендентна функція $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ має обмежений l-індекс $N(f,l)$, то

$$\max_{\theta\in[0,2\pi]}\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\max\{|f(z)|:\ |z|=r\}}{\int_0^r l(te^{i\theta})dt}\leqslant\frac{N(f,l)+1}{\varphi_0^2}. \tag{5}$$

М. М. Шеремета разом з А. Д. Кузиком у [73] отримали оцінку (5) лише при $\varphi_0=1$ та встановили її точність. Питання побудови такої додатної неперервної функції l та цілої функції l, для яких виконуються умови цього наслідку та $\varphi_0\in(0;1)$, залишається відкритим, хоча вперше було сформульовано ще у [52] А. Бандурою та О. Скасківим. Іншими словами, тут також маємо певне покращення оцінки Шеремети, але, на превеликий жаль, ми не зуміли побудувати змістовний приклад на точність цієї оцінки.

Окремо варто перерахувати різні типи диференційних рівнянь, які досліджували М. М. Шеремета та його учні в рамках теорії функцій обмеженого індексу:

- рівняння Вебера $w''-(\frac{z^2}{4}-\nu-\frac{1}{2})w=0$ [15, 85];
- рівняння Гауса $z(z-1)w''+((\alpha+\beta+1)z-\gamma)w'+\alpha\beta w=0$ [100];
- рівняння Шаха (диференційне рівняння другого порядку з квадратичними багаточленами як коефіцієнтами) $z^2w''+(\beta_0z^2+\beta_1z)w'+(\gamma_0z^2+\gamma_1z+\gamma_2)w=0$. [7, 16–19, 101, 107];
- рівняння Лежандра $(1-z^2)w''-2zw'+\lambda w=0$ [86];
- рівняння Шеремети-Трухана $z(z-1)w''+\beta_1zw'+\gamma_2w=0$ [87];
- рівняння виродженої гіпергеометричної функції $z^2w''+(\gamma-z)w'-\alpha w=0$ [14, 21].

Для цих рівнянь знайдено умови на параметри, за яких їхні цілі чи аналітичні в крузі розв'язки мають обмежений l-індекс, є опуклими, близькими до опуклих чи зірковими, а також вказано конкретний вигляд функції l. Дослідження у цих статтях здебільшого проводиться через зображення розв'язків степеневими рядами, які також слугували окремим об'єктом досліджень для М. М. Шеремети [22]. Він, зокрема, знайшов умови на коефіцієнти степеневого ряду, за яких матиме обмежений l-індекс. Частково ці результати містяться у ще одній монографії М. М. Шеремети [108].

Насамкінець розглянемо прямий внесок М. М. Шеремети у багатовимірну теорію обмеженого індексу. Тут варто виділити дві складові багатовимірності — функції від n змінних і n-вимірні криві від однієї змінної.

Як ми вже згадували, поняття аналітичної в області функції обмеженого індексу від декількох змінних запропоноване Гопалою Крішною та С. Шахом у [70]. Для цілих функцій від двох змінних М. Салмассі [88] також ввів поняття обмеженого індексу та довів три критерії обмеженості індексу. Поняття цілої функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних було введено М. М. Шереметою та М. Т. Бордуляк у [5]. Усі ці автори замість звичайних похідних в означенні розглядали усі можливі частинні похідні. Згадані математики отримували властивості функцій від декількох змінних обмеженого індексу з властивостей цілих функцій однієї змінної, розглядаючи цілу функцію $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ як цілу функцію за кожною змінною нарізно. Порівняно недавно також з'явилися праці Ф. Нурая та Р. Патерсона на цю саму тематику [78–80]

Зупинимося детальніше на означенні запропонованому М. М. Шереметою та М. Т. Бордуляк. Вони розглядали лише випадок вектор-функцій $\mathbf{L}$ таких, що

$$\mathbf{L} = (l_1(z_1), l_2(z_2), \ldots, l_n(z_n)),$$

та $l_j(z_j)$ — додатні неперервні функції, $j \in \{1, \ldots, n\}$, тобто, кожна компонента вектор-функції $\mathbf{L}$ є функцією від однієї змінної.

До того ж цілі функції з цього класу мають властивість [5]:

$$\ln \max\{|F(z)| : |z_j| = r_j, j \in \{1, \ldots, n\}\} = O\Big(\sum_{j=1}^{n} l_j(r_j)\Big)$$

при $r_1 + \ldots + r_n \to +\infty$. А це свідчить про те, що функція обмеженого $\mathbf{L}$-індексу у сенсі означення Бордуляк-Шеремети поводиться подібно до функції з відокремленими змінними. Натомість у [38] було вперше досліджено цілі функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних при $\mathbf{L} = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, де $l_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервна фунція, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Подальші дослідження підтвердили правильність обраного підходу, адже було доведено [44], що для кожної цілої функції від декількох змінних з обмеженою кратністю нульових точок знайдеться функція $\mathbf{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$, для якої початкова ціла функція матиме обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних.

Ще один аспект багатовимірності пов'язаний з аналітичними кривими. Саме поняття обмеженого l-індексу для них введено у статтях [20, 59], де також доведено для них аналог теореми Хеймана та продемонстровано її застосування до систем диференційних рівнянь. Невдовзі, використовуючи ідею М. Шеремети про норми для таких кривих, у працях А. Бандури, О. Скасківа та В. Бакси [24–27] побудовано теорію обмеженого $\mathbf{L}$-індексу для аналітичних векторнозначних функцій, що діють з двовимірної кулі у двовимірний комплексний простір.

Насамкінець зазначимо, що М. М. Шеремета [54, 96, 106] також у рамках теорії функцій обмеженого індексу першим почав вивчати умови, за яких композиція аналітичних функцій матиме обмежений індекс. Ця естафета дослідження композицій у багатовимірному випадку від нього підхоплена у статтях [28, 30, 43].

Список використаної літератури

1. Ш. Абуарабі, М. Шеремета, *Цілі функції обмеженого $l-M$-індексу,* Доповіді АН УРСР **11** (1989), 3–5.
2. А. І. Бандура, О. Б. Скасків, *Цілі функції обмеженого L-індексу за напрямком,* Мат. Студ. **27** (2007), no. 1, 30–52.
3. А. Бандура, О. Скасків, *Метричний простір Іера, теорема існування та цілі функції обмеженого* **L***-індексу за сукупністю змінних*, Буковин. матем. журн. **5** (2017), no. 3-4, 8–14.
4. А. Бандура, *Достатні умови обмеженості L-індексу за напрямом для цілих функцій з "плоскими" нулями роду p*, Мат. вісник НТШ **6** (2009), 44–49.
5. М. Т. Бордуляк, М. М. Шеремета, *Обмеженість* **L***-індексу цілої функції багатьох змінних*, Допов. Акад. Наук Укр. **9** (1993), 10–13.
6. А. А. Гольдберг, *Оцінка модуля логарифмічної похідної функції Міттаг-Лефлера та її застосування*, Мат. Студ. **5** (1996), 21–30.
7. М. Заболоцький, М. Шеремета, *Про обмеженість індексу цілого розв'язку одного диференціального рівняння*, Мат. методи фіз.-мех. поля **47** (2004), no. 2, 181–185.
8. А. Д. Кузик, М. М. Шеремета, *Цілі функції обмеженого l-індексу*, Допов. АН УРСР **6** (1988), 15–17.
9. С. М. Строчик, М. М. Шеремета, *Аналітичні в крузі функції обмеженого l-індексу*, Доповіді НАН України **1** (1993), 19–22.
10. Ю. С. Трухан, М. Шеремета, *Обмеженість l-індексу добутку Бляшке*, Мат. Студ. **17** (2002), no. 2, 127–137.
11. Ю. С. Трухан, *До обмеженості l-індексу добутку Бляшке*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **63** (2004), 143–147.
12. Ю. С. Трухан, *Збереження обмеженості l-індексу добутку Бляшке при зсувах нулів*, Мат. Студ. **25** (2006), no. 1, 29–37.
13. Ю. С. Трухан, М. М. Шеремета, *Про обмеженість l-індексу канонічного добутку нульового роду та добутку Бляшке*, Мат. Студ. **29** (2008), no. 1, 45–51.
14. Ю. Трухан, М. Шеремета, *Про обмеженість l-індексу виродженої гіпергеометричної функції*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **80** (2015), 161–165.
15. Ю. Трухан, М. Шеремета, *Властивості розв'язків рівняння Вебера,* Буковин. мат. журн. **2** (2014), no. 2-3, 223–230.
16. З. М. Шеремета, *Обмеженість індексу цілого розв'язку одного диференціального рівняння,* Мат. Студ. **19** (2003), no. 2, 208–212.
17. З. М. Шеремета, *Про обмеженість l-індексу цілого розв'язку одного диференціального рівняння*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **63** (2004), 148–151.
18. З. М. Шеремета, *Властивості похідних цілого розв'язку одного диференціального рівняння,* Мат. методи фіз.-мех. поля **49** (2006), no. 2, 80–85.
19. З. М. Шеремета, М. М. Шеремета, *Про обмеженість l-індексу цілих розв'язків одного диференціального рівняння*, Допов. Нац. Акад. Наук Укр. **2** (2007), 31–36.
20. М. Шеремета, *Обмеженість $l-M$-індексу аналітичних кривих,* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **75** (2011), 226–231.
21. М. Шеремета, *Властивості гіпергеометричної функції з невід'ємними коефіцієнтами,* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **70** (2009), 183–190.
22. З. Шеремета, М. Шеремета, *Обмеженість l-індексу аналітичних функцій, зображених степеневими рядами,* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **66** (2006), 208–213.
23. І. Чижиков, М. Шеремета, *Про обмеженість l-індексу цілих функцій нульового роду*, Доповіді НАН України **7** (2003), 33–39.

24. V. P. Baksa, A. I. Bandura, and O. B. Skaskiv, *Analogs of Fricke's theorems for analytic vector-valued functions in the unit ball having bounded* $\mathbf{L}$*-index in joint variables,* Proceedings of IAMM of NAS of Ukraine **33** (2019), 16–26. DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-1
25. V. P. Baksa, A. I. Bandura, and O. B. Skaskiv, *On existence of main polynomial for analytic vector-valued functions of bounded* $\mathbf{L}$*-index in the unit ball*, Буковин. мат. журн. **7** (2019), no. 2, 6–13. DOI: 10.31861/bmj2019.02.006
26. V. Baksa, A. Bandura, and O. Skaskiv, *Growth estimates for analytic vector-valued functions in the unit ball having bounded* $\mathbf{L}$*-index in joint variables,* Constr. Math. Anal. **3** (2020), no. 1, 9–19. DOI: 10.33205/cma.650977
27. V. P. Baksa, A. I. Bandura, and O. B. Skaskiv, *Analogs of Hayman's Theorem and of logarithmic criterion for analytic vector-valued functions in the unit ball having bounded* $\mathbf{L}$*-index in joint variables,* Math. Slovaca **70** (2020), no. 5, 1141–1152. DOI: 10.1515/ms-2017-0420
28. V. P. Baksa, A. I. Bandura, T. M. Salo, and O. B. Skaskiv, *Note on boundedness of the L-index in the direction of the composition of slice entire functions,* Mat. Stud. **58** (2022), no. 1, 58–68. DOI: 10.30970/ms.58.1.58-68
29. A. I. Bandura and V. P. Baksa, *Entire multivariate vector-valued functions of bounded* $\mathbf{L}$*-index: analog of Fricke's theorem*, Mat. Stud. **54** (2020), no. 1, 56-63. DOI: 10.30970/ms.54.1.56-63
30. A. I. Bandura, O. B. Skaskiv, and I. R. Tymkiv, *Composition of entire and analytic functions in the unit ball*, Carpathian Math. Publ. **14** (2022), no. 1, 95–104. DOI: 10.15330/cmp.14.1.95-104
31. А. І. Бандура, О. Б. Скасків. *Логарифмічна похідна за напрямком та розподіл нулів цілої функції обмеженого L-індексу за напрямком*, Укр. мат. журн. **69** (2017), no. 3, 426–432; **English version**: A. I. Bandura and O. B. Skaskiv, *Directional logarithmic derivative and the distribution of zeros of an entire function of bounded L-index along the direction*, Ukr. Math. J. **69** (2017), no. 3, 500–508. DOI: 10.1007/s11253-017-1377-8
32. A. I. Bandura, *Some improvements of criteria of L-index boundedness in direction*, Mat. Stud. **47** (2017), no. 1, 27–32. DOI: 10.15330/ms.47.1.27-32
33. A. Bandura and O. Skaskiv, *Entire bivariate functions of unbounded index in each direction*, Нелінійні коливання **21** (2018), no. 4, 435–443; **reprinted version**: A. Bandura and O. Skaskiv, *Entire bivariate functions of unbounded index in each direction*, J. Math. Sci. **246** (2020), no. 3, 293–302. DOI: 10.1007/s10958-020-04739-8
34. A. Bandura and O. Skaskiv, *Functions analytic in a unit ball of bounded* $\mathbf{L}$*-index in joint variables*, Укр. мат. вісн. **14** (2017), no. 1, 1–15; **reprinted version**: A. Bandura and O. Skaskiv, *Functions analytic in a unit ball of bounded* $\mathbf{L}$*-index in joint variables*, J. Math. Sci. **227** (2017), no. 1, 1–12. DOI: 10.1007/s10958-017-3570-6
35. A. Bandura and O. Skaskiv, *Entire functions of several variables of bounded index*, Publisher I. E. Chyzhykov, Chyslo, Lviv, 2016.
36. A. Bandura and O. Skaskiv, *Analytic functions in the unit ball: bounded* $\mathbf{L}$*-index in joint variables and solutions of systems of PDE's*, Lambert Academic Publishing, Beau Bassin, 2017.
37. A. Bandura and O. Skaskiv, *Slice Holomorphic Functions in Several Variables with Bounded L-Index in Direction*, Mathematical Analysis and Applications II (ed. Hari Mohan Srivastava), MDPI, Basel, 2020, pp. 29–40. DOI: 10.3390/books978-3-03928-385-9
38. A. I. Bandura, M. T. Bordulyak, and O. B. Skaskiv, *Sufficient conditions of boundedness of* $\mathbf{L}$*-index in joint variables*, Mat. Stud. **45** (2016), no. 1, 12–26. DOI: 10.15330/ms.45.1.12-26

39. A. Bandura and O. Skaskiv, *Analog of Hayman's theorem and its application to some system of linear partial differential equations*, J. Math. Phys. Anal. Geom. **15** (2019), no. 2, 170–191. DOI: 10.15407/mag15.02.170
40. A. I. Bandura, *Some weaker sufficient conditions of L-index boundedness in direction for functions analytic in the unit ball,* Carpathian Math. Publ., **11** (2019), no. 1, 14–25. DOI: 10.15330/cmp.11.1.14-25
41. А. І. Бандура1, О. Б. Скасків, В. Л. Цвігун, *Аналітичні в* $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$ *функції обмеженого* L*-індексу за сукупністю змінних*, Мат. методи фіз.-мех. поля. **60** (2017), no. 3, 115–121; **English version**: A. I. Bandura, O. B. Skaskiv, and V. L. Tsvigun, *The functions of Bounded L-Index in the Collection of Variables Analytic in* $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$*,* J. Math. Sci. **246** (2020), no. 2, 256–263. DOI: 10.1007/s10958-020-04735-y
42. A. I. Bandura, *Entire functions of bounded index in frame*, Mat. Stud. **54** (2020), no. 2, 193–202. DOI: 10.30970/ms.54.2.193-202
43. A. Bandura, T. Salo, and O. Skaskiv, *L-Index in Joint Variables: Sum and Composition of an Entire Function with a Function With a Vanished Gradient,* Fractal Fract. **7** (2023), no. 8, Art. ID 593, pp. 13. DOI:10.3390/fractalfract7080593
44. A. Bandura and O. Skaskiv, *Analytic functions in the unit ball of bounded* **L***-index in joint variables and of bounded L-index in direction: a connection between these classes,* Demonstr. Math. **52** (2019), no. 1, 82–87. DOI: 10.1515/dema-2019-0008
45. A. Bandura and O. Skaskiv, *Functions analytic in the Unit ball having bounded L-index in a direction*, Rocky Mt. J. Math. **49** (2019), no. 4, 1063–1092. DOI: 10.1216/RMJ-2019-49-4-1063
46. A. Bandura and O. Skaskiv, *Slice holomorphic functions in several variables with bounded L-index in direction*, Axioms **8** (2019), no. 3, Art. ID 88, pp. 12. DOI: 10.3390/axioms8030088
47. A. Bandura, N. Petrechko, and O. Skaskiv, *Maximum modulus in a bidisc of analytic functions of bounded* **L***-index and an analogue of Hayman's theorem*, Math. Bohem. **143** (2018), no. 4, 339–354. DOI: 10.21136/MB.2017.0110-16
48. A. Bandura and O. Skaskiv, *Sufficient conditions of boundedness of* **L***-index and analog of Hayman's Theorem for analytic functions in a ball*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. **63** (2018), no. 4, 483–501. DOI: 10.24193/subbmath.2018.4.06
49. A. I. Bandura, N. V. Petrechko, and O. B. Skaskiv, *Analytic in a polydisc functions of bounded* **L***-index in joint variables*, Mat. Stud. **46** (2016), no. 1, 72–80. DOI: 10.15330/ms.46.1.72-80
50. A. I. Bandura and O. B. Skaskiv, *Boundedness of L-index in direction of functions of the form* $f(\langle z,m\rangle)$ *and existence theorems*, Mat. Stud. **41** (2014), no. 1, 45–52.
51. A. Bandura and O. Skaskiv, *Asymptotic estimates of entire functions of bounded* **L***-index in joint variables,* Novi Sad J. Math. **48** (2018), no. 1, 103–116. DOI: 10.30755/NSJOM.06997
52. A. I. Bandura and O. B. Skaskiv, *Growth of entire functions of bounded L-index in direction*, Мат. методи фіз.-мех. поля **60** (2017), no. 1, 22–31; **reprinted version**: A. I. Bandura and O. B. Skaskiv, *Growth of entire functions of bounded L-index in direction*, J. Math. Sci. **240** (2019), no. 1, 21–33. DOI: 10.1007/s10958-019-04333-7
53. A. Bandura and O. Skaskiv, *Entire functions of bounded* **L***-index: Its zeros and behavior of partial logarithmic derivatives,* J. Complex Anal. **2017** (2017), 1–10. Art. ID 3253095, pp. 10. DOI: 10.1155/2017/3253095
54. A. I. Bandura and M. M. Sheremeta, *Bounded* l*-index and* $l-M$*-index and compositions of analytic functions,* Mat. Stud. **48** (2017), no. 2, 180–188. DOI: 10.15330/ms.48.2.180-188

55. M. T. Bordulyak and M. M. Sheremeta, *A problem in the theory of entire functions of bounded index,* Mat. Stud. **15** (2001), no. 1, 105–107.
56. M. T. Bordulyak, M. M. Sheremeta, and Yu. S. Trukhan, *On zeros of derivatives of an entire function,* Mat. Stud. **25** (2006), no. 2, 141–148.
57. M. T. Bordulyak, *A proof of Sheremeta conjecture concerning entire function of bounded l-index*, Mat. Stud., **12** (1999), no. 1, 108–110.
58. М. Т. Бордуляк, М. М. Шеремета, *О существовании целых функций ограниченного l-индекса и l-регулярного роста,* Укр. матем. журн. **48**, (1996), no. 9, 1166–1182; **English version**: M. T. Bordulyak and M. M. Sheremeta, *On the existence of entire functions of bounded l-index and l-regular growth*, Ukr. Math. J. **48** (1996), no. 9, 1322–1340. DOI: 10.1007/BF02595355
59. M. T. Bordulyak and M. M. Sheremeta, *Boundedness of l-index of analytic curves*, Mat. Stud. **36** (2011), no. 2, 152–161.
60. M. T. Bordulyak, I. E. Chyzhykov, and M. M. Sheremeta, *Preservation of l-index boundedness under zero shifts,* Mat. Stud. **19** (2003), no. 1, 21–30.
61. I. E. Chyzhykov and M. M. Sheremeta, *Boundedness of l-index for entire functions of zero genus*, Mat. Stud. **16** (2001), no. 2, 124–130.
62. G. Frank, *Über den index einer ganzen funktion,* Arch. Math. **22** (1971), no. 1, 175–180. DOI: 10.1007/BF01222559
63. G. H. Fricke and S. M. Shah, *On bounded value distribution and bounded index,* Nonlinear Anal., Theory, Methods Appl. **2** (1978), no. 4, 423–435. DOI: 10.1016/0362-546X(78)90049-4
64. G. H. Fricke, *A note on bounded index and bounded value distribution,* Indian J. Pure Appl. Math. **11** (1980), no. 4, 428–432.
65. G. H. Fricke, *Functions of bounded index and their logarithmic derivatives*, Math. Ann. **206** (1973), 215–223. DOI: 10.1007/BF01429209
66. G. H. Fricke and S. M. Shah, *Entire functions satisfying a linear differential equation,* Indag. Math. **78** (1975), no. 1, 39–41. DOI: 10.1016/1385-7258(75)90012-8
67. А. А. Гольдберг, М. Н. Шеремета, *О существовании целой трансцендентной функции ограниченного l-индекса*, Матем. заметки, **57** (1995), no. 1, 126–129; **English version**: A. A. Goldberg and M. N. Sheremeta, *Existence of an entire transcendental function of bounded l-index*, Math. Notes, **57** (1995), no. 1, 88–90. DOI: 10.1007/BF02309399
68. A. A. Goldberg and M. M. Sheremeta, *On the boundedness l-index of canonical products,* Ukr. Math. Bull. **2** (2005), no. 1, 53–65.
69. W. K. Hayman, *Differential inequalities and local valency,* Pac. J. Math. **44** (1973), no. 1, 117–137. DOI: 10.2140/pjm.1973.44.117
70. G. J. Krishna and S. M. Shah, *Functions of bounded indices in one and several complex variables,* Mathematical Essays Dedicated to A. J. Macintyre, Ohio University Press, Athens, Ohio, 1970, pp. 223–235.
71. L. V. Kulyavec' and M. M. Sheremeta, *On the l-index boundedness of entire ridge functions,* Mat. Stud. **40** (2013), no. 2, 144–148.
72. V. O. Kushnir and M. M. Sheremeta, *Analytic functions of bounded l-index,* Mat. Stud. **12** (1999), no. 1, 59–66.
73. А. Д. Кузык, М. Н. Шеремета, *Целые функции ограниченного l-распределения значений,* Матем. заметки **39** (1986), no. 1, 3–13; **English version**: A. D. Kuzyk and M. N. Sheremeta, *Entire functions of bounded l-distribution of values*, Math. Notes **39** (1986), no. 1, 3–8. DOI: 10.1007/BF01647624
74. T. Lakshminarasimhan, *A note on entire functions of bounded index,* J. Indian Math. Soc., New Ser. **38** (1974), no. 1–4, 43–49.

75. B. Lepson, *Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index*, Entire Funct. and Relat. Parts of Anal., La Jolla, Calif. 1966, Proc. Symp. Pure Math. **11** (1968), 298–307.
76. J. J. Macdonnell, *Some convergence theorems for Dirichlet-type series whose coefficients are entire functions of bounded index*, Ph.D. thesis, Catholic Univ. of America, Washington, USA, 1957.
77. Ya. V. Mykytyuk, S. I. Fedynyak, and M. M. Sheremeta, *Dirichlet series of bounded $l-M$-index*, Mat. Stud. **11** (1999), no. 2, 159–166.
78. F. Nuray and R. F. Patterson, *Vector-valued bivariate entire functions of bounded index satisfying a system of differential equations*, Mat. Stud. **49** (2018), no. 1, 67–74. DOI: 10.15330/ms.49.1.67-74
79. F. Nuray and R. F. Patterson, *Multivalence of bivariate functions of bounded index,* Matematiche **70** (2015), no. 2, 225–233. DOI: 10.4418/2015.70.2.14
80. F. Nuray and R. F. Patterson, *Entire bivariate functions of exponential type,* Bull. Math. Sci. **5** (2015), no. 2, 171–177. DOI: 10.1007/s13373-015-0066-x
81. W. J. Pugh, *Sums of functions of bounded index,* Proc. Amer. Math. Soc. **22** (1969), 319–323. DOI: 10.1090/S0002-9939-1969-0243067-9
82. R. Roy and S. M. Shah, *Functions of bounded index, bounded value distribution and v-bounded index,* Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. **11** (1987), no. 12, 1383–1390. DOI: 10.1016/0362-546X(87)90090-3
83. Sh. Strelitz, *Asymptotic properties of entire transcendental solutions of algebraic differential equations*, Contemp. Math. **25** (1983), no. 4, 171-214. DOI: 10.1090/conm/025/730048
84. Yu. S. Trukhan and M. M. Sheremeta, *On l-index boundedness of the Blaschke product*, Mat. Stud. **19** (2003), no. 1, 106–112.
85. Yu. S. Trukhan, *On properties of the solutions of the Weber equation,* Carpathian Math. Publ. **7** (2015), no. 2, 247–253. DOI: 10.15330/cmp.7.2.247-253
86. Ю. Трухан, *Властивості розв'язків рівняння Лежандра,* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **83** (2017), 82–89.
87. Yu. S. Trukhan and M. M. Sheremeta, *Properties of analytic solutions of a differential equation,* Mat. Stud. **52** (2019), no. 2, 138–143. DOI: 10.30970/ms.52.2.138-143
88. M. Salmassi, *Functions of bounded indices in several variables,* Indian J. Math. **31** (1989), no. 3, 249–257.
89. S. M. Shah, *On entire functions of bounded index whose derivatives are of unbounded index,* J. Lond. Math. Soc., II. Ser. **4** (1971), no. 1, 127–139. DOI: 10.1112/jlms/s2-4.1.127
90. S. M. Shah, *Entire functions of bounded index,* Proc. Amer. Math. Soc. **19** (1968), no. 5, 1017–1022. DOI: 10.2307/2036016
91. S. M. Shah, *Entire functions satisfying a linear differential equation,* J. Math. Mech. **18** (1969), no. 2, 131–136.
92. S. M. Shah, *Entire function of bounded index,* Complex Anal., Proc. Conf., Lexington 1976, Lect. Notes Math. **599** (1977), pp. 117–145.
93. M. M. Sheremeta, *Five open problems in the theory of entire functions,* Mat. Stud. **6** (1996), 157–159.
94. M. M. Sheremeta, O. M. Sumyk, and M. M. Zelisko, *On the boundedness of $l-M$ and $l-\mu$-index of the Dirichlet series,* Mat. Stud. **20** (2003), no. 2, 143–150.
95. М. Н. Шеремета, А. Д. Кузык, *О логарифмической производной и нулях целой функции ограниченного l-индекса*, Сиб. матем. журн. **33** (1992), no. 2, 142–150; **English version**: M. N. Sheremeta and A. D. Kuzyk, *Logarithmic derivative and zeros of an entire function of bounded l-index,* Sib. Math. J. **33** (1992), no. 2, 304–312. DOI: 10.1007/BF00971102

96. M. Sheremeta, *Analytic functions of bounded index*, VNTL Publishers, Lviv, 1999.
97. М. М. Шеремета, *Уточнення однієї теореми Фріке про цілі функції обмеженого індексу*, Укр. матем. журн. **48** (1996), no. 3, 412–417; **English version**: M. M. Sheremeta, *Generalization of the Fricke theorem on entire functions of finite index,* Ukr. Math. J. **48** (1996), no. 3, 460–466. DOI: 10.1007/BF02378535
98. Ю. С. Трухан, М. М. Шеремета, *Обмеженість l-індексу добутку Нафталевича-Цудзі*, Укр. матем. журн. **56** (2004), no. 2, 247–256; **English version**: M. M. Sheremeta and Yu. S. Trukhan, *Boundedness of the l-index of the Naftalevich-Tsuji product,* Ukr. Math. J. **56** (2004), no. 2, 305–317. DOI: 10.1023/B:UKMA.0000036104.89729.3e
99. M. M. Sheremeta, *Remark to existence theorem for entire function of bounded l-index,* Mat. Stud. **13** (2000), no. 1, 97–99.
100. M. M. Sheremeta and Yu. S. Trukhan, *Properties of the solutions of the Gauss equation,* Mat. Stud. **41** (2014), no. 2, 157–167.
101. M. M. Sheremeta and Yu. S. Trukhan, *Properties of analytic solutions of three similar differential equations of the second order,* Carpathian Math. Publ. **13** (2021), no. 2, 413-425. DOI: 10.15330/cmp.13.2.413-425
102. М. Т. Бордуляк, М. М. Шеремета, *Обмеженість l-індексу цілих функцій Лагерра–Пойа*, Укр. матем. журн. **55** (2003), no. 1, 91–99; **English version**: M. M. Sheremeta and M. T. Bordulyak, *Boundedness of the l-index of Laguerre-Polya entire functions,* Ukr. Math. J. **55** (2003), no. 1, 112–125. DOI: 10.1023/A:1025076720052
103. M. M. Sheremeta, *On the univalence of entire function of bounded l-index,* Mat. Stud. **43** (2015), no. 2, 185–188. DOI: 10.15330/ms.43.2.185-188
104. M. M. Sheremeta, *Problems in the theory of entire functions of bounded index and functions of sine type,* Mat. Stud. **15** (2001), no. 2, 217–224.
105. M. M. Sheremeta, *On a Gross conjecture concerning entire functions of bounded index,* Mat. Stud. **18** (2002), no. 2, 211–212.
106. M. M. Sheremeta, *On the l-index boundedness of some composition of functions,* Mat. Stud. **47** (2017), no. 2, 207–210. DOI: 10.15330/ms.47.2.207-210
107. З. М. Шеремета, М. М. Шеремета, *Властивості цілих розв'язків диференціальних рівнянь*, Укр. матем. журн. **58** (2006), no. 12, 1693–1703; **English version**: Z. M. Sheremeta and M. M. Sheremeta, *Properties of entire solutions of differential equations,* Ukr. Math. J. **58** (2006), no. 12, 1924–1934. DOI: 10.1007/s11253-006-0177-3
108. M. M. Sheremeta, *Geometric properties of analytic solutions of differential equations,* Publisher I. E. Chyzhykov, Chyslo, Lviv, 2019, 164 p.

Стаття: надійшла до редколегії 08.09.2022
прийнята до друку 22.12.2022

THEORY OF ANALYTIC FUNCTIONS OF BOUNDED INDEX: M. M. SHEREMETA'S IDEAS AND ITS FURTHER DEVELOPMENT IN A MULTIDIMENSIOBNAL CASE

Dedicated to the 80-th Anniversary of the Birthday of Professor Myroslav SHEREMETA

Andriy BANDURA[1], **Oleh SKASKIV**[2]

[1]*Ivano Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, Karpatska Str., 15, 76019, Ivano-Frankivsk, UKRAINE*
e-mail: andriykopanytsia@gmail.com
[2]*Ivan Franko National University of Lviv, Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, UKRAINE*
e-mail: olskask@gmail.com

The review article presents the main results of M.M. Sheremeta in the theory of analytic functions having bounded index, which had the greatest influence on the development of multidimensional generalizations the concept of a bounded index for different classes of analytic functions. The main his contribution is the introduction of a positive continuous function l in the definition of the bounded index, which allowed mathematicians to study entire functions with the bounded multiplicities of zeros. Also, M.M. Sheremeta proposed non-burdensome conditions on this function l. In view of the conditions it was possible to build a flexible theory, within which there were obtained the analogs of most of the statements previously established by G. Fricke, S. Shah, W. Hayman, R. Roy and others for entire functions of single variable having bounded index. Moreover, the equivalent form of these conditions, found for the first time by M.M. Sheremeta, allows an easy transfer to the multidimensional case, both for the whole n-dimensional complex space and for a unit ball and a unit polydisc. A few of Sheremeta's statements about the properties of functions from these classes are mentioned, where the corresponding conditions allow certain formal improvements compared to the results of Sheremeta, but the question of building meaningful examples of sharpness for these improvements is still open. There is mentioned few statements of M.M. Sheremeta about the properties of functions from these classes where the corresponding conditions are actually unimprovable, i.e., they allow certain formal improvements over M.M. Sheremeta's results, but the question of constructing meaningful examples for these improvements is still open.

Key words: entire function, analytic function, bounded index, bounded l-index, analytic function of several variables.