ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2022. Випуск 93. С. 108–121
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2022. Issue 93. P. 108–121
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.93.108-121

УДК 517.95

НАПІВЛІНІЙНЕ СТОХАСТИЧНЕ ПАРАБОЛІЧНЕ РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМ ПОКАЗНИКОМ НЕЛІНІЙНОСТІ

Наталія БУГРІЙ[1], Олег БУГРІЙ[2], Олена ДОМАНСЬКА[2]

[1]*Національний університет "Львівська політехніка", вул. Митрополита Андрея, 5, 79000, Львів*
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, 79000, Львів*
e-mails: nataliia.v.buhrii@lpnu.ua, oleh.buhrii@lnu.edu.ua, olena.domanska@lnu.edu.ua

Розглянуто нелінійне параболічне рівняння, збурене білим шумом. Доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку мішаної задачі для цього рівняння.

Ключові слова: стохастичне параболічне рівняння, змінний показник нелінійності, білий шум, узагальнений розв'язок.

1. Вступ

Нехай $n \in \mathbb{N}$ та $T > 0$ – деякі фіксовані числа, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з досить гладкою межею $\partial\Omega$, $\mathbb{S}$ – простір елементарних подій,

$$Q_{0,T} = \Omega \times (0,T), \quad \Pi_{0,T} = \Omega \times (0,T) \times \mathbb{S}, \quad \Theta_{0,T} = (0,T) \times \mathbb{S}.$$

Ми досліджуватимемо мішану задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(t)\Delta u + g(x,t,u) = f(x,t,\omega) + \frac{\partial b(x,t,\omega)}{\partial t}, \quad (x,t,\omega) \in \Pi_{0,T}, \tag{1}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0,\omega) = u_0(x,\omega), \quad x \in \Omega, \quad \omega \in \mathbb{S}, \tag{3}$$

де a, g, f, b, u_0 – деякі функції, $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ – лапласіан u. Похідні тут розуміються в сенсі узагальнених функцій з відповідних просторів, причому вираз

2020 Mathematics Subject Classification: 35K55, 35D30, 46E30, 60H15

$\dfrac{\partial b}{\partial t}$ трактується як білий шум. Нелінійність g за третьою змінною має степеневий характер, причому показник нелінійності є функцією просторової змінної.

Доведемо однозначну розв'язність задачі (1)–(3) та вимірність її розв'язку за параметром $\omega \in \mathbb{S}$, який вважається випадковою змінною. Для формулювання результатів нагадаємо деякі факти та введемо необхідні позначення.

Нехай $\mathbb{S}$ – цілком регулярний топологічний простір, $\mathcal{F}$ – сім'я підмножин $\mathbb{S}$, $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ – ймовірнісна міра Радона (див. далі, а також [1, с. 219]), які задовольняють традиційні аксіоми ймовірністного простору. Вважатимемо цей простір повним, тобто припускаємо, що (див. [2, с. 20]) з того, що $A \in \mathcal{F}$, $B \subset A$ та $\mathbb{P}(A) = 0$ випливає таке: $B \in \mathcal{F}$. Нехай функція $W = W(t,\omega) : \Theta_{0,T} \to \mathbb{R}$ є стандартним вінерівським процесом, тобто (див. [3, с. 38]):

1) $W(0) = 0$ майже напевно (м.н.);
2) для всіх $t_1, t_2, \ldots, t_m$ таких, що $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ випадкові величини
$$W(t_1,\cdot), \quad W(t_2,\cdot) - W(t_1,\cdot), \quad \ldots, \quad W(t_m,\cdot) - W(t_{m-1},\cdot)$$
є незалежними;
3) для всіх t, s таких, що $t > s \geq 0$ маємо, що $W(t,\cdot) - W(s,\cdot) \in N(0, t-s)$, тобто щільність розподілу цієї випадкової величини набуває вигляду
$$q_{s,t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\, e^{-\frac{|x|^2}{2(t-s)}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Для випадкової величини $\eta : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ (тобто, вимірної стосовно $\mathcal{F}$ функції) через
$$\mathbb{E}\,\eta = \int\limits_{\mathbb{S}} \eta(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) \tag{4}$$
позначимо її математичне сподівання (якщо інтеграл по ймовірністній мірі (4) існує).

В цій праці ми одночасно працюватимемо з функціями, інтегровними з деяким показником p за ймовірністною мірою, за мірою Лебега і за мірою Лебега у випадку, коли p – відмінна від тотожно сталої функція деяких змінних. Для зручності, множини таких функцій називатимемо випадковими, стандартними й узагальненими просторами Лебега, відповідно, та означимо їх нижче.

Для кожного числа $p \geq 1$ *випадковим простором Лебега* $L_p \equiv L_p(\mathbb{S}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ назвемо банахів простір випадкових величин зі скінченним абсолютним моментом p-го порядку. Нагадаємо, що елементи η_1 та η_2 цього простору вважаються рівними, якщо $\eta_1 = \eta_2$ м.н. Відомо, що у випадку $p = 2$ простір L_2 є гільбертовим стосовно скалярного добутку
$$(\eta_1, \eta_2)_{L_2} = \mathbb{E}\,(\eta_1 \cdot \eta_2).$$

Нехай $N \in \mathbb{N}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ (наприклад, $\mathcal{O} = (0,T)$ чи $\mathcal{O} = \Omega$). *Стандартним простором Лебега* $L^p(\mathcal{O})$ назвемо банахів простір функцій $v : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, інтегровних в $\mathcal{O}$ зі степенем p за мірою Лебега в $\mathbb{R}^N$. Розглядатимемо $L^p(\mathcal{O})$ зі стандартною нормою. Нехай $H^1(\mathcal{O})$ та $H^1_0(\mathcal{O})$ – простори Соболєва, $L^p(\mathcal{O}; B)$ (B – банахів простір) – простір Лебега-Бохнера, $C(\mathcal{O}; B)$ – простір неперервних на $\mathcal{O}$ функцій зі значеннями в просторі B (див. [4, с. 190, 212, 637]). Нехай B^* – спряжений до B простір,

$H^{-1}(\Omega) := [H_0^1(\Omega)]^*$. Розглянемо множину функцій

$$\mathcal{B}_+(\mathcal{O}) := \{r \in L^\infty(\mathcal{O}) \mid \operatorname*{ess\,inf}_{y\in\mathcal{O}} r(y) > 0\}.$$

Для кожного $\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$ означимо: $\mathfrak{q}_0 := \operatorname*{ess\,inf}_{y\in\mathcal{O}} \mathfrak{q}(y)$, $\mathfrak{q}^0 := \operatorname*{ess\,sup}_{y\in\mathcal{O}} \mathfrak{q}(y)$,

$$\mathfrak{q}'(y) := \frac{\mathfrak{q}(y)}{\mathfrak{q}(y)-1} \quad \text{майже для всіх (м.д.в.)} \quad y \in \mathcal{O}, \quad \text{при} \quad \mathfrak{q}_0 > 1,$$

$$\rho_{\mathfrak{q}}(v;\mathcal{O}) := \int\limits_{\mathcal{O}} |v(y)|^{\mathfrak{q}(y)}\,dy, \quad v : \mathcal{O} \to \mathbb{R}.$$

Нехай $\mathfrak{q} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{O})$, $\mathfrak{q}_0 > 1$. Введемо *узагальнений простір Лебега* так:

$$L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O}) := \{v : \mathcal{O} \to \mathbb{R} \ \text{ – вимірна} \mid \rho_{\mathfrak{q}}(v;\mathcal{O}) < +\infty\}.$$

Відомо, що це банахів простір стосовно норми Люксембурга

$$||v; L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})|| := \inf\{\lambda > 0 \mid \rho_{\mathfrak{q}}(v/\lambda;\mathcal{O}) \le 1\}.$$

Крім того, $[L^{\mathfrak{q}(y)}(\mathcal{O})]^* = L^{\mathfrak{q}'(y)}(\mathcal{O})$. Детальніше про властивості узагальнених просторів Лебега можна довідатись, наприклад, з праць [5], [6], [7], [8].

Припустимо, що коефіцієнти лівої частини рівняння (1) задовольняють умови

(A): $a \in \mathcal{B}_+((0,T))$;

(G): функція $g = g(x,t,\xi)$, $(x,t,\xi) \in Q_{0,T} \times \mathbb{R}$, задовольняє умову Каратеодорі, тобто м.д.в. $(x,t) \in Q_{0,T}$ функція $\xi \mapsto g(x,t,\xi)$ неперервна на $\mathbb{R}$, для всіх (д.в.) $\xi \in \mathbb{R}$ функція $(x,t) \mapsto g(x,t,s)$ вимірна на $Q_{0,T}$; м.д.в. $(x,t) \in Q_{0,T}$ та д.в. $\xi \in \mathbb{R}$ виконуються оцінки

$$g_0|\xi|^{q(x)} \le g(x,t,\xi)\xi \le g^0|\xi|^{q(x)},$$

де $0 < g_0 \le g^0 < +\infty$, $q \in \mathcal{B}_+(\Omega)$, $q_0 > 1$.

Прикладом функцій, які задовольняють зазначені умови **(A)**, **(G)**, можуть, зокрема, бути $a(t) \equiv 1$, $g(x,t,\xi) = |\xi|^{q(x)-2}\xi$, $q(x) = \pi + \operatorname{arctg}(x)$ при $n = 1$ (тоді $x \in \mathbb{R}^1$).

Введемо нарешті основні функційні простори, з якими працюватимемо в цій статті. Нехай функцію q взято з умови **(G)**,

$$V = H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega), \qquad U(Q_{0,T}) = L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^{q(x)}(Q_{0,T}).$$

Тоді $[U(Q_{0,T})]^* = L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) + L^{q'(x)}(Q_{0,T})$. Припустимо, що вхідні дані f, b, u_0 задачі (1)-(3) задовольняють умови

(F1): $f \in L^2(Q_{0,T}; L_2)$;

(U1): $u_0 \in L^2(\Omega; L_2)$;

(W1): $b(x,t,\omega) = b_0(x)W(t,\omega)$, $(x,t,\omega) \in \Pi_{0,T}$, де $b_0 \in V$, W – введений нами вінерівський процес.

Принагідно зауважимо, що $W \in C([0,T]; L_2)$ (див., наприклад, [9, с. 212]).

Введемо ще таке позначення:

$$(y,z)_\Omega := \begin{cases} \int\limits_\Omega (y(x),z(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx, & y=(y_1,\ldots,y_n), z=(z_1,\ldots,z_n):\Omega\to\mathbb{R}^n, \\ \int\limits_\Omega y(x)z(x)\,dx, & y,z:\Omega\to\mathbb{R}. \end{cases} \tag{5}$$

Ми вивчаємо розв'язок задачі (1)–(3) у такому розумінні.

Означення 1. Стохастичний процес $u = u(x,t,\omega)$, $(x,t,\omega)\in\Pi_{0,T}$, називається *узагальненим розв'язком задачі* (1)–(3), якщо:

1) $u\in U(Q_{0,T})\cap C([0,T];L^2(\Omega))$ м.н. в $\mathbb{S}$ та задовольняє умову (3) м.н. в $\mathbb{S}$;

2) $\dfrac{\partial(u-b)}{\partial t}\in[U(Q_{0,T})]^*$ м.н. в $\mathbb{S}$;

3) м.н. в $\mathbb{S}$ функція u задовольняє у сенсі простору $D^*(0,T)$ рівність

$$\frac{d}{dt}(u(t),h)_\Omega + a(t)(\nabla u(t),\nabla h)_\Omega + (g(\cdot,t,u(t)),h)_\Omega = (f(t),h)_\Omega + \frac{d}{dt}(b(t),h)_\Omega \tag{6}$$

для всіх пробних функцій $h\in V$;

4) функція $\mathbb{S}\ni\omega\mapsto u(\cdot,\cdot,\omega)\in U(Q_{0,T})$ є $\mathcal{F}$-вимірною.

Основним результатом статті є такі твердження.

Теорема 1 (існування)**.** *Нехай виконуються умови* **(A)**–**(G)**, **(F1)**–**(W1)**, $\partial\Omega\subset C^{2r}$, *де*

$$r\in\mathbb{N},\quad r\geq\frac{1}{2}\max\Big\{1,\ \frac{n(q^0-2)}{2q^0}\Big\}. \tag{7}$$

Тоді задача (1)–(3) *має розв'язок.*

Теорема 2 (єдиності)**.** *Нехай виконуються умови* **(A)**–**(G)**, **(F1)**–**(W1)**, *м.д.в.* $(x,t)\in Q_{0,T}$ *і д.в.* $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$ *виконується оцінка*

$$(g(x,t,\xi_1)-g(x,t,\xi_2))(\xi_1-\xi_2)\geq 0.$$

Тоді якщо u *та* v *є розв'язками задачі* (1)–(3), *то*

$$\mathbb{P}\Big\{\omega\in\mathbb{S}\ \big|\ u(x,t,\omega)=v(x,t,\omega)\quad \text{м.д.в.}\quad (x,t)\in Q_{0,T}\Big\}=1.$$

Аналогічні результати для параболічних рівнянь зі сталими показниками нелінійності отримано у працях [1], [9], [10]. Задачі зі змінними показниками нелінійності у відмінному від нашого формулюванні досліджено у [11], [12]. Статтю побудовано так. У розділі 2 розглянуто відповідну детерміновану задачу (без випадкового параметра). Деякі допоміжні твердження містить розділ 3. Розділ 4 містить доведення основних результатів.

2. Детермінована задача

Спершу отримаємо існування слабкого розв'язку задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(t)\Delta u + g(x,t,u) = f(x,t) + \frac{\partial b(x,t)}{\partial t},\quad (x,t)\in Q_{0,T}, \tag{8}$$

$$u=0\quad\text{на}\quad \partial\Omega\times[0,T], \tag{9}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\Omega, \tag{10}$$

де функції f, b, u_0 не залежать від випадкового параметра ω. Припустимо, що виконуються умови

(F2): $f\in L^2(Q_{0,T})$;
(U2): $u_0\in L^2(\Omega)$;
(W2): $b\in C([0,T];V)$, $b|_{t=0}=0$.

Означення 2. Функція $u=u(x,t)$, $(x,t)\in Q_{0,T}$, називається узагальненим розв'язком задачі (8)-(10), якщо:

1) $u\in U(Q_{0,T})\cap C([0,T];L^2(\Omega))$ та задовольняє умову (10);
2) $\dfrac{\partial(u-b)}{\partial t}\in[U(Q_{0,T})]^*$;
3) функція u задовольняє у сенсі простору $D^*(0,T)$ рівність

$$\frac{d}{dt}\,(u(t),\eta)_\Omega+a(t)(\nabla u(t),\nabla\eta)_\Omega+(g(\cdot,t,u(t)),\eta)_\Omega=(f(t),\eta)_\Omega+\frac{d}{dt}\,(b(t),\eta)_\Omega$$

для всіх пробних функцій $\eta\in V$.

Для доведення розв'язності задачі (8)–(10) зробимо заміну $u\leftrightsquigarrow\widetilde{u}$, де

$$u=\widetilde{u}+b. \tag{11}$$

Для знаходження нової невідомої функції $\widetilde{u}$ отримаємо таку задачу:

$$\widetilde{u}_t-a(t)\Delta\widetilde{u}+g(x,t,\widetilde{u}+b)=f(x,t)+a(t)\Delta b(x,t),\quad (x,t)\in Q_{0,T}, \tag{12}$$

$$\widetilde{u}=0\quad\text{на}\quad\partial\Omega\times[0,T], \tag{13}$$

$$\widetilde{u}(x,0)=u_0(x),\quad x\in\Omega. \tag{14}$$

Означення 3. Функція $\widetilde{u}=\widetilde{u}(x,t)$, $(x,t)\in Q_{0,T}$, називається *узагальненим розв'язком задачі* (12)–(14), якщо:

1) $\widetilde{u}\in U(Q_{0,T})\cap C([0,T];L^2(\Omega))$ та задовольняє умову (14);
2) $\widetilde{u}_t\in[U(Q_{0,T})]^*$;
3) для всіх пробних функцій $v\in V$ та $\varphi\in C_0^1(0,T)$ виконується рівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}}\Big[-\widetilde{u}v\varphi'+a\sum_{i=1}^n\widetilde{u}_{x_i}v_{x_i}\varphi+g(x,t,\widetilde{u}+b)v\varphi\Big]\,dxdt=$$
$$=\int\limits_{Q_{0,T}}\Big[fv\varphi-a\sum_{i=1}^n b_{x_i}v_{x_i}\varphi\Big]\,dxdt. \tag{15}$$

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* **(A)–(G)**, **(F2)–(W2)**, (7) *та* $\partial\Omega\subset C^{2r}$. *Тоді існує розв'язок* $\widetilde{u}$ *задачі* (12)–(14).

Доведення розіб'ємо на кілька кроків.

Крок 1 (побудова гальоркінських наближень). Нехай $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ – всі ортонормальні в просторі $L^2(\Omega)$ власні функції оператора Лапласа з умовою Діріхле в Ω. Нехай $\Delta^0v:=v$, $\Delta^1v:=\Delta v$, $\Delta^kv:=\Delta(\Delta^{k-1}v)$, $k\in\mathbb{N}$. Розглянемо простір

$$\mathcal{W}_r\equiv H^{2r}_\Delta(\Omega):=\{v\in H^{2r}(\Omega)\mid v|_{\partial\Omega}=\Delta v|_{\partial\Omega}=\ldots=\Delta^{r-1}v|_{\partial\Omega}=0\}, \tag{16}$$

де r взято з (7). Тоді (див. [5, с. 864]) система функцій $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ є базою гільбертового простору $\mathcal{W}_r$ та виконуються такі неперервні і щільні вкладення

$$\mathcal{W}_r \overset{-}{\circlearrowright} V \overset{-}{\circlearrowright} L^2(\Omega) \overset{-}{\circlearrowright} V^* \overset{-}{\circlearrowright} \mathcal{W}_r^*. \tag{17}$$

Зокрема, $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ є базою простору V. Нехай вектор $(\alpha_1^m,\ldots,\alpha_m^m)\in\mathbb{R}^m$ є таким, що функція $u_0^m(x)=\sum\limits_{j=1}^m \alpha_j^m w^j(x)$, $x\in\Omega$, задовольняє умову:

$$u_0^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_0 \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega). \tag{18}$$

Для кожного $m\in\mathbb{N}$ розглянемо таку функцію:

$$\widetilde{u}^m(x,t)=\sum_{j=1}^m \varphi_j^m(t)w^j(x), \quad (x,t)\in Q_{0,T}, \tag{19}$$

де $(\varphi_1^m,\ldots,\varphi_m^m)$ – розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь

$$(\widetilde{u}_t^m(t),w^j)_\Omega + a(t)(\nabla\widetilde{u}^m(t),\nabla w^j)_\Omega + (g(\cdot,t,\widetilde{u}^m(t)+b(t)),w^j)_\Omega =$$

$$= (f(t),w^j)_\Omega - a(t)(\nabla b(t),\nabla w^j)_\Omega, \quad t\in(0,T), \quad j=\overline{1,m}, \tag{20}$$

(див. позначення (5)) з початковими умовами

$$\varphi_1^m(0)=\alpha_1^m, \quad \ldots, \quad \varphi_m^m(0)=\alpha_m^m. \tag{21}$$

Аналогічно як, наприклад, в [13] доводимо існування глобального розв'язку задачі Коші (20)-(21). Зрозуміло також, що

$$\widetilde{u}^m(0)=u_0^m.$$

Крок 2 (апріорні оцінки). Помножимо j-те рівняння (20) на функцію $\varphi_j^m(t)$, підсумуємо за j і зінтегруємо за $t\in(0,\tau)\subset(0,T)$. Після інтегрування частинами отримаємо, що

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\widetilde{u}^m(x,\tau)|^2\,dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[a(t)\sum_{i=1}^n |\widetilde{u}_{x_i}^m|^2 + g(x,t,\widetilde{u}^m+b)(\widetilde{u}^m+b)\Big]\,dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |u_0^m(x)|^2\,dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[f\widetilde{u}^m + g(x,t,\widetilde{u}^m+b)b - a(t)\sum_{i=1}^n b_{x_i}\widetilde{u}_{x_i}^m\Big]\,dxdt. \tag{22}$$

Використавши стандартну нерівність Юнга, отримаємо таке:

$$|f\widetilde{u}^m| \le \frac{1}{2}|f|^2 + \frac{1}{2}|\widetilde{u}^m|^2,$$

$$\Big|-a(t)\sum_{i=1}^n b_{x_i}\widetilde{u}_{x_i}^m\Big| \le \varepsilon_1\sum_{i=1}^n |\widetilde{u}_{x_i}^m|^2 + C_1(\varepsilon_1)\sum_{i=1}^n |b_{x_i}|^2.$$

З узагальненої нерівності Юнга (див., наприклад, лему 3.3 [14, с. 4]) матимемо, що

$$|g(x,t,\widetilde{u}^m+b)b| \le q^0|\widetilde{u}^m+b|^{q(x)-1}|b| \le \varepsilon_2|\widetilde{u}^m+b|^{q(x)} + C_2(\varepsilon_2)|b|^{q(x)}.$$

Тому з (22) та умов теореми, отримаємо нерівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|\widetilde{u}^m(x,\tau)|^2\,dx+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[(a_0-\varepsilon_1)\sum_{i=1}^{n}|\widetilde{u}^m_{x_i}|^2+(g_0-\varepsilon_2)|\widetilde{u}^m+b|^{q(x)}\Big]\,dxdt\le$$

$$\le C_3(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\Big(\int\limits_{\Omega}|u_0^m|^2\,dx+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[|f|^2+|b|^{q(x)}+\sum_{i=1}^{n}|b_{x_i}|^2\Big]\,dxdt+\int\limits_{Q_{0,\tau}}|\widetilde{u}^m|^2\,dxdt\Big).\quad(23)$$

Вибираючи $\varepsilon_1>0$ та $\varepsilon_2>0$ досить малими і застосовуючи лему Гронуола для функції $y(\tau)=\int_{\Omega}|\widetilde{u}^m(x,\tau)|^2\,dx$, $\tau\in[0,T]$, з (23) отримуємо оцінку

$$y(\tau)\le C_4\Big(\int\limits_{\Omega}|u_0^m|^2\,dx+\int\limits_{Q_{0,\tau}}\Big[|f|^2+|b|^{q(x)}+\sum_{i=1}^{n}|b_{x_i}|^2\Big]\,dxdt\Big),\quad\tau\in[0,T].\quad(24)$$

Беручи до уваги збіжність (18), матимемо, що

$$\int\limits_{\Omega}|u_0^m|^2\,dx\le C_5\Big(1+\int\limits_{\Omega}|u_0|^2\,dx\Big).\quad(25)$$

Використавши (24)–(25), після певних перетворень з (23) одержимо таке:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in(0,T)}\int\limits_{\Omega}|\widetilde{u}^m(x,\tau)|^2\,dx+\int\limits_{Q_{0,T}}\Big[\sum_{i=1}^{n}|\widetilde{u}^m_{x_i}|^2+|\widetilde{u}^m|^2+|\widetilde{u}^m+b|^{q(x)}\Big]\,dxdt\le C_6\mathtt{F},\quad(26)$$

де стала $C_6>0$ не залежить від m,

$$\mathtt{F}=1+\int\limits_{\Omega}|u_0|^2\,dx+\int\limits_{Q_{0,T}}\Big[|f|^2+\sum_{i=1}^{n}|b_{x_i}|^2+|b|^{q(x)}\Big]\,dxdt.\quad(27)$$

Після деяких перетворень, з умов теореми і (26) одержимо оцінку

$$\int\limits_{Q_{0,T}}\Big|g(x,t,\widetilde{u}^m+b)\Big|^{q'(x)}\,dxdt\le C_7,\quad(28)$$

де стала $C_7>0$ не залежить від m.

Крок 3 (додаткові оцінки). Нехай $\mathcal{W}_r$ взято з (16). Введемо допоміжні позначення. Якщо $s_0:=\min\{2,q_0\}$, $\;s^0:=\max\{2,q^0\}$, то

$$L^{s^0}(0,T;\mathcal{W}_r)\,\bar{\circlearrowright}\,U(Q_{0,T})\,\bar{\circlearrowright}\,L^2(Q_{0,T})\,\bar{\circlearrowright}\,[U(Q_{0,T})]^*\,\bar{\circlearrowright}\,L^{\frac{s^0}{s^0-1}}(0,T;\mathcal{W}_r^*).\quad(29)$$

Крім того, якщо $m\in\mathbb{N}$ – фіксоване, $\mathfrak{M}$ – лінійна оболонка елементів $\{w^1,\dots,w^m\}$, $P_m:L^2(\Omega)\to\mathfrak{M}$ – ортопроектор, то (див. [5, с. 866]) для всіх $v\in\mathcal{W}_r$ виконується нерівність

$$||P_mv;\mathcal{W}_r||\le||v;\mathcal{W}_r||.\quad(30)$$

Використовуючи наведені факти, доведемо таку оцінку:

$$||\widetilde{u}^m_t;L^{\frac{s^0}{s^0-1}}(0,T;\mathcal{W}_r^*)||\le C_8,\quad(31)$$

де стала $C_8>0$ не залежить від m.

Спершу розглянемо довільне $v \in L^{s^0}(0,T;\mathcal{W}_r)$ таке, що $||v; L^{s^0}(0,T;\mathcal{W}_r)|| \leq 1$. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що

$$v(x,t) = \sum_{j=1}^{k} \beta_j^k(t) w^j(x), \quad (x,t) \in Q_{0,T},$$

причому, $k > m$ (доповнимо у разі потреби цю суму формальними нульовими доданками). Тоді $v = v^1 + v^2$, де

$$v^1(x,t) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j^k(t) w^j(x), \quad v^2(x,t) = \sum_{j=m+1}^{k} \beta_j^k(t) w^j(x), \quad (x,t) \in Q_{0,T}.$$

Оскільки виконується (30), то $||v^1; L^{s^0}(0,T;\mathcal{W}_r)|| \leq 1$. З (19) випливає, що

$$\widetilde{u}_t^m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} (\varphi_j^m)'(t) w^j(x), \quad (x,t) \in Q_{0,T},$$

а гладкість наявних тут функцій означає, що $\widetilde{u}_t^m \in L^2(Q_{0,T})$. З (29), зокрема, випливає, що скалярний добуток між $L^{\frac{s^0}{s^0-1}}(0,T;\mathcal{W}_r^*)$ і $L^{s^0}(0,T;\mathcal{W}_r)$ (з врахуванням ортогональності системи власних функцій $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$) набуде вигляду

$$\langle \widetilde{u}_t^m, v \rangle_{L^{s^0}(0,T;\mathcal{W}_r)} = \langle \widetilde{u}_t^m, v \rangle_{L^2(Q_{0,T})} = \int_0^T (\widetilde{u}_t^m(t), v(t))_\Omega \, dt = \int_0^T (\widetilde{u}_t^m(t), v^1(t))_\Omega \, dt.$$

Використавши тепер (20), (17) та оцінки (26), (28), отримаємо нерівність

$$|\langle \widetilde{u}_t^m, v \rangle_{L^{s^0}(0,T;\mathcal{W}_r)}| = \Big| \int_0^T \Big[-a(t)(\nabla \widetilde{u}^m(t), \nabla v^1(t))_\Omega - (g(\cdot, t, \widetilde{u}^m(t) + b(t)), v^1(t))_\Omega +$$
$$+ (f(t), v^1(t))_\Omega - a(t)(\nabla b(t), \nabla v^1(t))_\Omega \Big] \, dt \Big| \leq C_9 ||v^1; L^{s^0}(0,T;\mathcal{W}_r)|| \leq C_9,$$

де стала $C_9 > 0$ не залежить від m. Звідси і випливає (31).

Крок 4 (граничний перехід). З оцінок (26), (28), (31) випливає існування такої підпослідовності $\{\widetilde{u}^{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{\widetilde{u}^m\}_{m\in\mathbb{N}}$, що

$$\widetilde{u}^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{u} \quad * \text{-слабко в} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{32}$$

$$\widetilde{u}^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{u} \quad \text{слабко в} \quad U(Q_{0,T}), \tag{33}$$

$$g(x,t,\widetilde{u}^{m_k} + b) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi \quad \text{слабко в} \quad L^{q'(x)}(Q_{0,T}), \tag{34}$$

$$\widetilde{u}_t^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{u}_t \quad \text{слабко в} \quad L^{\frac{s^0}{s^0-1}}(0,T;\mathcal{W}_r^*). \tag{35}$$

Крім того, зокрема, з теореми Обена (див., наприклад, [6]), можливо при переході до нової підпослідовності, випливає збіжність

$$\widetilde{u}^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{u} \quad \text{сильно в} \quad L^{s_0}(Q_{0,T}) \quad \text{та майже скрізь в} \quad Q_{0,T}.$$

Тому $\chi = g(x,t,\widetilde{u} + b)$. Далі стандартно доводимо, що $\widetilde{u}$ – шуканий розв'язок задачі (12)–(14). Теорему доведено. □

Теорема 4. *Якщо виконуються умови* **(A)**–**(G)**, **(F2)**–**(W2)**, (7) *та* $\partial\Omega \subset C^{2r}$, *то існує розв'язок* u *задачі* (8)–(10).

Доведення. Нехай виконується рівність (11). Тоді функція u є розв'язком задачі (8)–(10), тоді і тільки тоді, коли функція $\widetilde{u}$ є розв'язком задачі (12)–(14). Тому доведення нашої теореми випливає з теореми 3. □

Наслідок 1. *Знайдений в теоремі 4 розв'язок* u *задачі* (8)–(10) *задовольняє оцінку*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in(0,T)} \int\limits_{\Omega} |u(x,\tau)|^2\,dx + \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 + |u|^2 + |u|^{q(x)}\Big]\,dxdt \le$$
$$\le C_{10}\Big(\mathtt{F} + \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in(0,T)} \int\limits_{\Omega} |b(x,\tau)|^2\,dx\Big), \tag{36}$$

де $\mathtt{F}$ *взято з* (27), *стала* $C_{10} > 0$ *не залежить від* u, u_0, f, b.

Доведення. З (11), (26) і леми Фату випливає оцінка

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in(0,T)} \int\limits_{\Omega} |u(x,\tau) - b(x,t)|^2\,dx + \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i} - b_{x_i}|^2 + |u-b|^2 + |u|^{q(x)}\Big]\,dxdt \le C_{11}\mathtt{F},$$

звідки й отримаємо (36). □

3. Мультифункції та їхні селектори

Розглянемо питання вимірності селекторів або однозначних гілок многозначних функції. Нагадаємо кілька понять і тверджень з [1], [9], [15], [16].

Многозначною функцією або *мультифункцією* $\Psi : Y \to Z$ називається відображення, значення $\Psi(y)$ якого для кожного $y \in Y$ є непорожньою підмножиною Z (див. [16, с. 394]). Для кожного $B \subset Z$ позначимо $\Psi^{-1}(B) := \{y \in Y \mid \Psi(y) \cap B \neq \varnothing\}$. (Однозначна) функція $\psi : Y \to Z$ є *селектором* мультифункції $\Psi : Y \to Z$, якщо $\psi(y) \in \Psi(y)$ для всіх $y \in Y$.

Нехай $\mathcal{A}$ – деяка σ-алгебра підмножин Y, $\mathcal{C}$ – сім'я замкнутих підмножин топологічного простору Z. Мультифункція $\Psi : Y \to Z$ називається *точково-замкнутою*, якщо кожне її значення $\Psi(y)$ є замкнутою множиною в Z. Мультифункція $\Psi : Y \to Z$ (зокрема, однозначна функція) називається *вимірною* ($(\mathcal{A},\mathcal{C})$-вимірною), якщо $\Psi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ для всіх $B \in \mathcal{C}$. *Графіком* мультифункції $\Psi : Y \to Z$ (зокрема, однозначної функції) називається множина $Gr(\Psi) := \{(y,z) \in Y \times Z \mid y \in Y,\ \ z \in \Psi(y)\}$.

Використовуючи цю термінологію, нагадаємо кілька тверджень.

Твердження 1 ([15, с. 398, 400], [16, с. 395])**.** *Нехай* $\mathcal{A}$ – σ*-алгебра підмножин у* Y, Z *– повний сепарабельний метричний простір. Тоді кожна точково-замкнута вимірна мультифункція* $\Psi : Y \to Z$ *має вимірний селектор.*

Нагадаємо, що мірою Радона μ (див. [17, с. 13]) на гаусдорфовому топологічному просторі Y з σ-алгеброю борелівських множин $\mathcal{B}(Y)$ називається локально-фінітна (кожна точка з Y має окіл скінченної μ-міри) внутрішньо-регулярна на $\mathcal{B}(Y)$ (для кожної $B \in \mathcal{B}(Y)$ маємо, що $\mu(B) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset B,\ \ K - \text{компакт}\})$ міра.

Твердження 2 ([1, с. 206], [9, с. 206]). *Нехай Y, Z – сепарабельні банахові простори, $\Gamma : Y \to Z$ – точково-замкнута мультифункція з замкнутим графіком. Тоді Γ має універсальний вимірний за Радоном селектор, тобто селектор $\gamma : Y \to Z$, який вимірний стосовно довільної міри Радона, визначеної на $\mathcal{B}(Y)$.*

Нехай $\Gamma : L^2(\Omega) \times L^2(Q_{0,T}) \times C([0,T]; V) \to U(Q_{0,T})$ – таке, можливо, багатозначне відображення, що

$$\Gamma\{u_0,\ f,\ b\} = \{u\}, \tag{37}$$

де $\{u\}$ – множина таких, отриманих з теореми 4, розв'язків задачі (8)-(10), які задовольняють нерівність (36). Матимемо такий результат.

Лема 1. *Якщо виконуються умови теореми 4, то мультифункція Γ з (37) є точково-замкнутою і має замкнутий графік.*

Доведення. 1. Згідно з теоремою 4, задача (8)–(10) має розв'язок. Тому множина значень відображення Γ непорожня.

2. Нехай $\{u_0,\ f,\ b,\ \{u\}\}$ – гранична точка графіка відображення Γ. Тоді існує $u \in \{u\}$ та послідовність $\{u_{0k}, f_k, b_k, u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset Gr(\Gamma)$ така, що u_k – розв'язок задачі (8)–(10) для $k \in \mathbb{N}$ з вхідними даними u_{0k}, f_k, b_k, причому

$$u_{0k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_0 \quad \text{в просторі} \quad L^2(\Omega), \tag{38}$$

$$f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{в просторі} \quad L^2(Q_{0,T}), \tag{39}$$

$$b_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} b \quad \text{в просторі} \quad C([0,T]; V), \tag{40}$$

$$u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в просторі} \quad U(Q_{0,T}). \tag{41}$$

З (40), (41), зокрема, випливає, що (можливо при переході до підпослідовності)

$$b_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} b, \quad u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{м.с. в} \quad Q_{0,T}. \tag{42}$$

Кожна функція u_k задовольняє такий аналог оцінки (36):

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in(0,T)} \int_\Omega |u_k(x,\tau)|^2\, dx + \int_{Q_{0,T}} \Big[\sum_{i=1}^n |(u_k)_{x_i}|^2 + |u_k|^2 + |u_k|^{q(x)}\Big]\, dxdt \le$$
$$\le C_{10}\Big(1 + \int_\Omega |u_{0k}|^2\, dx + \int_{Q_{0,T}} |f_k|^2\, dxdt +$$
$$+ \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in(0,T)} \int_\Omega |b_k(x,\tau)|^2\, dx + \int_{Q_{0,T}} \Big[\sum_{i=1}^n |(b_k)_{x_i}|^2 + |b_k|^{q(x)}\Big]\, dxdt\Big), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Спрямувавши тут $k \to \infty$ і використавши лему Фату, отримаємо, що u задовольняє нерівність (36).

Якщо $\widetilde{u}_k = u_k - b_k$, то (див. (15)) для всіх пробних функцій $v \in V$ та $\varphi \in C_0^1(0,T)$ виконується рівність

$$\int_{Q_{0,T}} \Big[-\widetilde{u}_k v\varphi' + a\sum_{i=1}^n (\widetilde{u}_k)_{x_i} v_{x_i}\varphi + g(x,t,\widetilde{u}_k + b_k)v\varphi\Big]\, dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[f_k v\varphi - a\sum_{i=1}^{n} (b_k)_{x_i} v_{x_i}\varphi \Big]\, dxdt. \tag{43}$$

Зі збіжностей (38)–(42) випливає можливість перейти до границі в (43). Тоді u – розв'язок задачі (8)–(10) і графік Γ містить свої граничні точки.

3) Нехай u_0, f, b – деякі функції, $\{u\}$ – гранична точка множини $\Gamma\{u_0, f, b\}$. Тоді існує функція $u \in \{u\}$ та послідовність $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Gamma\{u_0, f, b\}$, для якої виконується (41), а тому і відповідна частина (42). Кожна функція u_k є розв'язком задачі (8)–(10) з вхідними даними u_0, f, b та задовольняє аналог оцінки (36). Крім того, можна довести, що функція $\widetilde{u}_k = u_k - b$ задовольняє такий аналог оцінки (28):

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big| g(x,t,\widetilde{u}_k + b)\Big|^{q'(x)}\, dxdt \le C_{12}.$$

Тому, можливо при переході до підпослідовності, правильною буде збіжність типу (34) для послідовності $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ та функції $\widetilde{u} = u - b$. Отже, u є розв'язком задачі (8)–(10), а мультифункція Γ є точково-замкнутою. □

На завершення цього розділу введемо функцію випадкового аргументу

$$\phi : \mathbb{S} \to L^2(\Omega) \times L^2(Q_{0,T}) \times C([0,T]; V)$$

за правилом

$$\phi(\omega) := \{u_0(\cdot,\omega),\ \ f(\cdot,\cdot,\omega),\ \ b(\cdot,\cdot,\omega)\},\quad \omega \in \mathbb{S}, \tag{44}$$

і використаємо позначення (37), (44) для означення мультифункції $\Psi : \mathbb{S} \to U(Q_{0,T})$ за таким правилом:

$$\Psi(\omega) := \Gamma \circ \phi(\omega) = \Gamma(\phi(\omega)),\quad \omega \in \mathbb{S}. \tag{45}$$

Отже, для кожного $\omega \in \mathbb{S}$ значення $\Psi(\omega)$ є множиною розв'язків $\{u(\cdot,\cdot,\omega)\}$ задачі (8)–(10), які задовольняють такий аналог нерівності (36) з функціями $u_0(\cdot,\omega)$, $f(\cdot,\cdot,\omega)$, $b(\cdot,\cdot,\omega)$ у правій частині:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in(0,T)} \int\limits_{\Omega} |u(x,\tau,\omega)|^2\, dx + \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 + |u|^2 + |u|^{q(x)}\Big]\, dxdt \le$$

$$\le C_{13}\Big(1 + \int\limits_{\Omega} |u_0(x,\omega)|^2\, dx + \int\limits_{Q_{0,T}} |f(x,t,\omega)|^2\, dxdt +$$

$$+ \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in(0,T)} \int\limits_{\Omega} |b(x,\tau,\omega)|^2\, dx + \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |b_{x_i}|^2 + |b|^{q(x)}\Big]\, dxdt\Big),$$

де стала $C_{13} > 0$ не залежить від $u, u_0, f, b, x, t, \omega$.

Використаємо введені позначення і факти для доведення основних тверджень.

4. Доведення основних результатів

Модифікуємо доведення відповідних результатів праці [9].

Доведення теореми 1. Візьмемо функцію Γ з (37), ϕ – з (44), а функцію Ψ – з (45). Беручи в твердженні 2

$$Y = L^2(\Omega) \times L^2(Q_{0,T}) \times C([0,T]; V), \qquad Z = U(Q_{0,T})$$

і використавши лему 1, отримуємо існування селектора $\gamma : Y \to Z$, вимірного щодо будь-якої міри Радона на Y. Визначимо функцію $\psi : \mathbb{S} \to Z$ за таким правилом:

$$\psi(\omega) := \gamma \circ \phi(\omega) = u(\cdot, \cdot, \omega), \quad \omega \in \mathbb{S}, \tag{46}$$

де u – розв'язок задачі (8)–(10) з вхідними даними $u_0(\cdot, \omega)$, $f(\cdot, \cdot, \omega)$, $b(\cdot, \cdot, \omega)$.

Згідно з припущень, $\mathbb{P}$ – міра Радона на $\mathbb{S}$, а ϕ – вимірна функція. Тому ϕ є вимірною в сенсі Лузіна, зокрема, для всіх $m \in \mathbb{N}$ існує $K_m \subset \mathbb{S}$ таке, що $\mathbb{P}(\mathbb{S} \setminus K_m) < 1/m$, а звуження $\phi_m := \phi|_{K_m}$ є неперервною функцією. Не зменшуючи загальності (див. [9, с. 207]), можна вважати, що $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ – зростаюча послідовність компактних множин та

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m\Big) = 1. \tag{47}$$

Нехай $\mathbb{P}_m = \mathbb{P}|_{K_m}$ – звуження міри $\mathbb{P}$ на множину K_m. Тоді $\phi_m(\mathbb{P}_m)$ – міра Радона на просторі Y (див. [9, с. 207]). Зокрема, якщо $B \in \mathcal{B}(Y)$, то

$$\phi_m(\mathbb{P}_m(B)) = \mathbb{P}_m\{\omega \in K_m \mid \phi_m(\omega) \in B\}.$$

Тому функція γ є $\phi_m(\mathbb{P}_m)$-вимірною. Зі сказаного вище випливає, що функція $\gamma \circ \phi_m : K_m \to Z$ є $\mathbb{P}$-вимірною.

Розглянемо послідовність функцій

$$\psi_m(\omega) = \begin{cases} \gamma \circ \phi_m(\omega) = u(\cdot, \cdot, \omega), & \text{якщо} \quad \omega \in K_m, \\ 0, & \text{якщо} \quad \omega \notin K_m. \end{cases}$$

Зрозуміло, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ функція $\psi_m : \mathbb{S} \to Y$ є $\mathbb{P}$-вимірною і

$$\psi_m(\omega) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \psi(\omega)$$

для всіх $\omega \in \mathbb{S} \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} K_m$, тобто м.н. в $\mathbb{S}$, бо виконується рівність (47) і збіжність $\widehat{K_m} = \bigcup\limits_{j=1}^{m} K_j \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_j$. Отже, функція ψ є $\mathbb{P}$-вимірною як м.с.-границя вимірних, тобто ψ є $\mathbb{P}$-вимірним селектором мультифункції Ψ, а функція u з (46) є Z-значною випадковою величиною (виконується пункт 4 означення 1).

Зрозуміло, що для $\omega \in \mathbb{S}$ функція $u(\cdot, \cdot, \omega)$ з (46) задовольняє всі пункти означення 2, тому виконуються пункти 1–3 означення 1. Теорему доведено. $\square$

Доведення теореми 2. Нехай u_1 та u_2 – розв'язки задачі (1)–(3), $u = u_1 - u_2$. Тоді з (6) випливає така рівність в сенсі простору $D^*(0,T)$:

$$\frac{d}{dt}\,(u(t), h)_\Omega + a(t)(\nabla u(t), \nabla h)_\Omega + (g(\cdot, t, u_1(t)) - g(\cdot, t, u_2(t)), h)_\Omega = 0$$

м.н. в $\mathbb{S}$. Звідси стандартно для $\tau \in (0,T]$ одержимо, що

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u(x,\tau,\omega)|^2\, dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[a(t)\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 + \Big(g(x,t,u_1) - g(x,t,u_2)\Big)(u_1-u_2)\Big]\, dxdt = 0.$$

Використавши умови теореми, отримаємо оцінку $\int\limits_{\Omega} |u(x,\tau,\omega)|^2\, dx \le 0$ м.н. в $\mathbb{S}$. Тому $u_1 = u_2$ м.с. в $Q_{0,T}$ та м.н. в $\mathbb{S}$ і теорему доведено. $\square$

Список використаної літератури

1. E. A. Coayla-Teran, J. Ferreira, and P. M. D. Magalhães, *Weak solutions for random nonlinear parabolic equations of nonlocal type*, Random Oper. Stoch. Equ. **16** (2008), no. 3, 213–223. DOI: 10.1515/ROSE.2008.011
2. S. Peszat and J. Zabczyk, *Stochastic partial differential equations with Levy noise*, Vol. **113** of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
3. L. C. Evans, *An introduction to stochastic differential equations*, Vol. **82**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.
4. G. Leoni, *A first course in Sobolev spaces*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
5. O. Buhrii and N. Buhrii, *Integro-differential systems with variable exponents of nonlinearity*, Open Math. **15** (2017), 859–883. DOI: 10.1515/math-2017-0069
6. O. Buhrii and N. Buhrii, *Nonlocal in time problem for anisotropic parabolic equations with variable exponents of nonlinearities*, J. Math. Anal. Appl. **473** (2019), no. 2, 695–711. DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.12.058
7. M. Bokalo, O. Buhrii, and N. Hryadil, *Initial-boundary value problems for nonlinear elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity in unbounded domains without conditions at infinity*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods **19** (2020)2, Article ID 111700, 17 p. DOI: 10.1016/j.na.2019.111700
8. M. M. Bokalo and O. V. Domanska, *Initial-boundary value problem for higher-orders nonlinear elliptic-parabolic equations with variable exponents of the nonlinearity in unbounded domains without conditions at infinity*, Mat. Stud. **59** (2023), no. 1, 86–105. DOI: 10.30970/ms.59.1.86-105
9. A. Bensoussan and R. Temam, *Equations stochastiques du type Navier-Stokes*, J. Funct. Anal. **13** (1973), no. 2, 195-222. DOI: 10.1016/0022-1236(73)90045-1
10. E. Pardoux, *Stochastic partial differential equations. An introduction*, Springer Briefs in Mathematics. Springer, Cham, 2021. DOI: 10.1007/978-3-030-89003-2
11. J. Ren, M. Röckner, and F.-Y. Wang, *Stochastic generalized porous media and fast diffusion equations*, J. Differ. Equations **238** (2007), no. 1, 118–152. DOI: 10.1016/j.jde.2007.03.027
12. C. Bauzet, G. Vallet, P. Wittbold, and A. Zimmermann, *On a $p(t,x)$-Laplace evolution equation with a stochastic force*, Stoch. Partial Differ. Equ., Anal. Comput. 1 (2013), no. 3, 552–570. DOI: 10.1007/s40072-013-0017-z
13. O. M. Buhrii, *Visco-plastic, Newtonian, and dilatant fluids: Stokes equations with variable exponent of nonlinearity*, Mat. Stud. **49** (2018), no. 2, 165–180. DOI: 10.15330/ms.49.2.165-180
14. O. M. Buhrii and N. V. Buhrii, *Doubly nonlinear elliptic-parabolic variational inequalities with variable exponents of nonlinearities*, Adv. Nonlinear Var. Inequal. **22** (2019), no. 2, 1–22.

15. K. Kuratowski and C. Ryll-Nardzewski, *General theorem on selector*, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys. **13** (1965), 397–403.
16. C. J. Himmelberg and F. S. van Vleck, *Some selection theorems for measurable functions*, Can. J. Math. **21** (1969), 394–399. DOI: 10.4153/CJM-1969-041-7
17. L. Schwartz, *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures*, Oxford University Press, London, 1973.

Стаття: надійшла до редколегії 25.02.2022
прийнята до друку 22.06.2022

SEMILINEAR STOCHASTIC PARABOLIC EQUATION WITH VARIABLE EXPONENT OF NONLINEARITY

Nataliya BUHRII[1], **Oleh BUHRII**[2], **Olena DOMANSKA**[2]

[1]*Lviv Polytechnic National University,*
Mytropolyt Andrei Str., 5, Lviv, 79000, Ukraine
[2]*Ivan Franko National University of Lviv,*
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: nataliia.v.buhrii@lpnu.ua, oleh.buhrii@lnu.edu.ua,
olena.domanska@lnu.edu.ua

Some nonlinear parabolic equation with the white noise is considered. The initial-boundary value problem for the equation is investigated and the existence and uniqueness of the weak solution for the problem are proved.

Key words: stochastic parabolic equation, variable exponent of nonlinearity, white noise, weak solution.