ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2022. Випуск 93. С. 74–82
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2022. Issue 93. P. 74–82
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2022.93.074-082

УДК 517.537.6

ПРО УЗАГАЛЬНЕННЯ ДЕЯКИХ СПЕЦІАЛЬНИХ КЛАСІВ p-ЛИСТИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ АБСОЛЮТНО ЗБІЖНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ ТА РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ШАХА

Оксана ГОЛОВАТА[1], **Оксана МУЛЯВА**[2], **Мирослав ШЕРЕМЕТА**[1]

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська 1, 79001, Львів*
[2] *Національний університет харчових технологій, Володимирська 68, 01601, Київ*
e-mails: oksana.holovata@lnu.edu.ua, oksanasheremeta42@gmail.com, m.m.sheremeta@gmail.com

Досліджуючи зірковість та опуклість p-листих функцій вигляду

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} f_n z^n,$$

S. K. Lee, S. Owa і H. M. Srivastava ввели спеціальні класи $\mathbb{F}_p(\beta, \alpha)$ і $\mathbb{G}_p(\beta, \alpha)$ аналітичних в одиничному крузі $\{z\colon |z| < 1\}$ функцій і дослідили властивості функцій з цих класів. Абсолютно збіжні у лівій півплощині $\{s : \operatorname{Re} s < 0\}$ ряди Діріхле

$$F(s) = \exp\{s\lambda_1\} + \sum_{k=2}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\}, \quad s = \sigma + it,$$

зі зростаючими до $+\infty$ додатними показниками (λ_k) $(\lambda_1 > h \geq 1)$ степеневих рядів, збіжних в одиничному крузі. Для таких рядів введено аналоги класів $\mathbb{F}_p(\beta, \alpha)$ і $\mathbb{G}_p(\beta, \alpha)$, досліджено їхні властивості та зазначено застосування до вивчення властивостей розв'язків диференціального рівняння

$$w'' + (\gamma_0 e^{2hs} + \gamma_1 e^{hs} + \gamma_2) w = 0.$$

Ключові слова: ряд Діріхле, зірковість, опуклість, диференціальне рівняння.

2020 Mathematics Subject Classification: 30B50, 30D45

1. Вступ

Аналітична однолиста в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n \tag{1}$$

називається *зірковою*, якщо $f(\mathbb{D})$ — зіркова область стосовно початку координат, і називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ — опукла область. Добре відомо [1, с. 202], що умова $\mathrm{Re}\,\{zf'(z)/f(z)\} > 0$ $(z \in \mathbb{D})$ є необхідною і достатньою для зірковості функції f, а [1, с. 203] умова $\mathrm{Re}\,\{1 + zf''(z)/f'(z)\} > 0$ $(z \in \mathbb{D})$ є необхідною і достатньою для її опуклості. З огляду на ці твердження вивчення опуклості функції f можна звести до вивчення зірковості.

А. В. Гудман [2] (див. також [3, с. 9]) довів таке: якщо $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n|f_n| \le 1$, то функція (1) є зірковою. Поняття зірковості функції (1) отримало багато узагальнень. І. С. Джек [4] вивчав зіркові функції порядку $\alpha \in [0, 1)$, тобто функції (1), для яких $\mathrm{Re}\,\{zf'(z)/f(z)\} > \alpha$ $(z \in \mathbb{D})$. Доведено [4], [3, с. 13], якщо $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|f_n| \le 1-\alpha$, то функція (1) є зірковою порядку α. В. Р. Гупта [5] ввів поняття зіркової функції порядку $\alpha \in [0, 1)$ і типу $\beta \in (0, 1]$. Дещо пізніше було введено поняття p-листої зірковості та опуклості. Функція

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} f_n z^n, \quad p \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

називається (див., наприклад, [6] і [3, с. 14]) *p-листою зірковою порядку* $\alpha \in [0, p)$, якщо $\mathrm{Re}\,\{zf'(z)/f(z)\} > \alpha$ $(z \in \mathbb{D})$, і називається *p-листою опуклою порядку* $\alpha \in [0, p)$, якщо $\mathrm{Re}\,\{1 + zf''(z)/f'(z)\} > \alpha$ $(z \in \mathbb{D})$. Відомо [6], [3, с. 14], якщо

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} (n-\alpha)|f_n| \le p - \alpha,$$

то функція (2) є p-листою зірковою порядку $\alpha \in [0, p)$, а якщо

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} n(n-\alpha)|f_n| \le p(p-\alpha),$$

то вона є p-листою опуклою порядку $\alpha \in [0, p)$.

Подібні властивості різних класів функцій (2) досліджували багато авторів (зазначимо, наприклад, [7]—[12]). Зокрема, в [7] введено клас $\mathbb{F}_p(\beta, \alpha)$ таких функцій (2), що $f_n \le 0$ і $\mathrm{Re}\left\{(1-\beta)\frac{f(z)}{z^p} + \beta\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}\right\} > \alpha/p$ $\quad(z \in \mathbb{D})$, і в [8], [9] клас $\mathbb{G}_p(\beta, \alpha)$ таких функцій (2), що $f_n \le 0$ і $\mathrm{Re}\left\{(p + \beta(1-p))\frac{f'(z)}{pz^{p-1}} + \beta\frac{f''(z)}{pz^{p-2}}\right\} > \alpha$ $(z \in \mathbb{D})$, де $p \in \mathbb{N}$, $\beta \ge 0$ і $0 \le \alpha < p$.

Для абсолютно збіжних у півплощині $\Pi_0 = \{s : \operatorname{Re} s < 0\}$ рядів Діріхле

$$F(s) = \exp\{s\lambda_1\} + \sum_{k=2}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\}, \quad s = \sigma + it, \tag{3}$$

зі зростаючими до $+\infty$ додатними показниками λ_k ($\lambda_1 > h \geq 1$) геометричну теорію побудовано в [13] (див. також [3, с. 135–154]). Якщо $\sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k |f_k| \leq \lambda_1$, то функція (3) є конформною в кожній точці з Π_0. Конформна в Π_0 функція (3) називається псевдозірковою, якщо $\operatorname{Re}\{F'(s)/F(s)\} > 0$, і псевдоопуклою, якщо $\operatorname{Re}\{F''(s)/F'(s)\} > 0$ для всіх $s \in \Pi_0$. У [13] знайдено достатні умови на коефіцієнти f_k для того, щоб функція (3) була псевдозірковою чи псевдоопуклою, а отримані результати застосовано до дослідження розв'язків диференціального рівняння

$$\frac{d^2 w}{ds^2} + (\gamma_0 e^{2hs} + \gamma_1 e^{hs} + \gamma_2) w = 0. \tag{4}$$

Для рядів Діріхле ми означимо аналоги класів $\mathbb{F}_p(\beta, \alpha)$ і $\mathbb{G}_p(\beta, \alpha)$ і знайдемо умови на $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$, за яких розв'язки рівняння (4) належать до таких аналогів. Зауважимо, що рівняння (4) подібне до диференціального рівняння, яке досліджував С. М. Шах [14].

2. Означення класів та оцінки коефіцієнтів

Нехай $\lambda > 0$, $\beta \geq 0$ і $0 \leq \alpha < \lambda$. Будемо говорити, що ряд Діріхле (3) належить до класу $D\mathbb{F}_\lambda(\beta, \alpha)$, якщо $\lambda_1 = \lambda$ і

$$\operatorname{Re}\{(\lambda(1-\beta)F(s) + \beta F'(s))e^{-\lambda s}\} > \alpha \quad (s \in \Pi_0), \tag{5}$$

і належить до класу $D\mathbb{G}_\lambda(\beta, \alpha)$, якщо $\lambda_1 = \lambda$ і

$$\operatorname{Re}\left\{((1-\beta)F'(s) + \beta F''(s)/\lambda)e^{-\lambda s}\right\} > \alpha \quad (s \in \Pi_0). \tag{6}$$

Очевидно, що $F \in D\mathbb{G}_\lambda(\beta, \alpha)$ тоді і тільки тоді, коли $F'/\lambda \in D\mathbb{F}_\lambda(\beta, \alpha)$.

Теорема 1. *Для того, щоб ряд Діріхле* (3) *належав до класу* $D\mathbb{F}_\lambda(\beta, \alpha)$ *з* $\lambda = \lambda_1$ *достатньо, а у випадку, коли* $f_k \leq 0$ *для всіх* $k \geq 2$, *то і необхідно, щоб*

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\lambda_1 + \beta(\lambda_k - \lambda_1))|f_k| \leq \lambda_1 - \alpha. \tag{7}$$

Доведення. Якщо виконується умова (7) і $\lambda = \lambda_1$, то для всіх $s \in \Pi_0$

$$\operatorname{Re}\{(\lambda(1-\beta)F(s) + \beta F'(s))e^{-\lambda s}\} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\lambda_1(1-\beta)\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} f_k \exp\{s(\lambda_k - \lambda_1)\}\right) + \beta\left(\lambda_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k f_k \exp\{s(\lambda_k - \lambda_1)\}\right)\right\} =$$

$$= \lambda_1 + \operatorname{Re}\left\{\sum_{k=2}^{\infty} (\lambda_1 + \beta(\lambda_k - \lambda_1)) f_k \exp\{s(\lambda_k - \lambda_1)\}\right\} \geq$$

$$\geq \lambda_1 - \left|\sum_{k=2}^{\infty} (\lambda_1 + \beta(\lambda_k - \lambda_1)) f_k \exp\{s(\lambda_k - \lambda_1)\}\right| >$$

$$\geq \lambda_1 - \sum_{k=2}^{\infty}(\lambda_1 + \beta(\lambda_k - \lambda_1))|f_k| \exp\{\sigma(\lambda_k - \lambda_1)\} >$$

$$> \lambda_1 - \sum_{k=2}^{\infty}(\lambda_1 + \beta(\lambda_k - \lambda_1))|f_k| \geq \lambda_1 - (\lambda_1 - \alpha) = \alpha,$$

тобто виконується (5), і отже, ряд Діріхле (3) належить до класу $D\mathbb{F}_\lambda(\beta, \alpha)$ з $\lambda = \lambda_1$. Достатність умови (7) доведено.

Доведемо її необхідність. Припустимо, що $f_k \leq 0$ для всіх $k \geq 2$ і умова (7) не виконується, тобто

$$\sum_{k=2}^{\infty}(\lambda_1 + \beta(\lambda_k - \lambda_1))|f_k| = p > \lambda_1 - \alpha.$$

Тоді для кожного $q \in (\lambda_1 - \alpha,\, p)$ існує таке $\sigma_0 = \sigma_0(q) < 0$, що

$$\sum_{k=2}^{\infty}(\lambda_1 + \beta(\lambda_k - \lambda_1))|f_k| \exp\{\sigma_0(\lambda_k - \lambda_1)\} = q$$

і, оскільки $f_k \leq 0$ для всіх $k \geq 2$, то як раніше матимемо

$$\operatorname{Re}\{(\lambda_1(1-\beta)F(\sigma_0) + \beta F'(\sigma_0))e^{-\lambda_1\sigma_0}\} =$$

$$= \lambda_1 + \operatorname{Re}\left\{\sum_{k=2}^{\infty}(\lambda_1 + \beta(\lambda_k - \lambda_1))f_k \exp\{\sigma_0(\lambda_k - \lambda_1)\}\right\} =$$

$$= \lambda_1 - \sum_{k=2}^{\infty}(\lambda_1 + \beta(\lambda_k - \lambda_1))|f_k| \exp\{\sigma_0(\lambda_k - \lambda_1)\} = \lambda_1 - q < \alpha,$$

тобто (5) з $\lambda = \lambda_1$ не виконується. Доведення теореми 1 завершено. □

Оскільки для ряду Діріхле (3) з $\lambda = \lambda_1$

$$F'(s)/\lambda = \exp\{s\lambda_1\} + \sum_{k=2}^{\infty}(\lambda_k/\lambda_1)f_k \exp\{s\lambda_k\}$$

і $F \in D\mathbb{G}_\lambda(\beta, \alpha)$ тоді і тільки тоді, коли $F'/\lambda \in D\mathbb{F}_\lambda(\beta, \alpha)$, з теореми 1 випливає таке твердження.

Наслідок 1. *Для того, щоб ряд Діріхле* (3) *належав до класу* $D\mathbb{G}_\lambda(\beta, \alpha)$ *з* $\lambda = \lambda_1$ *достатньо, і у випадку, коли* $f_k \leq 0$ *для всіх* $k \geq 2$, *необхідно, щоб*

$$\sum_{k=2}^{\infty}(\lambda_1 + \beta(\lambda_k - \lambda_1))\lambda_k|f_k| \leq \lambda_1(\lambda_1 - \alpha). \tag{8}$$

3. Існування розв'язків рівняння (4) з класів $D\mathbb{F}_\lambda(\beta, \alpha)$ і $D\mathbb{G}_\lambda(\beta, \alpha)$

Для доведення наступної теореми використаємо таку лему з [13].

Лема 1. *Нехай* $h > 0$, $\gamma_0 \neq 0$, $\gamma_1 \neq 0$ *і* $\gamma_2 < 0$. *Тоді диференціальне рівняння* (4) *має розв'язок*

$$F(s) = \exp\{s\sqrt{|\gamma_2|}\} + \sum_{k=2}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\}, \quad \lambda_k = \sqrt{|\gamma_2|} + (k-1)h, \tag{9}$$

де $f_2 = -\gamma_1/(\lambda_2^2+\gamma_2)$ *і*

$$f_k = -\frac{\gamma_1 f_{k-1}}{\lambda_k^2+\gamma_2} - \frac{\gamma_0 f_{k-2}}{\lambda_k^2+\gamma_2}, \quad k\ge 3. \tag{10}$$

Теорема 2. *Нехай* $|\gamma_0|^2+|\gamma_1|^2\ne 0$, $\gamma_2<0$, $h>0$, $\lambda_1=\sqrt{|\gamma_2|}$ *і* $\lambda_k=\sqrt{|\gamma_2|}+(k-1)h$, *а* $\beta\ge 0$, $0\le\alpha<\lambda_1$ *і* $a_k=\lambda_1+\beta(\lambda_k-\lambda_1)$. *Тоді диференціальне рівняння* (4) *має розв'язок* (9) *такий, що:*

1) якщо

$$a_2(a_2|\gamma_1|(\lambda_3^2+\gamma_2)+a_3|\gamma_0|(\lambda_2^2+\gamma_2))(\lambda_4^2+\gamma_2)\le(\lambda_1-\alpha)\times$$

$$\times(a_2(\lambda_3^2+\gamma_2)(\lambda_4^2+\gamma_2)-a_3|\gamma_1|(\lambda_4^2+\gamma_2)-a_4|\gamma_0|(\lambda_3^2+\gamma_2))(\lambda_2^2+\gamma_2), \tag{11}$$

то $F\in D\mathbb{F}_\lambda(\beta,\alpha)$ *з* $\lambda=\lambda_1$*;*

2) якщо

$$a_2\lambda_2(a_2\lambda_2|\gamma_1|(\lambda_3^2+\gamma_2)+a_3\lambda_3|\gamma_0|(\lambda_2^2+\gamma_2))(\lambda_4^2+\gamma_2)\le\lambda_1(\lambda_1-\alpha)\times$$

$$\times(a_2\lambda_2(\lambda_3^2+\gamma_2)(\lambda_4^2+\gamma_2)-a_3\lambda_3|\gamma_1|(\lambda_4^2+\gamma_2)-a_4\lambda_4|\gamma_0|(\lambda_3^2+\gamma_2))(\lambda_2^2+\gamma_2), \tag{12}$$

то $F\in D\mathbb{G}_\lambda(\beta,\alpha)$ *з* $\lambda=\lambda_1$*;*

3) ряд Діріхле (9) *є цілим* $\ln M(\sigma,F)=(1+o(1))\dfrac{\sqrt{|\gamma_0|}}{h}e^{h\sigma}$ *при* $\sigma\to+\infty$, *де* $M(\sigma,F)=\sup\{|F(\sigma+it)|:\, t\in\mathbb{R}\}$.

Доведення. Оскільки $\lambda_k^2+\gamma_2=\lambda_k^2-\lambda_1^2>0$ для $k\ge 2$, то з огляду на (10) матимемо

$$\sum_{k=2}^{\infty}a_k|f_k|\le a_2|f_2|+\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{a_k|\gamma_1|}{\lambda_k^2+\gamma_2}|f_{k-1}|+\frac{a_k|\gamma_0|}{\lambda_k^2+\gamma_2}|f_{k-2}|\right)=$$

$$=a_2|f_2|+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a_{k+1}|\gamma_1|}{\lambda_{k+1}^2+\gamma_2}|f_k|+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k+2}|\gamma_0|}{\lambda_{k+2}^2+\gamma_2}|f_k|=$$

$$=a_2|f_2|+\frac{a_3|\gamma_0|}{\lambda_3^2+\gamma_2}|f_1|+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{a_{k+1}|\gamma_1|}{\lambda_{k+1}^2+\gamma_2}+\frac{a_{k+2}|\gamma_0|}{\lambda_{k+2}^2+\gamma_2}\right)|f_k|=$$

$$=\frac{a_2|\gamma_1|}{\lambda_2^2+\gamma_2}+\frac{a_3|\gamma_0|}{\lambda_3^2+\gamma_2}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\frac{|\gamma_1|}{\lambda_{k+1}^2+\gamma_2}+\frac{a_{k+2}}{a_k}\frac{|\gamma_0|}{\lambda_{k+2}^2+\gamma_2}\right)a_k|f_k|. \tag{13}$$

Але

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=1+\frac{\beta h}{\lambda_1+\beta(k-1)h}\downarrow 1$$

і

$$\frac{a_{k+2}}{a_k}=1+\frac{2\beta h}{\lambda_1+\beta(k-1)h}\downarrow 1$$

при $k\to\infty$, тобто послідовність

$$\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\frac{|\gamma_1|}{\lambda_{k+1}^2+\gamma_2}+\frac{a_{k+2}}{a_k}\frac{|\gamma_0|}{\lambda_{k+2}^2+\gamma_2}\right)_{k\ge 2}$$

спадна. Тому з (13) випливає, що

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k|f_k| \leq \frac{a_2|\gamma_1|}{\lambda_2^2+\gamma_2} + \frac{a_3|\gamma_0|}{\lambda_3^2+\gamma_2} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{a_3}{a_2}\frac{|\gamma_1|}{\lambda_3^2+\gamma_2} + \frac{a_4}{a_2}\frac{|\gamma_0|}{\lambda_4^2+\gamma_2}\right) a_k|f_k|,$$

тобто

$$\left(1 - \frac{a_3}{a_2}\frac{|\gamma_1|}{\lambda_3^2+\gamma_2} - \frac{a_4}{a_2}\frac{|\gamma_0|}{\lambda_4^2+\gamma_2}\right)\sum_{k=2}^{\infty} a_k|f_k| \leq \frac{a_2|\gamma_1|}{\lambda_2^2+\gamma_2} + \frac{a_3|\gamma_0|}{\lambda_3^2+\gamma_2}.$$

Тому, якщо

$$\frac{a_3}{a_2}\frac{|\gamma_1|}{\lambda_3^2+\gamma_2} + \frac{a_4}{a_2}\frac{|\gamma_0|}{\lambda_4^2+\gamma_2} < 1, \tag{14}$$

і

$$\frac{a_2|\gamma_1|}{\lambda_2^2+\gamma_2} + \frac{a_3|\gamma_0|}{\lambda_3^2+\gamma_2} \leq (\lambda_1 - \alpha)\left(1 - \frac{a_3}{a_2}\frac{|\gamma_1|}{\lambda_3^2+\gamma_2} - \frac{a_4}{a_2}\frac{|\gamma_0|}{\lambda_4^2+\gamma_2}\right), \tag{15}$$

то

$$\sum_{k=2}^{\infty}(\lambda_1 + \beta(\lambda_k - \lambda_1))|f_k| = \sum_{k=2}^{\infty} a_k|f_k| \leq \lambda_1 - \alpha. \tag{16}$$

Оскільки з нерівності (15) випливає нерівність (14), а нерівність (15) рівносильна нерівності (11), то з огляду на нерівність (16) і теорему 1 першу частину теореми 2 доведено.

Для доведення другої частини зауважимо, що послідовність

$$\left(\frac{a_{k+1}\lambda_{k+1}}{a_k\lambda_k}\frac{|\gamma_1|}{\lambda_{k+1}^2+\gamma_2} + \frac{a_{k+2}\lambda_{k+2}}{a_k\lambda_k}\frac{|\gamma_0|}{\lambda_{k+2}^2+\gamma_2}\right)_{k\geq 2}$$

також спадна. Тому, як у доведенні першої частини, отримуємо

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\lambda_1 + \beta(\lambda_k - \lambda_1))\lambda_k}{\lambda_1}|f_k| = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{a_k\lambda_k}{\lambda_1}|f_k| \leq$$

$$\leq \frac{a_2\lambda_2}{\lambda_1}|f_2| + \frac{a_3\lambda_3}{\lambda_1}\frac{|\gamma_0|}{\lambda_3^2+\gamma_2} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{a_3\lambda_3}{a_2\lambda_2}\frac{|\gamma_1|}{\lambda_3^2+\gamma_2} + \frac{a_4\lambda_4}{a_2\lambda_2}\frac{|\gamma_0|}{\lambda_4^2+\gamma_2}\right)\frac{a_k\lambda_k}{\lambda_1}|f_k|. \tag{17}$$

З умови (12) випливає, що

$$\frac{a_3\lambda_3}{a_2\lambda_2}\frac{|\gamma_1|}{\lambda_3^2+\gamma_2} + \frac{a_4\lambda_4}{a_2\lambda_2}\frac{|\gamma_0|}{\lambda_4^2+\gamma_2} < 1$$

і

$$\frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{a_2\lambda_2|\gamma_1|}{\lambda_2^2+\gamma_2} + \frac{a_3\lambda_3|\gamma_0|}{\lambda_3^2+\gamma_2}\right) \leq (\lambda_1 - \alpha)\left(1 - \frac{\lambda_3 a_3}{\lambda_2 a_2}\frac{|\gamma_1|}{\lambda_3^2+\gamma_2} - \frac{a_4\lambda_4}{\lambda_2 a_2}\frac{|\gamma_0|}{\lambda_4^2+\gamma_2}\right),$$

і, як раніше, з (17) одержуємо (8). З огляду на наслідок 1 другу частину теореми 2 доведено.

Доведення теореми 2 завершено, бо третю її частину доведено в [13]. □

Припустимо, що $\gamma_2 = -1$, $\gamma_0 = 0$ і $\gamma_1 \neq 0$. Тоді рівняння (4) матиме вигляд

$$\frac{d^2w}{ds^2} + (\gamma_1 e^{hs} - 1)w = 0, \quad h > 0. \tag{18}$$

За лемою 1 це рівняння має розв'язок

$$F(s) = e^s + \sum_{k=2}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\},$$

де $\lambda_k = 1 + (k-1)h$ і двочленна рекурентна формула (10) перетворюється в одночленну рекурентну формулу

$$f_k = \frac{-\gamma_1}{\lambda_k^2 - 1} f_{k-1} = \prod_{j=2}^{k} \frac{-\gamma_1}{\lambda_j^2 - 1} = \frac{(-\gamma_1/h)^{k-1}}{(k-1)!} \prod_{m=1}^{k-1} \frac{1}{mh+2}.$$

Неважко перевірити, що умови (11) і (12) можна записати у вигляді

$$4(1+h)(1+h\beta)^2|\gamma_1| \leq (1-\alpha)(2+h)\{4h(1+h)(1+h\beta) - (1+2h\beta)|\gamma_1|\} \tag{19}$$

і

$$4(1+h)^3(1+h\beta)^2|\gamma_1| \leq (1-\alpha)(2+h)\{4h(1+h)^2(1+h\beta) - (1+2h)(1+2h\beta)|\gamma_1|\}, \tag{20}$$

відповідно. Тому з теореми 2 випливає такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай $\gamma_1 \neq 0$, $h > 0$, $\beta \geq 0$ і $0 \leq \alpha < 1$. Тоді диференціальне рівняння* (18) *має розв'язок*

$$F(s) = e^s \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\gamma_1/h)^k}{k! \prod_{m=1}^{k} (mh+2)} e^{skh}\right),$$

який за умови (19) *належить до $D\mathbb{F}_1(\beta, \alpha)$, а за умови* (20) *належить до $D\mathbb{G}_1(\beta, \alpha)$.*

Двочленна рекурентна формула (10) також перетворюється в одночленну рекурентну формулу, якщо $\gamma_2 = -1$, $\gamma_1 = 0$ і $\gamma_0 \neq 0$, тобто рівняння (4) набуває вигляду

$$\frac{d^2w}{ds^2} + (\gamma_0 e^{2hs} - 1)w = 0, \quad h > 0, \tag{21}$$

а його розв'язком за лемою 1 є ряд Діріхле $F(s) = e^s + \sum\limits_{k=2}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\}$ з показниками $\lambda_k = 1 + (k-1)h$ та коефіцієнтами $f_2 = 0$, $f_3 = -\gamma_0/(\lambda_3^2 - 1)$, $f_{2n} = 0$ і

$$f_{2n+1} = -\frac{\gamma_0 f_{2n-1}}{\lambda_{2n+1}^2 - 1} = \prod_{j=1}^{n} \frac{-\gamma_0}{\lambda_{2j+1}^2 - 1} = \left(-\frac{\gamma_0}{4h}\right)^n \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{jh+1}$$

Умови (11) і (12) можна записати у вигляді

$$\frac{3(2+3h)(1+h\beta)(1+2h\beta)|\gamma_0|}{12h(2+3h)(1+h\beta) - 4(1+3h\beta)|\gamma_0|} \leq (1+h)(1-\alpha), \tag{22}$$

і

$$\frac{3(1+2h)(2+3h)(1+h\beta)(1+2h\beta)|\gamma_0|}{12h(1+h)(2+3h)(1+h\beta)-4(1+3h)(1+3h\beta)|\gamma_0|} \le (1-\alpha) \tag{23}$$

відповідно. Тому з теореми 2 випливає також наступний наслідок.

Наслідок 3. *Нехай* $\gamma_0 \neq 0$, $h>0$, $\beta \ge 0$ *і* $0 \le \alpha < 1$. *Тоді диференціальне рівняння* (21) *має розв'язок*

$$F(s) = e^s\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\gamma_0/4h)^n}{n!\prod\limits_{j=1}^{n}(1+jh)}e^{2nhs}\right),$$

який за умови (22) *належить до* $D\mathbb{F}_1(\beta,\alpha)$, *а за умови* (23) *належить до* $D\mathbb{G}_1(\beta,\alpha)$.

Список використаної літератури

1. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, Москва, 1966, 628с.; **English version:** G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Translations of Mathematical Monographs. Vol. **26**, Providence, R.I., Amer. Math. Soc.. vi, 676 pp.
2. A. W. Goodman, *Univalent functions and nonanalytic curves*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), no. 3, 598–601. DOI: 10.2307/2033525
3. M. M. Sheremeta, *Geometric properties of analytic solutions of differential equations*, Publisher I. E. Chyzhykov, Lviv, 2019, 164p.
4. I. S. Jack, *Functions starlike and convex of order* α, J. Lond. Math. Soc., II. Ser. **2** (1971), no. 3, 469–474. DOI: 10.1112/jlms/s2-3.3.469
5. V. P. Gupta, *Convex class of starlike functions*, Yokohama Math. J. **32** (1984), 55–59.
6. S. Owa, *On certain classes of p-valent functions with negative coefficients*, Simon Stevin **59** (1985), 385–402.
7. S. K. Lee, S. Owa, and H. M. Srivastava, *Basic properties and characterizations of a certain class of analytic functions with negative coefficients*, Utilitas Math. **36** (1989), 121–128.
8. O. Altintas, *A subclass of analytic functions with negative coefficients*, Hacet. Bull. Nat. Sci. Eng., Ser. B **19** (1990), 15–24.
9. M. K. Aouf, *A subclass of analytic p-valent functions with negative coefficients, I*, Utilitas Math. **46** (1994), 219–231.
10. M. K. Aouf and H. E. Darwish, *Basic properties and characterizations of a certain class of analytic functions with negative coefficients, II*, Utilitas Math. **46** (1994), 167-177.
11. M. K. Aouf, H. M. Hossen, and H. M. Srivastava, *A certain subclass of analytic p-valent functions with negative coefficients*, Demonstr. Math. **31** (1998), no. 3, 595–608.
12. R. M. El-Ashwah, M. K. Aouf, and A. O. Moustafa, *Starlike and convexity properties for p-valent hypergeometric functions*, Acta Math. Univ. Comenianae. **79** (2010), no. 1, 55–64.
13. О. М. Головата, О. М. Мулява, М. М. Шеремета, *Псевдозіркові, псевдоопуклі та близькі до псевдоопуклих ряди Діріхле, які задовольняють диференціальні рівняння з експоненціальними коефіцієнтами*, Мат. методи фіз.-мех. поля. **61** (2018), no. 1, 57–70; **English version:** O. M. Holovata, O. M. Mulyava, and M. M. Sheremeta, *Pseudostarlike, pseudoconvex, and close-to-pseudoconvex Dirichlet series satisfying differential equations with exponential coefficients*, J. Math. Sci. **249** (2020), no. 3, 369–388. DOI: 10.1007/s10958-020-04948-1

14. S. M. Shah, *Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation, II*, J. Math. Anal. Appl. **142** (1989), no. 2, 422–430. DOI: 10.1016/0022-247X(89)90011-5

Стаття: надійшла до редколегії 04.04.2022
доопрацьована 05.06.2022
прийнята до друку 22.06.2022

ON THE GENERALIZATION OF SOME CLASSES OF p-VALENT FUNCTIONS FOR ABSOLUTELY CONVERGENT DIRICHLET SERIES AND SOLUTIONS OF THE SHAH-TYPE DIFFERENTIAL EQUATION

Oksana HOLOVATA[1], Oksana MULYAVA[2], Myroslav SHEREMETA[1]

[1]*Ivan Franko Lviv National University,*
Universytetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine
[2]*Kyiv National University of Food Technologies*
Volodymyrska str., 68, 01601 Kyiv, Ukraine
e-mail: oksana.holovata@lnu.edu.ua, oksanasheremeta42@gmail.com, m.m.sheremeta@gmail.com

Studying starlikeness and convexity of p-valent functions of the form

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} f_n z^n,$$

S. K. Lee, S. Owa and H. M. Srivastava introduced the special classes $\mathbb{F}_p(\beta,\alpha)$ and $\mathbb{G}_p(\beta,\alpha)$ of analytic functions in the unit disk $\{z\colon |z|<1\}$ and investigated properties of functions from these classes. Absolutely convergent in the left half-plane $\{s:\ \mathrm{Re}\, s<0\}$ Dirichlet series

$$F(s) = \exp\{s\lambda_1\} + \sum_{k=2}^{\infty} f_k \exp\{s\lambda_k\}, \quad s=\sigma+it,$$

with positive increasing to $+\infty$ exponents (λ_k) $(\lambda_1 > h \geq 1)$ generalize power series convergent in the unit disk. For such series analogues of classes $\mathbb{F}_p(\beta,\alpha)$ and $\mathbb{G}_p(\beta,\alpha)$ are introduced, their properties are investigated and application to the study of properties of solutions of differential equation

$$w'' + (\gamma_0 e^{2hs} + \gamma_1 e^{hs} + \gamma_2)w = 0$$

is indicated.

Key words: Dirichlet series, starlikeness, convexity, differential equation.