ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2022. Випуск 93. С. 83–96
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2022. Issue 93. P. 83–96
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.93.083-096

УДК 517.555

НЕРІВНІСТЬ ТИПУ ВІМАНА ДЛЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ З ШВИДКО КОЛИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В КРАТНО-КРУГОВИХ ОБЛАСТЯХ

Андрій КУРИЛЯК, Олег СКАСКІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, 79001, Львів
e-mails: andriykuryliak@gmail.com, olskask@gmail.com

Нехай $\mathcal{A}^p(\mathbb{G})$ — клас аналітичних функцій f у повній області Рейнгардта $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}^p$, які можна подати у вигляді степеневого ряду

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_p) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

з областю збіжності $\mathbb{G}$, де

$$z^n = z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p},\ z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{G},\ n = (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{Z}_+^p,\ \|n\| = \sum_{j=1}^{p} n_j,$$

таких, що існує $n \in \mathbb{N}^p$: $a_n \neq 0$. Через $\mathcal{K}(f, \theta)$ позначимо клас випадкових степеневих рядів вигляду

$$f(z, t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{2\pi i \theta_n t} z^n,$$

де (θ_n) — послідовність натуральних чисел така, що її впорядкування (θ_k^*) за зростанням $\{\theta_n : n \in \mathbb{Z}_+^p\} = \{\theta_k^* : k \in \mathbb{Z}_+\}, \theta_{k+1}^* > \theta_k^*$, задовольняє умову $\theta_{k+1}^*/\theta_k^* \geqslant q > 1, k > 0$. Для аналітичних функцій із класу $\mathcal{K}(f, \theta)$ уточнено нерівність Вімана.

Ключові слова: область Рейнгарда, ефект Леві, кратні степеневі ряди, випадкові степеневі ряди, нерівність Вімана, винятковa множина, коливні коефіцієнти.

2020 Mathematics Subject Classification: 32A05

1. Вступ

Нехай $p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}^p$ — p-вимірний комплексний векторний простір, а $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}^p$ — область Рейнгардта з центром у точці $z = 0 \in \mathbb{C}^p$, тобто, така область, що:

a) $z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{G} \Longrightarrow (\forall R = (R_1, \ldots, R_p) \in [0,1]^p)\colon Rz = (R_1 z_1, \ldots, R_p z_p) \in \mathbb{G}$ (*повна область*);

b) $(z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{G} \Longrightarrow (\forall (\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p) : (z_1 e^{i\theta_1}, \ldots, z_p e^{i\theta_p}) \in \mathbb{G}$ (*кратно-кругова область*).

Зазначимо, що у випадку $p = 1$ область Рейнгардта — це або круг з центром у початку координат, або ж вся комплексна площина $\mathbb{C}$.

Через $\mathcal{A}_0^p(\mathbb{G})$, $p \in \mathbb{N}$, позначимо клас аналітичних функцій f у повній області Рейнгардта $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}^p$, які можна подати у вигляді степеневого ряду

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_p) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{1}$$

з областю збіжності $\mathbb{G}$, де

$$z^n = z_1^{n_1} \ldots z_p^{n_p},\ z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{G},\ n = (n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{Z}_+^p,\ \|n\| = \sum_{j=1}^{p} n_j.$$

Через $\mathcal{A}^p(\mathbb{G})$ позначимо підклас, в який входять функції $f \in \mathcal{A}_0^p(\mathbb{G})$ такі, що існує $n \in \mathbb{N}^p\colon a_n \neq 0$.

Для функції $f \in \mathcal{A}_0^p(\mathbb{G})$ вигляду (1) з областю збіжності $\mathbb{G}$ і

$$r = (r_1, \cdots, r_p) \in |G| := \{r = (r_1, \ldots, r_p)\colon r_j = |z_j|, z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{G}\}$$

позначимо

$$\Delta_{r_0} = \{t \in |G|\colon t_j \geqslant r_j^0,\ j \in \{1, \cdots, p\}\}, \quad \mu_f(r) = \max\{|a_n| r_1^{n_1} \cdots r_p^{n_p}\colon n \in \mathbb{Z}_+^p\},$$

$$M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z_1| = r_1, \cdots, |z_p| = r_p\}, \quad \mathfrak{M}_f(r) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} |a_n| r^n.$$

Відомо, що кожну аналітичну функцію f у повній області Рейнгардта $\mathbb{G}$ з центром у точці $z = 0$ можна зобразити в $\mathbb{G}$ у вигляді ряду (1). З іншого боку, область збіжності кожного ряду вигляду (1) є логарифмічно-опуклою повною областю Рейнгардта з центром у точці $z = 0$.

Для функції $f \in \mathcal{A}_0^p(\mathbb{G})$ вигляду (1) і $r = (r_1, \cdots, r_p) \in |G|$ позначимо

$$\Delta_{r_0} = \{t \in |G|\colon t_j \geqslant r_j^0,\ j \in \{1, \cdots, p\}\}, \quad \mu_f(r) = \max\{|a_n| r_1^{n_1} \cdots r_p^{n_p}\colon n \in \mathbb{Z}_+^p\},$$

$$M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z_1| = r_1, \cdots, |z_p| = r_p\}, \quad \mathfrak{M}_f(r) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} |a_n| r^n.$$

Добре відомо (наприклад, див. [1, 2, 3, 4, 6, 7]), що за класичною теоремою А. Вімана і Ж. Валірона для кожної цілої функції $f \in \mathcal{A}^1(\mathbb{C})$ і для кожного $\varepsilon > 0$ існує множина $E = E_f(\varepsilon) \subset [1; +\infty)$ скінченної логарифмічної міри (тобто, $\int_E d\ln r < +\infty$) така, що нерівність (*нерівність Вімана*)

$$M_f(r) \leqslant \mu_f(r) \ln^{1/2+\delta} \mu_f(r)$$

виконується для всіх $r \in (1, +\infty) \setminus E_f(\varepsilon)$.

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — ймовірнісний простір Штейнгауза, тобто $\Omega = [0,1]$, P — міра Лебега визначена на σ-алгебрі $\mathcal{A}$ вимірних за Лебегом підмножин $[0,1]$. Нехай $X = (X_n(t))$ — послідовність випадкових величин на цьому просторі. Для функції $f \in \mathcal{A}_0^p$ вигляду (1) через $\mathcal{K}(f, X)$ позначимо клас випадкових степеневих рядів вигляду

$$f(z,t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n X_n(t) z^n. \tag{2}$$

Під "майже напевно" (м.н.) розумітимемо, що деяка властивість виконується майже скрізь за мірою Лебега P. Говоритимемо, що таке співвідношення виконується майже напевно у класі $\mathcal{K}(f, X)$, якщо воно виконується для кожної цілої функції $f(z,t)$ вигляду (2) м. н. за t. Для функції f вигляду (2) і $t \in [0,1]$ також позначимо

$$M_f(r,t) = \max\{|f(z,t)| \colon |z_1| = r_1, \cdots, |z_p| = r_p\}.$$

Послідовність $X = (X_n(t)), n \in \mathbb{Z}_+^p$, випадкових величин $X_n(t)$ називаємо мультиплікативною системою (МС), якщо

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\forall (n_j), n_j \in \mathbb{Z}_+^p, n_j \neq n_s (s \neq j) \colon\ \mathbf{M}(X_{n_1} X_{n_2} \cdots X_{n_k}) = 0,$$

де $\mathbf{M}\xi$ – математичне сподівання випадкової величини ξ.

У випадку, коли $X = \mathcal{R} = (R_n(t))$ є послідовністю Радемахера, тобто $R_n(t) = \operatorname{sign} \sin(2^n \pi t)$, $n \geqslant 0$, в [8] П. Леві довів (*ефект Леві*), що для кожної цілої функції $f \in \mathcal{A}^1(\mathbb{C})$, за деяких додаткових припущень щодо регулярності зростання $\ln M_f(r)$, для кожної функції $f(z,t) \in \mathcal{K}(f, \mathcal{R})$ нерівність $\ln M_f(r,t) \leqslant \mu_f(r) \ln^{1/4+\varepsilon} \mu_f(r)$ виконується м.н. при $r \to +\infty$ зовні деякої виняткової множини скінченної логарифмічної міри. Зауважимо, що $\mathcal{R} = (R_n(t))$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин таких, що $P\{t \colon R_n(t) = \pm 1\} = 1/2$. Пізніше П. Ердеш і А. Реньї [19] довели цей результат без додаткових умов на регулярність зростання $\ln M_f(r)$ і зауважили, що їхній результат також правильний у класі $\mathcal{K}(f, H)$, де $H = (e^{2\pi i \omega_n(t)})$ послідовність Штейнгауза, тобто $(\omega_n(t))$ — послідовність незалежних рівномірно розподілених на $[0,1]$ випадкових величин $\omega_n(t) \colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Це твердженння також правильне для класу $\mathcal{K}(f, X)$, де $X = (X_n(t))$ є мультиплікативною системою (МС) комплекснозначних випадкових ввеличин рівномірно обмеженою числом 1 ([20, 21]), тобто, $|X_n(t)| \leqslant 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ м.н. за $t \in [0,1]$. М. Стіл [5] довів подібні твердження у випадку $X = (e^{2\pi i \theta_n t})$, де (θ_n) — послідовність Адамара, тобто така послідовність натуральних чисел, що $\theta_{n+1}/\theta_n \geqslant q > 1$ $(n \geqslant 0)$. Зауважимо, що у випадку $q \geqslant 2$ послідовність $X = (e^{2\pi i \theta_n t})$ утворює комплекснозначну МС, бо у цьому випадку $(\cos \theta_n t)$, $(\sin \theta_n t)$ є МС, але у випадку $q > 1$ послідовність випадкових величин $(\cos \theta_n t)_{n \in \mathbb{Z}_+^p}$ може не бути МС (наприклад, див. [25]).

Проф. Й. В. Островський (1995) сформулював таке питання: *який найкращий опис величини виняткової множини E у нерівності Вімана*? Це ж питання було розглянуто в багатьох статтях (наприклад, див. [9, 6, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]) стосовно величин виняткових множин у багатьох інших співвідношеннях, що розглядаються у теорії Вімана-Валірона. У [6, 4, 7] отримано аналог нерівності Вімана, що виконується зовні виняткової множини E скінченної h-логарифмічної міри. У [7] доведено, що для кожної аналітичної функції $f \in \mathcal{A}^1(\mathbb{D}_R)$ у крузі $\mathbb{D}_R = \{z\colon |z| < R\}$, $0 < R \leqslant +\infty$ і для кожної додатної неспадної на $(0, R)$ функції $h(r)$ такої, що $h(r) \geqslant 2$ $(r \in (0, R))$ нерівність

$$M_f(r) \leqslant h(r)\mu_f(r)\big(\ln h(r)\ln(h(r)\mu_f(r))\big)^{1/2+\delta} \tag{3}$$

виконується для $r \in (r_0, R)$ зовні виняткової множини $E = E_f(\varepsilon, h)$ скінченної h-логарифмічної міри, тобто $\int\limits_{E\cap(r_0,R)} h(r)d\ln r < +\infty$. Раніше у [6] доведено, що оцінка

$$\int\limits_{E} \frac{\ln^{1/2}\mu_f(r)}{r}dr < +\infty$$

величини виняткової множини E у нерівності Вімана для цілих функцій виконується майже напевно у деякому ймовірнісному сенсі; зрозуміло, що тут $h(r) = \ln^{1/2}\mu_f(r)$. З іншого боку, опис виняткової множини у цьому твердженні для конкретної цілої функції f не можна істотно покращити. А саме ([4, 6]), для кожного $\varepsilon > 0$ існує ціла функція f і множина $E \subset [1, +\infty)$ такі, що для всіх $r \in E$

$$M_f(r) \geq \mu_f(r)(\ln\mu_f(r))^{1/2+\varepsilon} \quad \text{і} \quad \int\limits_{E} \frac{(\ln\mu_f(r))^{1/2+\varepsilon}}{r}\,dr = +\infty.$$

У випадку аналітичних функцій у крузі $\mathbb{D}_1$ і $h(r) = 1/(1-r)$, з нерівності (3) випливає аналог Кеварі нерівності Вімана (див. [17, 18]). У [22, 23, 24] встановлено наявність ефекту Леві у випадку нерівності Вімана й аналогів Кеварі нерівності Вімана для різних класів випадкових цілих і аналітичних в одиничному крузі функцій від однієї змінної, відповідно.

У 1996 р. під час доповіді П. В. Філевича на Львівському семінарі з теорії аналітичних функцій професори А. А. Гольдберг і М. М. Шеремета поставили таке питання (див. [25, 27]): *чи виконується ефект Леві для аналогів нерівності Вімана для функцій від багатьох комплексних змінних?* У [25] отримано позитивну відповідь на це питання у випадку нерівності Фентона [26] для цілих функцій від двох комплексних змінних. У [27] отримали позитивну відповідь на це питання для нерівності типу Вімана з [28] для цілих функцій від багатьох комплексних змінних і для аналітичних функцій від багатьох комплексних змінних в полікрузі [36]. Мета цієї статті — доведення наявності ефекту Леві у випадку нерівності типу Вімана з [16] для аналітичних функцій з швидко коливними коефіцієнтами у довільній повній кратно-круговій області (повній області Рейнгардта).

2. Позначення, означення, деякі попередні результати

Нехай $\mathcal{H}^p$ — клас функцій $h\colon |G| \to \mathbb{R}_+$ таких, що h є неспадною функцією за кожною змінною, $h(r) > 10$ для всіх $r \in |G|$ і

$$\int\limits_{\Delta_\varepsilon} \frac{h(r)dr_1\cdots dr_p}{r_1\cdots r_p} = +\infty$$

для кожного $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+$ такого, що множина Δ_ε є непорожньою в $\mathbb{R}^p_+$. Для $h \in \mathcal{H}^p$, позначимо через $\mathcal{S}_h$ клас множин $E \subset |G|$ *скінченної логарифмічної h-міри на $|G|$*, тобто таких, що існує $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+$ таке, що множина Δ_ε є непорожньою в області $|G| \subset \mathbb{R}^p_+$ і

$$\nu_h(E \cap \Delta_\varepsilon) := \int\limits_{E\cap\Delta_\varepsilon} \frac{h(r)dr_1 \cdots dr_p}{r_1 \cdots r_p} < +\infty.$$

У [16] вперше було доведено аналоги нерівності Вімана для аналітичних функцій у довільній повній кратно-круговій області. А саме, було доведено таке твердження.

Теорема 1 ([16]). *Нехай $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$, $h \in \mathcal{H}^p$. Тоді для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+$, $\delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in \Delta_\varepsilon \setminus E$ виконується нерівність*

$$M_f(r) \leqslant \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{2}} \ln^{\frac{p}{2}+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{2}+\delta}\big(\mu_f(r)h(r)\big) \prod_{j=1}^{p}\Bigg(\prod_{k=1,k\neq j}^{p} \ln\frac{er_k}{\varepsilon_k}\Bigg)^{\frac{1}{2}+\delta}. \tag{4}$$

Якщо область $\mathbb{G}$ — обмежена, то для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+, \delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in \Delta_\varepsilon \setminus E$

$$M_f(r) \leqslant \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{2}} \ln^{\frac{p}{2}+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{2}+\delta}\big(\mu_f(r)h(r)\big). \tag{5}$$

Деякі аналоги нерівності Вімана для цілих функцій від декількох змінних можна знайти у статтях [32, 30, 29, 28, 26, 33, 25, 31, 31, 27, 34], для аналітичних функцій у полікрузі $\mathbb{D}^p$, $p \geqslant 2$, в [35, 36]. У статті [37] доведено деякі аналоги нерівності Вімана для аналітичних функцій $f(z)$ і випадкових аналітичних функцій $f(z,t)$ у $\mathbb{G} = \mathbb{D}^\ell \times \mathbb{C}^{p-\ell}$, $\ell \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant \ell < p$, вигляду (1) і (2), відповідно, де $X = (X_n)$ — мультиплікативна система комплекснозначних випадкових величин на ймовірнісному просторі Штейнгауза, м.н. рівномірно обмежена числом 1. Також було доведено точність отриманих нерівностей. За відповідного вибору функції $h(r)$, ми отримаємо твердження про аналоги нерівності Вімана у відповідних випадках зі статей [28, 35, 36, 37].

У загальному випадку для довільної функції $h(r)$ і нерівностей (3) і (4), а також окремих випадків, отриманих з нерівності (4), питання про наявність ефекту Леві є повністю відкритим.

Нехай $Z = (Z_n(t))$ — комплекснозначна послідовність випадкових величин $Z_n(t) = X_n(t) + iY_n(t)$ така, що обидві $X = (X_n(t))$ і $Y = (Y_n(t))$ є дійсними МС. Для випадкових функцій з класу $\mathcal{K}(f, Z)$, $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$ наявність ефекту Леві доведено в [38].

Ми розглянемо клас $\mathcal{K}(f, \theta)$ аналітичних функцій вигляду (2) з $X = \theta = (e^{2\pi i\theta_n t})$, $t \in \mathbb{R}$. Тут (θ_n) — послідовність натуральних чисел така, що її впорядкування (θ^*_k) за зростанням $\{\theta_n : n \in \mathbb{Z}^p_+\} = \{\theta^*_k : k \in \mathbb{Z}_+\}, \theta^*_{k+1} > \theta^*_k$, задовольняє умову ($\theta$ — *послідовність Адамара*)

$$\theta^*_{k+1}/\theta^*_k \geqslant q > 1, k > 0. \tag{6}$$

Як ми вже зазначали вище, у випадку $q \geqslant 2$ система $X = \theta = (e^{2\pi i\theta_n t})$ є МС, а за умови $q > 1$ послідовність випадкових величин $(\cos\theta_n t)_{n\in\mathbb{Z}^p_+}$ може не бути МС. Тому природно виникає питання: *чи виконується ефект Леві для класу $\mathcal{K}(f, \theta)$ з*

$f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$ і довільною послідовністю (θ_n), впорядкування якої за зростанням (θ_k^*) є послідовністю Адамара?

Основний результат цієї статті міститься у такій теоремі.

Теорема 2. *Нехай $\theta = (\theta_n)_{n\in\mathbb{Z}_+^p}$ — послідовність натуральних чисел, яка задовольняє умову (6), $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$, $h \in \mathcal{H}^p$.*

a) Тоді майже напевно для $t \in \mathbb{R}$ і для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^p, \delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in \Delta_\varepsilon \setminus E$ виконується нерівність

$$M_f(r,t) \leqslant \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+1+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{4}+\delta}\big(\mu_f(r)h(r)\big) \prod_{j=1}^{p}\Big(\prod_{k=1,k\neq j}^{p} \ln\frac{er_k}{\varepsilon_k}\Big)^{\frac{1}{4}+\delta}. \tag{7}$$

b) Якщо область $\mathbb{G}$ обмежена, то майже напевно для $t \in \mathbb{R}$ для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^p$, $\delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in \Delta_\varepsilon \setminus E$ нерівність

$$M_f(r,t) \leqslant \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+1+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{4}+\delta}\big(\mu_f(r)h(r)\big). \tag{8}$$

Для доведення цієї теореми нам будуть порібні такі леми.

Лема 1 ([5]). *Нехай $\theta = (\theta_n)_{n\in\mathbb{Z}_+^p}$ — послідовність натуральних чисел, яка задовольняє умову (6). Тоді існують такі константи A_q і B_q (залежні лише від q), що для будь-яких $\{b_k \colon 1 \leqslant k \leqslant N\} \subset \mathbb{C}$ і $\lambda > 0$ маємо*

$$P\Big\{t\colon \Big|\sum_{k=1}^{N} b_k e^{2\pi i\theta_k^* t}\Big| \geqslant A_q\lambda S_N\Big\} \leqslant B_q e^{-\lambda^2},$$

де $S_N^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^2$.

Лема 2 ([39]). *Нехай $\theta = (\theta_n)_{n\in\mathbb{Z}_+^p}$ — послідовність натуральних чисел, яка задовольняє умову (6). Тоді для будь-якого $\beta > 0, p \geqslant 1$ існує $A = A_{\beta pq}$ така, що для кожного $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant p$ і $\{c_n \colon n \in \mathbb{Z}_+^p\} \subset \mathbb{C}$ отримаємо*

$$P\Big\{t\colon \max\Big\{\Big|\sum_{\|n\|=0}^{N} c_n \exp\Big\{\sum_{s=1}^{p} in_s\psi_s + 2\pi i\theta_n t\Big\}\Big| \colon \psi \in [0,2\pi]^p\Big\} \geqslant A_{\beta p} S_N \ln^{1/2} N\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(5\pi+1)^p B}{N^\beta},$$

де $S_N^2 = \sum\limits_{\|n\|=0}^{N} |c_n|^2$, $A = \sqrt{\beta + \frac{p}{2}(3+p)}A_q + 1$ та $B = B_q$ — сталі з леми 1.

Лема 3 ([16]). *Нехай $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$, $h \in \mathcal{H}^p$. Тоді для $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^p, \delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in \Delta_\varepsilon \setminus E$ матимемо*

$$r_j \frac{\partial}{\partial r_j} \ln \mathfrak{M}_f(r) \leqslant h(r) \ln^{1+\delta} \mathfrak{M}_f(r) \prod_{k=1,k\neq j}^{p} \ln^{1+\delta}\Big(\frac{er_k}{\varepsilon_k}\Big), \quad j \in \{1,\dots,p\}. \tag{9}$$

Доведення теореми 2. Схема доведення в загальних рисах повторює схему міркувань зі статей [27, 36]. Для $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 11$ і $l \in \mathbb{Z}$ таких, що $k > -l$ позначимо

$$G_{kl} = \Big\{ r = (r_1, \dots, r_p) \in |G| \colon k \leqslant \ln h(r) \leqslant k+1,\ l \leqslant \ln \mu_f(r) \leqslant l+1 \Big\},$$

$$G_{kl}^{+} = \bigcup_{i=k}^{+\infty} \bigcup_{j=l}^{+\infty} G_{ij}.$$

Зауважимо, що множина

$$E_0 = \Big\{ r \in |G| \colon \ln h(r) + \ln \mu_f(r) < 1 \Big\} = \Big\{ r \in |G| \colon \mu_f(r) h(r) < e \Big\} \in \mathcal{S}_h.$$

З леми 3 випливає, що існує множина $E_1 \supset E_0, E_1 \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in |G| \setminus E_1$ отримаємо

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \|n\| \cdot |a_n| r^n \leqslant h(r) \mathfrak{M}_f(r) \ln^{1+\delta} \mathfrak{M}_f(r) \cdot \sum_{j=1}^{p} \Bigg(\prod_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{p} \ln^{1+\delta} \frac{e r_k}{\varepsilon_k} \Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant p h(r) \mu_f(r) (h(r))^{\frac{p+1}{2}} \ln^{\frac{p}{2}+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{2}+\delta} \{\mu_f(r) h(r)\} \Bigg(\prod_{j=1}^{p} \ln \frac{e r_j}{\varepsilon_j} \Bigg)^{\frac{p-1}{2}+\delta} \times$$

$$\times \Bigg[\ln \mu_f(r) + \frac{p+1}{2} \ln h(r) + \Big(\frac{p}{2} + \delta\Big) \ln \ln h(r) + \Big(\frac{p}{2} + \delta\Big) \ln \ln \Big\{ \mu_f(r) h(r) \Big\} +$$

$$+ \Big(\frac{p-1}{2} + \delta \Big) \sum_{j=1}^{p} \ln \ln \frac{e r_j}{\varepsilon_j} \Bigg]^{1+\delta} \Bigg(\prod_{j=1}^{p} \ln \frac{e r_j}{\varepsilon_j} \Bigg)^{1+\delta} \leqslant$$

$$\leqslant \mu_f(r) (h(r))^{\frac{p+3}{2}+2\delta} \ln^{\frac{p}{2}+1+\delta} \{\mu_f(r) h(r)\} \Bigg(\prod_{k=1}^{p} \ln \frac{e r_k}{\varepsilon_k} \Bigg)^{\frac{p+1}{2}+2\delta}.$$

Тоді

$$\sum_{\|n\| \geqslant d} |a_n| r^n \leqslant \sum_{\|n\| \geqslant d} \frac{\|n\|}{d} |a_n| r^n \leqslant \frac{1}{d} \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \|n\| |a_n| r^n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{d} \mu_f(r) (h(r))^{\frac{p+3}{2}+2\delta} \ln^{\frac{p}{2}+1+\delta} \{\mu_f(r) h(r)\} \Bigg(\prod_{k=1}^{p} \ln \frac{e r_k}{\varepsilon_k} \Bigg)^{\frac{p+1}{2}+2\delta} \leqslant \mu_f(r),$$

$$d = d(r) = (h(r))^{\frac{p+3}{2}+2\delta} \ln^{\frac{p}{2}+1+\delta} \{\mu_f(r) h(r)\} \Bigg(\prod_{k=1}^{p} \ln \frac{e r_k}{\varepsilon_k} \Bigg)^{\frac{p+1}{2}+2\delta}.$$

Позначимо

$$G_{kl}^{*} = G_{kl} \setminus E_2,\ I = \{(i; j) \colon G_{ij}^{*} \neq \varnothing\},\ E_2 = E_1 \cup \Bigg(\bigcup_{(i,j) \notin I} G_{ij} \Bigg).$$

Отже, $\# I = +\infty$.

Виберемо послідовність $r^{(k,l)} \in G^*_{kl}$ для $(k,l) \in I$ таку, що $\mu_f(r^{(k,l)}) = \min\limits_{r\in G^*_{kl}} \mu_f(r)$. Для всіх $r \in G^*_{kl}$ матимемо

$$\frac{1}{e}\mu_f(r^{(k,l)}) \leqslant \mu_f(r) \leqslant e\mu_f(r^{(k,l)}), \tag{10}$$

$$\frac{1}{e}h(r^{(k,l)}) \leqslant h(r) \leqslant eh(r^{(k,l)}), \tag{11}$$

$$\frac{1}{e^2}\mu_f(r^{(k,l)})h(r^{(k,l)}) \leqslant \mu_f(r)h(r^{(k,l)}) \leqslant e^2\mu_f(r^{(k,l)})h(r^{(k,l)}) \tag{12}$$

та

$$\bigcup_{(k,l)\in I} G^*_{kl} = \bigcup_{(k,l)\in I} G_{kl} \setminus E_1 = \bigcup_{k,l=1}^{+\infty} G_{kl} \setminus E_1 = |G| \setminus E_1.$$

Нехай $N_{kl} = [2d_1(r^{(k,l)})]$, де $[x]$ — ціла частина числа x і

$$d_1(r) = (eh(r))^{\frac{p+3}{2}+2\delta} \ln^{\frac{p}{2}+1+\delta}\{e^2\mu_f(r)h(r)\}\Big(\prod_{k=1}^{p} \ln\frac{e^2 r_k}{\varepsilon_k}\Big)^{\frac{p+1}{2}+2\delta}.$$

Для $r \in G^*_{kl}$ позначимо

$$W_{N_{kl}}(r,t) = \max\Big\{\Big|\sum_{\|n\|\leqslant N_{kl}} a_n r_1^{n_1}\dots r_p^{n_p} e^{in_1\psi_1+\ldots+in_p\psi_p} X_n(t)\Big| : \psi \in [0,2\pi]^p\Big\}.$$

Для вимірних за Лебегом множин $G \subset G^*_{kl}$ і для $(k,l) \in I$ позначимо

$$\nu_{kl}(G) = \frac{\mathrm{meas}_p(G)}{\mathrm{meas}_p(G^*_{kl})},$$

де meas_p означає міру Лебега на $\mathbb{R}^p$.

Тоді ν_{kl} — ймовірнісна міра, визначена на сім'ї вимірних за Лебегом підмножинах G^*_k ([27]). Нехай $\Omega = \bigcup\limits_{(k,l)\in I} G^*_{kl}$ і

$$k_i, l_{i,j} \colon (k_i, l_{i,j}) \in I,\ k_i < k_{i+1},\ l_{i,j} < l_{i,j+1},\ \forall i,j \in \mathbb{Z}_+.$$

Для вимірних за Лебегом підмножин G з Ω позначимо

$$\nu(G) = 2^{k_0}\sum_{i=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{2^{k_i}}\Big(1-\Big(\frac{1}{2}\Big)^{k_{i+1}-k_i}\Big)\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{N_i}\frac{2^{l_{i,0}}}{2^{l_{i,j}}}\frac{\Big(1-\Big(\frac{1}{2}\Big)^{l_{i,j+1}-l_{i,j}}\Big)}{1-\big(\frac{1}{2}\big)^{l_{i,N_{i+1}}+l_{i,0}}}\nu_{k_{i+1}l_{i+1,j+1}}(G\cap G^*_{k_{j+1}l_{i+1,j+1}})\Big), \tag{13}$$

де $N_i = \max\{j\colon (k_i, l_{ij}) \in I\}$. Тоді $\nu_{k_{j+1}l_{j+1}}(G^*_{k_{j+1}l_{j+1}}) = \nu(\Omega) = 1$.

Тому ν є ймовірнісною мірою, яка визначена на вимірних підмножинах Ω. На $\Omega_0 := [0,1]\times\Omega$ визначимо ймовірнісну міру $P_0 = P\otimes\nu$, яка є прямим добутком ймовірнісних мір P і ν. Для $(k;l) \in I$ позначимо

$$F_{kl} = \{(t,r) \in [0,1]\times\Omega\colon W_{N_{kl}}(r,t) > A_p S_{N_{kl}}(r)\ln^{1/2} N_{kl}\},$$
$$F_{kl}(r) = \{t \in [0,1]\colon W_{N_{kl}}(r,t) > A_p S_{N_{kl}}(r)\ln^{1/2} N_{kl}\},$$

де $S^2_{N_{kl}}(r) = \sum\limits_{\|n\|=0}^{N_{kl}} |a_n|^2 r^{2n}$ і A_p — стала з леми 1 з $\beta = 1$. З теореми Фубіні і леми 1 з $c_n = a_n r^n$ і $\beta = 1$ випливає, що для $(k,l) \in I$

$$P_0(F_{kl}) = \int\limits_{\Omega} \Bigg(\int\limits_{F_{kl}(r)} dP \Bigg) d\nu = \int\limits_{\Omega} P(F_{kl}(r)) d\nu \leqslant \frac{(5\pi+1)^p B}{N_{kl}} \nu(\Omega) = \frac{(5\pi+1)^p B}{N_{kl}}.$$

Зауважимо, що

$$N_{kl} > (h(r))^{\frac{p+3}{2}} \ln^{\frac{p}{2}+1+\delta}\{\mu_f(r)h(r)\} \prod_{k=1}^{p} \ln^{\frac{p+1}{2}} \frac{er_k}{\varepsilon_k} > e^{2k}(l+k)^{2+2\delta}.$$

Тоді

$$\sum_{(k,l)\in I} P_0(F_{kl}) \leqslant \sum_{k=11}^{+\infty} \sum_{l=-k+1}^{+\infty} \frac{(5\pi+1)^p B}{e^{2k}(l+k)^{2+2\delta}} < +\infty.$$

Звідси, за лемою Бореля-Кантеллі з ймовірністю, що дорівнює одиниці, серед подій $\{F_{kl}\colon (k,l) \in I\}$ відбувається щонайбільше скінченна кількість подій. Тому

$$P_0(F) = 1, \quad F = \bigcup_{s=1}^{+\infty} \bigcup_{m=1}^{+\infty} \bigcap_{\substack{k \geqslant s,\ l \geqslant m \\ (k,l)\in I}} \overline{F_{kl}} \subset [0,1] \times \Omega.$$

Для кожної точки $(t,r) \in F$ існують $k_0 = k_0(t,r)$ і $l_0 = l_0(t,r)$ такі, що для всіх $k \geqslant k_0$, $l \geqslant l_0$, $(k,l) \in I$ виконується нерівність

$$W_{N_{kl}}(r,t) \leqslant A_p S_{N_{kl}}(r) \ln^{1/2} N_{kl}.$$

Нехай $F_\Omega = \{r \in \Omega\colon (\exists t)[(t,r) \in F]\}$. Тоді $\nu(F_\Omega) = 1$. Подібно для проекції F на $[0,1]$ $F_{[0,1]} = \{t \in [0,1]\colon (\exists r)[(t,r) \in F]\}$ маємо $P(F_{[0,1]}) = 1$.

Нехай далі $F^\wedge(t) = \{r \in \Omega : (t,r) \in F\}$. Як і в [27, 36] маємо, що за теоремою Фубіні

$$0 = \int\limits_{\Omega_0} (1 - \chi_F) dP_0 = \int\limits_0^1 \Bigg(\int\limits_{\Omega} (1 - \chi_{F^\wedge(t)}) d\nu \Bigg) dP.$$

Тому, P-майже скрізь $0 = \int\limits_{\Omega} (1 - \chi_{F^\wedge(t)}) d\nu = 1 - \nu(F^\wedge(t))$, звідки $\exists F_1 \subset F_{[0,1]}$, $P(F_1) = 1$, така, що $\nu(F^\wedge(t)) = 1$ для кожного $t \in F_1$.

Для кожних $t \in F_1$([27, 36]) і $(k,l) \in I$ виберемо точку $r_0^{(k,l)}(t) \in G^*_{kl}$ так, що

$$W_{N_{kl}}(r_0^{(k,l)}(t), t) \geqslant \frac{3}{4} M_{kl}(t),\ M_{kl}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{W_{N_{kl}}(r,t)\colon r \in G^*_{kl}\}.$$

Тоді з $\nu_{kl}\big(F^\wedge(t) \cap G^*_{kl}\big) = 1$ для всіх $(k,l) \in I$, випливає, що існує точка $r^{(k,l)}(t) \in G^*_{kl} \cap F^\wedge(t)$ така, що

$$|W_{N_{kl}}(r_0^{(k,l)}(t), t) - W_{N_{kl}}(r^{(k,l)}(t), t)| < \frac{1}{4} M_{kl}(t),$$

звідки

$$\frac{3}{4}M_{kl}(t) \leqslant W_{N_{kl}}(r_0^{(k,l)}(t),t) \leqslant W_{N_{kl}}(r^{(k,l)}(t),t) + \frac{1}{4}M_{kl}(t).$$

Оскільки $(t, r^{(k,l)}(t)) \in F$, то з нерівності (13) маємо

$$\frac{1}{2}M_{kl}(t) \leqslant W_{N_{kl}}(r^{(k,l)}(t),t) \leqslant A_p S_{N_{kl}}(r^{(k,l)}(t)) \ln^{1/2} N_{kl}.$$

Тепер для $r^{(k,l)} = r^{(k,l)}(t)$ одержимо

$$S_{N_{kl}}^2(r^{(k,l)}) \leqslant \mu_f(r^{(k,l)})\mathfrak{M}_f(r^{(k,l)}) \leqslant$$
$$\leqslant \mu_f^2(r^{(k,l)})(h(r^{(k,l)}))^{\frac{p+1}{2}} \ln^{\frac{p}{2}+\delta} h(r^{(k,l)})\times$$
$$\times \ln^{\frac{p}{2}+\delta}\{\mu_f(r^{(k,l)})h(r^{(k,l)})\}\Big(\prod_{j=1}^{p} \ln \frac{er_j^{(k,l)}}{\varepsilon_j}\Big)^{\frac{p-1}{2}+\delta}.$$

Звідси, для $t \in F_1$ і всіх $k \geqslant k_0(t)$, $l \geqslant l_0(t)$, отримаємо

$$S_N(r^{(k,l)}) \leqslant \mu_f(r^{(k,l)})(h(r^{(k,l)}))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+\frac{\delta}{2}} h(r^{(k,l)})\times$$
$$\times \ln^{\frac{p}{4}+\frac{\delta}{2}}\{\mu_f(r^{(k,l)})h(r^{(k,l)})\}\Big(\prod_{j=1}^{p} \ln \frac{er_j^{(k,l)}}{\varepsilon_j}\Big)^{\frac{p-1}{4}+\frac{\delta}{2}}.$$

З (10)–(12) випливає, що $d_1(r^{(k,l)}) \geqslant d(r)$ для $r \in G_{kl}^*$. Тоді для $t \in F_1$, $r \in F^\wedge(t) \cap G_{kl}^*$, $(k,l) \in I$, $k \geqslant k_0(t), l \geqslant l_0(t)$ виконується нерівність

$$M_f(r,t) \leqslant \sum_{\|n\| \geqslant 2d_1(r^{(k,l)})} |a_n| r^n + W_{N_{kl}}(r,t) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\|n\| \geqslant 2d(r)} |a_n| r^n + M_{kl}(t).$$

Отож для $t \in F_1$, $r \in F^\wedge(t) \cap G_{kl}^*$, $l \geqslant l_0(t)$ і $k \geqslant k_0(t)$ матимемо

$$M_f(r^{(k,l)},t) \leqslant \mu_f(r^{(k,l)}) + 2A_p S_{N_{kl}}(r^{(k,l)}) \ln^{1/2} N_{kl} \leqslant \mu_f(r^{(k,l)}) +$$
$$+2A_p\mu_f(r^{(k,l)})(h(r^{(k,l)}))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+\frac{\delta}{2}} h(r^{(k,l)})\times$$
$$\times \ln^{\frac{p}{4}+\frac{\delta}{2}}\{\mu_f(r^{(k,l)})h(r^{(k,l)})\}\Big(\prod_{j=1}^{p} \ln \frac{er_j^{(k,l)}}{\varepsilon_j}\Big)^{\frac{p-1}{4}+\frac{\delta}{2}}\times$$
$$\times\Big[\Big(\frac{p+3}{2}+2\delta\Big)\ln(eh(r^{(k,l)})) + \Big(\frac{p}{2}+1+2\delta\Big)\ln\ln\{e^2\mu_f(r^{(k,l)})h(r^{(k,l)})\}+$$
$$+\Big(\frac{p+1}{2}+2\delta\Big)\sum_{j=1}^{n} \ln\ln \frac{er_j^{(k,l)}}{\varepsilon_j}\Big].$$

Для $t \in F_1$, $r \in F^\wedge(t) \cap G_{kl}^*$, $k \geqslant k_0(t)$ і $l \geqslant l_0(t)$

$$M_f(r,t) \leqslant \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+1+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{4}+\delta}\{\mu_f(r)h(r)\}\Big(\prod_{k=1}^{p} \ln \frac{er_k}{\varepsilon_k}\Big)^{\frac{p-1}{4}+\delta}.$$

Тому попередня нерівність виконується м.н. ($t \in F_1$, $P(F_1) = 1$) для всіх

$$r \in \Big(\bigcup_{(k,l)\in I} (G^*_{kl} \cap F^\wedge(t)) \cap G^+_{kl}\Big) \setminus E^* = ([0;1)^p \cap G^+_{kl}) \setminus (E^* \cup G^* \cup E_1) = [0;1)^p \setminus E_2,$$

де

$$G^+_{kl} = \bigcup_{i=k}^{+\infty} \bigcup_{j=l}^{+\infty} G_{kl},\ E_2 = E_1 \cup G^* \cup E^*,\ G^* = \bigcup_{(k,l)\in I} (G^*_{kl} \setminus F^\wedge(t)).$$

Залишається зауважити, що для $\nu(G^*)$ виконується рівність

$$\nu(G^*) = \sum_{(k,l)\in I} (\nu_{kl}(G^*_{kl}) - \nu_{kl}(F^\wedge(t))) = 0.$$

Для всіх $(k,l) \in I$ маємо

$$\nu_{kl}(G^*_{kl} \setminus F^\wedge(t)) = \frac{\mathrm{meas}_p(G^*_{kl} \setminus F^\wedge(t))}{\mathrm{meas}_p(G^*_{kl})} = 0,$$
$$\mathrm{meas}_p(G^*_{kl} \setminus F^\wedge(t)) = \int\limits_{G^*_{kl}\setminus F^\wedge(t)} \cdots \int h(r)dr_1 \dots dr_p = 0.$$

□

Зауваження 1 (див. також [38]). Точність нерівності (7) доведено:

1) у випадку $\mathbb{C}^p$ з $h(r_1,\dots,r_p) \equiv 10$, $p \in \mathbb{N}, p > 1$, в [27];
2) у випадку $\mathbb{D}^p$ з $h(r_1,\dots,r_p) = r_1 \cdot \ldots \cdot r_p \cdot \big((1-r_1)\cdot \ldots \cdot (1-r_p)\big)^{-1}$, $p \in \mathbb{N}, p > 1$, в [36];
3) у випадку $\mathbb{D}^\ell \times \mathbb{C}^{p-\ell}$ з $h(r_1,\dots,r_p) = r_1 \cdot \ldots \cdot r_\ell \cdot \big((1-r_1)\cdot \ldots \cdot (1-r_\ell)\big)^{-1}$, $\ell \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant \ell < p$, $p \in \mathbb{N}$, в [37].

Проблема 1. Питання стосовно точності нерівностей (3) і (7) у довільній фіксованій повній області Рейнхарда з довільною функцією $h \in \mathcal{H}^p$ є відкритим.

Список використаної літератури

1. G. Valiron, *Functions analytiques*, Press Univer. de France, Paris, 1954.
2. H. Wittich, *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.
3. P. C. Rosenbloom, *Probability and entire functions*, Stud. Math. Anal. and Related Topics, Calif. Univ. Press., Stanford, 1962, p. 325–332.
4. О. Б. Скасків, П. В. Філевич, *Про величину виняткової множини в теоремі Вімана*, Мат. Студії **12** (1999), no. 1, 31–36.
5. J. M. Steele, *Sharper Wiman inequality for entire functions with rapidly oscillating coefficients*, J. Math. Anal. Appl. **123** (1987), no. 2, 550–558. DOI: 10.1016/0022-247X(87)90329-5
6. О. Б. Скасків, О. В. Зрум, *On an exeptional set in the Wiman inequalities for entire functions*, Мат. Студії **21** (2004), no. 1, 13–24.
7. A. O. Kuryliak and O. B. Skaskiv, *Wiman's type inequality for analytic and entire functions and h-measure of an exceptional sets*, Carpathian Math. Publ. **12** (2020), no. 2, 492–498. DOI: 10.15330/cmp.12.2.492-498

8. P. Lévy, *Sur la croissance de fonctions entière*, Bull. Soc. Math. France, **58** (1930) 29–59; 127–149. DOI: 10.24033/bsmf.1157; DOI: 10.24033/bsmf.1162
9. W. Bergweiler, *On meromorphic function that share three values and on the exceptional set in Wiman-Valiron theory*, Codai. Math. J., **13** (1990) no. 1, 1–9. DOI: 10.2996/kmj/1138039154
10. T. M. Salo, O. B. Skaskiv, and O. M. Trakalo *On the best possible description of exeptional set in Wiman-Valiron theory for entire function*, Мат. Студії **16** (2001), no. 2, 131–140.
11. О. Б. Скасків, О. М. Тракало, *Про виняткову множину у співвідношенні Бореля для цілих подвійних рядів Діріхле*, Мат. Студії **15** (2001), no. 2, 163–172.
12. П. В. Філевич, *Точна оцінка величини виняткової множини у співвідношенні Бореля для цілих функцій*, Укр. мат. журн. **53** (2001), no. 2, 286–288; **English version**: P. V. Filevych, *An exact estimate for the measure of the exceptional set in the Borel relation for entire functions*, Ukr. Math. J. **53** (2001), no. 2, 328–332. DOI: 10.1023/A:1010489609188
13. О. Б. Скасків, О. М. Тракало, *Точна оцінка виняткової множини у співвідношенні Бореля для цілих функцій від декількох змінних*, Мат. Студії **18** (2002), no. 1, 53–56.
14. O. B. Skaskiv and D. Yu. Zikrach, *On the best possible description of an exceptional set in asymptotic estimates for Laplace–Stieltjes integrals*, Мат. Студії **35** (2011), no. 2, 131–141.
15. T. M. Salo, O. B. Skaskiv, *Minimum modulus of lacunary power series and h-measure of exceptional sets*, Уфимск. матем. журн. **9** (2017), no. 4, 137–146; **Reprinted version**: T. M. Salo, O. B. Skaskiv, *Minimum modulus of lacunary power series and h-measure of exceptional sets*, Ufa Math. J. **9** (2017), no. 4, 135–144 DOI: 10.13108/2017-9-4-135
16. A. O. Kuryliak and O. B. Skaskiv, *Wiman's type inequality in multiple-circular domain*, Axioms, **10** (2021), no. 4, Article ID: 348. DOI: 10.3390/axioms10040348
17. T. Kővari, *On the maximum modulus and maximal term of functions analytic in the unit disc*, J. London Math. Soc., **41** (1966), 129–137. DOI: 10.1112/jlms/s1-41.1.129
18. Н. М. Сулейманов, *Оценки типа Вимана–Валирона для степенных рядов с конечным радиусом сходимости и их точность*, Докл. АН СССР **253** (1980), no. 4, 822–824.
19. P. Erdős and A. Rényi, *On random entire function*, Zastosow. Mat. **10** (1969), 47–55. DOI: 10.4064/am-10-1-47-55
20. П. В. Філевич, *Деякі класи цілих функцій, в яких майже напевне можна покращити нерівність Вімана-Валірона*, Мат. Студії **6** (1996) 59–66.
21. P. V. Filevych, *The Baire categories and Wiman's inequality for entire functions*, Мат. Студії **20** 2003), no. 2, 215–221.
22. О. Б. Скасків, *Випадкові лакунарні степеневі ряди і нерівність Вімана*, Мат. Студії **30** (2008), no. 1, 101–106.
23. О. Б. Скасків, А. О. Куриляк, *Прямі аналоги нерівності Вімана для функцій аналітичних в одиничному круз*, Carpathian Math. Publ., **2** (2010), no. 1, 109–118.
24. A. O. Kuryliak, O. B. Skaskiv, and I. E. Chyzhykov *Baire categories and Wiman's inequality for analytic functions*, Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Sér. Rech. Déform. **62** (2012), no. 3, 17–33.
25. О. В. Зрум, О. Б, Скасків, *Про нерівність Вімана для випадкових цілих функцій від двох змінних*, Мат. Студії **23** (2005), no. 2, 149–160.
26. P. C. Fenton, *Wiman–Valiron theory in two variables*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), no. 11, 4403–4412. DOI: 10.1090/S0002-9947-1995-1308010-X
27. A. O. Kuryliak, O. B. Skaskiv, and O. V. Zrum, *Lévy's phenomenon for entire functions of several variables*, Уфимск. матем. журн. **6** (2014), no. 2, 113–122; **Reprinted version**: A. O. Kuryliak, O. B. Skaskiv, and O. V. Zrum, *Lévy's phenomenon for entire functions of several variables*, Ufa Math. J. **6** (2014), no. 2, 111–120. DOI: 10.13108/2014-6-2-111

28. J. Gopala Krishna and I. H. Nagaraja Rao, *Generalised inverse and probability techniques and some fundamental growth theorems in* $\mathbb{C}^k$, J. Indian Math. Soc., New Ser. **41** (1977), 203–219.
29. A. Schumitzky, *Wiman-Valiron theory for functions of several complex variables*, Ph.D. Dissertation, Ithaca, Cornell Univ., 1965.
30. A. Schumitzky, *A probabilistic approach to the Wiman-Valiron theory for entire functions of several complex variables*, Complex Variables, Theory Appl. **13** (1989), no. 1–2, 85–98. DOI: 10.1080/17476938908814380
31. A. O. Kuryliak and O. B. Skaskiv, *Wiman's type inequalities without exceptional sets for random entire functions of several variables*, Мат. Студії **38** (2012), no. 1, 35–50.
32. И. Ф. Битлян, А. А. Гольдберг, *Теорема Вімана-Валерона для целых функций многих комплексных переменных*, Вестник Ленинград. гос. ун-та, серия мех., мат. и астр. **13** (1959), 27–41.
33. О. Б, Скасків, О.М. Тракало, *Класична нерівність Вімана для кратних рядів Діріхле*, Мат. методи фіз.-мат. поля **43** (2000), no. 3, 34–39.
34. A. O. Kuryliak, S. I. Panchuk, and O. B. Skaskiv, *Gol'dberg type inequality for entire functions and diagonal maximal term*, Мат. Студії **54** (2020), no. 2, 135–145. DOI: 10.30970/ms.54.2.135-145
35. А. О. Куриляк, О. Б. Скасків, Л. О. Шаповаловська, *Нерівність типу Вімана для аналітичних у полікрузі функцій*, Укр. мат. журн. **68** (2016), no. 1, 78–86; **English version**: A. O. Kurylyak, O. B. Skaskiv, and L. O. Shapovalovs'ka, *Wiman's type inequality for analytic functions in the polydisc*, Ukr. Mat. J. **68** (2016), no. 1, 78–86. DOI: 10.1007/s11253-016-1210-9
36. A. Kuryliak, O. Skaskiv, and S. Skaskiv, *Lévy's phenomenon for analytic functions on a polydisk*, Eur. J. Math. **6** (2020), no. 1, 138–152. DOI: 10.1007/s40879-019-00363-2
37. A. Kuryliak and V. Tsvigun, *Wiman's type inequality for multiple power series in the unbounded cylinder domain*, Мат. Студії **49** (2018), no. 1, 29–51. DOI: 10.15330/ms.49.1.29-51
38. А. О. Куриляк, О. Б. Скасків, *Нерівність типу Вімана в кратно-кругових областях: ефект Леві і виняткові множини*, Укр. мат. журн. **74** (2022), no. 5, 650–661. DOI: 10.37863/umzh.v74i5.7137
39. A. O. Kuryliak and L. O. Shapovalovska, *Wiman's type inequality for entire functions of several complex varibles with rapidly oscillating coefficients*, Мат. Студії **43** (2015), no. 1, 16–26. DOI: 10.15330/ms.43.1.16-26

Стаття: надійшла до редколегії 02.03.2022.
доопрацьована 02.04.2022.
прийнята до друку 22.06.2022.

WIMAN-TYPE INEQUALITY FOR POWER SERIES WITH RAPIDLY OSCILLATING COEFFICIENTS IN MULTIPLE-CIRCULAR DOMAINS

Andrii KURYLIAK, Oleh SKASKIV

Ivan Franko National University of Lviv,
1 Universytetska Str.,79000, Lviv, UKRAINE
e-mails: andriykuryliak@gmail.com, olskask@gmail.com

Let $\mathcal{A}^p(\mathbb{G})$ be the class of analytic functions f in the complete Reinhardt domain $\mathbb{G}\subset\mathbb{C}^p$ of the form $f(z)=f(z_1,\dots,z_p)=\sum\limits_{\|n\|=0}^{+\infty}a_nz^n$, with domain of convergence $\mathbb{G}$, where

$$z^n=z_1^{n_1}\dots z_p^{n_p},\ z=(z_1,\dots,z_p)\in\mathbb{G},\ n=(n_1,\dots,n_p)\in\mathbb{Z}_+^p,\ \|n\|=\sum_{j=1}^p n_j,$$

such that there exist $n\in\mathbb{N}^p\colon a_n\neq 0$. By $\mathcal{K}(f,\theta)$ we denote the class of random power series of the form

$$f(z,t)=\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}a_ne^{2\pi i\theta_n t}z^n,$$

where be class of analytic functions, where (θ_{nm}) is a sequence of positive integer such that its arrangement (θ_k^*) by increasing satisfies the condition $\theta_{k+1}^*/\theta_k^*\geqslant q>1, k>0$. For analytic functions from the $\mathcal{K}(f,\theta)$ Wiman's inequality was improved.

Key words: Reinhardt domain, Lévy's phenomenon, multiple power series, random power series. Wiman's inequality, exceptional set, rapidly oscillating coefficients.