

УДК 512.535

## ПРО АВТОМОРФІЗМИ НАПІВГРУПИ $B_\omega^{\mathcal{F}}$ У ВИПАДКУ СІМ'Ї $\mathcal{F}$ НЕПОРОЖНИХ ІНДУКТИВНИХ ПІДМНОЖИН У $\omega$

Олег ГУТІК, Микола МИХАЛЕНИЧ

Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1, 79000, Львів  
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,  
myhalenychnic@gmail.com

Нехай  $\mathcal{F}$  — сім'я непорожніх індуктивних підмножин у  $\omega$ . Доведено, що у випадку  $|\mathcal{F}| \geq 2$  ін'єктивний ендоморфізм  $\varepsilon$  напівгрупи  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  є тотожним відображенням тоді і тільки тоді, коли  $\varepsilon$  має три різні нерухомі точки, що еквівалентно існуванню неідемпотентного елемента  $(i, j, [p]) \in B_\omega^{\mathcal{F}}$  такого, що  $(i, j, [p])\varepsilon = (i, j, [p])$ .

*Ключові слова:* інверсна напівгрупа, автоморфізм, ендоморфізм, біциклічний моноїд, розширення біциклічного моноїда, нерухома точка.

Ми користуємося термінологією з монографій [6, 7, 10, 12]. Надалі у тексті множину невід'ємних цілих чисел позначатимемо через  $\omega$ . Для довільного числа  $k \in \omega$  позначимо  $[k] = \{i \in \omega : i \geq k\}$ .

Нехай  $\mathcal{P}(\omega)$  — сім'я усіх підмножин у  $\omega$ . Для довільних  $F \in \mathcal{P}(\omega)$  і цілого числа  $n$  приймемо

$$n + F = \{n + k : k \in F\}, \quad \text{якщо } F \neq \emptyset$$

і  $n + F = \emptyset$ , якщо  $F = \emptyset$ . Будемо говорити, що непорожня підсім'я  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$  є  $\omega$ -замкненою, якщо  $F_1 \cap (-n + F_2) \in \mathcal{F}$  для довільних  $n \in \omega$  та  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ .

Підмножина  $A$  в  $\omega$  називається *індуктивною*, якщо з  $i \in A$  випливає, що  $i + 1 \in A$ . Очевидно, що  $\emptyset$  — індуктивна множина в  $\omega$ .

*Зауваження 1.* (1) За лемою 6 з [2] непорожня множина  $F \subseteq \omega$  є індуктивною в  $\omega$  тоді і лише тоді, коли  $(-1 + F) \cap F = F$ .

(2) Оскільки множина  $\omega$  зі звичайним порядком є цілком впорядкованою, то для кожної непорожньої індуктивної множини  $F$  у  $\omega$  існує невід'ємне ціле число  $n_F \in \omega$  таке, що  $[n_F] = F$ .

(3) З (2) випливає, що перетин довільної скінченної кількості непорожніх індуктивних підмножин у  $\omega$  є непорожньою індуктивною підмножиною в  $\omega$ .

Надалі, якщо  $(X, \leq)$  — частково впорядкована множина та  $x \in X$ , то позначимо

$$\uparrow_{\leq} x = \{y \in X : x \leq y\}.$$

Якщо  $S$  — напівгрупа, то її підмножина ідемпотентів позначається через  $E(S)$ . Напівгрупа  $S$  називається *інверсною*, якщо для довільного її елемента  $x$  існує єдиний елемент  $x^{-1} \in S$  такий, що  $xx^{-1}x = x$  та  $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$  [12, 1]. В інверсній напівгрупі  $S$  вище означений елемент  $x^{-1}$  називається *інверсним до  $x$* . *В'язка* — це напівгрупа ідемпотентів, а *напівґратка* — це комутативна в'язка.

Якщо  $S$  — напівгрупа, то на  $E(S)$  визначено частковий порядок:  $e \preceq f$  тоді і лише тоді, коли  $ef = fe = e$ . Так означений частковий порядок на  $E(S)$  називається *природним*.

Означимо відношення  $\preceq$  на інверсній напівгрупі  $S$  так:  $s \preceq t$  тоді і лише тоді, коли  $s = te$ , для деякого ідемпотента  $e \in S$ . Так означений частковий порядок називається *природним частковим порядком* на інверсній напівгрупі  $S$  [1]. Очевидно, що звуження природного часткового порядку  $\preceq$  на інверсній напівгрупі  $S$  на її в'язку  $E(S)$  є природним частковим порядком на  $E(S)$ .

Нагадаємо (див. [6, §1.12]), що *біциклічною напівгрупою* (або *біциклічним моноїдом*)  $\mathcal{C}(p, q)$  називається напівгрупа з одиницею, породжена двоелементною множиною  $\{p, q\}$  і визначена одним співвідношенням  $pq = 1$ .

*Зауваження 2.* Легко бачити, що біциклічний моноїд  $\mathcal{C}(p, q)$  ізоморфний напівгрупі, заданій на множині  $B_\omega = \omega \times \omega$  з напівгруповою операцією

$$\begin{aligned} (i_1, j_1) \cdot (i_2, j_2) &= (i_1 + i_2 - \min\{j_1, i_2\}, j_1 + j_2 - \min\{j_1, i_2\}) \\ &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2), & \text{якщо } j_1 \leq i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2), & \text{якщо } j_1 \geq i_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Надалі під біциклічною напівгрупою, чи біциклічним моноїдом, ми будемо розуміти напівгрупу  $B_\omega$ .

У праці [2] введено алгебраїчні розширення  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  біциклічного моноїда для довільної  $\omega$ -замкненої сім'ї  $\mathcal{F}$  підмножин в  $\omega$ , які узагальнюють біциклічний моноїд, зліченну напівгрупу матричних одиниць і деякі інші комбінаторні інверсні напівгрупи.

Нагадаємо цю конструкцію. Нехай  $B_\omega$  — біциклічний моноїд і  $\mathcal{F}$  — непорожня  $\omega$ -замкнена підсім'я в  $\mathcal{P}(\omega)$ . На множині  $B_\omega \times \mathcal{F}$  означимо бінарну операцію “ $\cdot$ ” формулою

$$(1) \quad (i_1, j_1, F_1) \cdot (i_2, j_2, F_2) = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + F_1) \cap F_2), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, F_1 \cap F_2), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, F_1 \cap (i_2 - j_1 + F_2)), & \text{якщо } j_1 > i_2. \end{cases}$$

У [2] доведено таке: якщо сім'я  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$  є  $\omega$ -замкненою, то  $(B_\omega \times \mathcal{F}, \cdot)$  — напівгрупа. Ми в [2] доводимо, що  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  є комбінаторною інверсною напівгрупою, а також описано відношення Гріна, частковий природний порядок на напівгрупі  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  та її

множину ідемпотентів. Також у [2] доведено критерії простоти, 0-простоти, біпростоти та 0-біпростоти напівгрупи  $B_\omega^{\mathcal{F}}$ , і вказано умови, коли  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  містить одиницю, ізоморфна біциклічному моноїду або зліченній напівгрупі матричних одиниць.

Зауважимо, що у [4] отримано подібні результати до [2] у випадку розширення  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$  розширеної біциклічної напівгрупи  $B_{\mathbb{Z}}$  для довільної  $\omega$ -замкненої сім'ї  $\mathcal{F}$  підмножин в  $\omega$ , а в [9] описано групу автоморфізмів напівгрупи  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$ .

Припустимо, що  $\omega$ -замкнена сім'я  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$  містить порожню множину  $\emptyset$ , то з означення напівгрупової операції  $(B_\omega \times \mathcal{F}, \cdot)$  випливає, що множина  $I = \{(i, j, \emptyset) : i, j \in \omega\}$  є ідеалом напівгрупи  $(B_\omega \times \mathcal{F}, \cdot)$ .

**Означення 1** [2]). Для довільної  $\omega$ -замкненої сім'ї  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$  означимо

$$B_\omega^{\mathcal{F}} = \begin{cases} (B_\omega \times \mathcal{F}, \cdot) / I, & \text{якщо } \emptyset \in \mathcal{F}; \\ (B_\omega \times \mathcal{F}, \cdot), & \text{якщо } \emptyset \notin \mathcal{F}. \end{cases}$$

У [8, 11] досліджено алгебраїчну структуру напівгрупи  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  у випадку, коли  $\omega$ -замкнена сім'я  $\mathcal{F}$  складається з атомарних підмножин (одноточкових підмножин і порожньої множини) в  $\omega$ . Зокрема доведено, що за виконання таких умов на сім'ю  $\mathcal{F}$  напівгрупа  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  ізоморфна піднапівгрупі  $\omega$ -розширення Брандта напівгратки  $(\omega, \min)$ . Також у [8, 11] досліджували топологізацію напівгрупи  $B_\omega^{\mathcal{F}}$ , близькі до компактних трансляційно неперервні топології на  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  та замикання напівгрупи  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  у напівтопологічних напівгрупах.

Із зауваження 1(3) випливає таке: якщо сім'я  $\mathcal{F}_0$  складається з індуктивних в  $\omega$  підмножин і містить порожню множину  $\emptyset$  як елемент, то для сім'ї  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \setminus \{\emptyset\}$  множина  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  з індукованою напівгруповою операцією з  $B_\omega^{\mathcal{F}_0}$  є піднапівгрупою в  $B_\omega^{\mathcal{F}_0}$ .

У праці [3] вивчаємо алгебраїчну структуру напівгрупи  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  у випадку, коли  $\omega$ -замкнена сім'я  $\mathcal{F}$  складається з індуктивних непорожніх підмножин у  $\omega$ , а саме групові конгруенції на напівгрупі  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  та її гомоморфні ретракти. Доведено, що конгруенція  $\mathcal{C}$  на  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  є груповою, тоді і лише тоді, коли звуження конгруенції  $\mathcal{C}$  на піднапівгрупу в  $B_\omega^{\mathcal{F}}$ , яка ізоморфна біциклічній напівгрупі, не є відношенням рівності. Також, описуємо всі нетривіальні гомоморфні ретракти та ізоморфізми напівгрупи  $B_\omega^{\mathcal{F}}$ .

Надалі скрізь в тексті вважаємо, що  $\omega$ -замкнена сім'я  $\mathcal{F}$  складається лише з індуктивних непорожніх підмножин у  $\omega$ .

Очевидно, що кожний автоморфізм моноїда  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  є тотожним перетворенням. Ми доводимо, що ін'єктивний ендоморфізм  $\varepsilon$  напівгрупи  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  є тотожним відображенням тоді і тільки тоді, коли  $\varepsilon$  має три різні нерухомі точки, що еквівалентно існуванню неїдемпотентного елемента  $(i, j, [p]) \in B_\omega^{\mathcal{F}}$  такого, що  $(i, j, [p])\varepsilon = (i, j, [p])$ .

Надалі припускатимемо, що сім'я  $\mathcal{F}$  містить щонайменше дві непорожні індуктивні підмножини у  $\omega$ . Також за твердженням 1 [3] для спрощення викладень, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що  $[0] \in \mathcal{F}$ .

**Лема 1.** *Якщо  $\varepsilon$  — ін'єктивний ендоморфізм моноїда  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  такий, що  $(1, 1, [0])\varepsilon = (1, 1, [0])$ , то  $\varepsilon$  — тотожне відображення.*

*Доведення.* Доведемо твердження леми методом математичної індукції. Спочатку доведемо, що виконується початковий крок індукції:  $(m, n, [0])\varepsilon = (m, n, [0])$  для

довільних  $m, n \in \omega$ . За твердженням 3 [2] для довільної множини  $[n] \in \mathcal{F}$  піднапівгрупа  $B_\omega^{\{[n]\}}$  в  $B_\omega^\mathcal{F}$  ізоморфна біциклічній напівгрупі  $B_\omega$  стосовно відображення  $(i, j, [n]) \mapsto (i, j)$ . Оскільки  $(0, 0, [0]), (1, 1, [0]) \in B_\omega^{\{[0]\}}$ , то за твердженням 4 [3],  $(i, j, [0]) \in B_\omega^{\{[0]\}}$  справджується рівність  $(i, j, [0])\varepsilon = (i, j, [0])$  для довільних  $i, j \in \omega$ . Позаяк  $B_\omega^\mathcal{F}$  — інверсна напівгрупа та  $(0, 1, [0])^{-1} = (1, 0, [0])$  в  $B_\omega^\mathcal{F}$ , то з рівностей

$$\begin{aligned} (0, 1, [0]) \cdot (1, 0, [0]) &= (0, 0, [0]), \\ (1, 0, [0]) \cdot (0, 1, [0]) &= (1, 1, [0]), \\ (0, 0, [0])\varepsilon &= (0, 0, [0]), \\ (1, 1, [0])\varepsilon &= (1, 1, [0]) \end{aligned}$$

і твердження 1.4.21(1) [10] випливає, якщо  $(0, 1, [0])\varepsilon = (i, j, [0])$ , то

$$\begin{aligned} (1, 0, [0])\varepsilon &= ((0, 1, [0])^{-1})\varepsilon \\ &= ((0, 1, [0])\varepsilon)^{-1} \\ &= (i, j, [0])^{-1} = (j, i, [0]), \end{aligned}$$

а отже,

$$\begin{aligned} (0, 0, [0]) &= (0, 0, [0])\varepsilon \\ &= ((0, 1, [0]) \cdot (1, 0, [0]))\varepsilon \\ &= (0, 1, [0])\varepsilon \cdot (1, 0, [0])\varepsilon \\ &= (i, j, [0]) \cdot (j, i, [0]) \\ &= (i, i, [0]) \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} (1, 1, [0]) &= (1, 1, [0])\varepsilon \\ &= ((1, 0, [0]) \cdot (0, 1, [0]))\varepsilon \\ &= (1, 0, [0])\varepsilon \cdot (0, 1, [0])\varepsilon \\ &= (j, i, [0]) \cdot (i, j, [0]) \\ &= (j, j, [0]), \end{aligned}$$

звідки випливає, що  $(0, 1, [0])\varepsilon = (0, 1, [0])$  і  $(1, 0, [0])\varepsilon = (1, 0, [0])$ . Позаяк для довільних  $m, n \in \omega$  в напівгрупі  $B_\omega^\mathcal{F}$  справджується рівність  $(m, n, [0]) = (1, 0, [0])^m \cdot (0, 1, [0])^n$ , то з вище доведеного випливає, що  $(m, n, [0])\varepsilon = (m, n, [0])$  для довільних  $m, n \in \omega$ .

Далі доведемо крок індукції:  $(i, j, [k])\varepsilon = (i, j, [k])$  для довільних  $i, j \in \omega$  і  $[k] \in \mathcal{F}$ . Припустимо, що  $[k+1] \in \mathcal{F}$  для деякого числа  $k \in \omega$  і довільних  $m, n \in \omega$  та невід'ємного цілого числа  $p \leq k$  виконується рівність  $(m, n, [p])\varepsilon = (m, n, [p])$ . Доведемо, що з цього припущення випливає рівність  $(m, n, [k+1])\varepsilon = (m, n, [k+1])$  довільних  $m, n \in \omega$ . З означення природного часткового порядку на напівгратці  $E(B_\omega^\mathcal{F})$  (див. твердження 2 [3]) випливає, що  $(0, 0, [k+1])$  і  $(1, 1, [k-1])$  — єдині такі ідемпотенти  $e$  напівгрупи  $B_\omega^\mathcal{F}$ , для яких виконується нерівність

$$(1, 1, [k]) \preceq e \preceq (0, 0, [k]),$$

у випадку  $k > 0$ , а у випадку  $k = 0$  ідемпотент  $(0, 0, [k+1])$  єдиний, який задовольняє цю умову. Тоді з твердження 1.4.21(6) [10] та припущення індукції випливає, що

$$(1, 1, [k]) = (1, 1, [k])\varepsilon \preceq (0, 0, [k+1])\varepsilon \preceq (0, 0, [k])\varepsilon = (0, 0, [k]),$$

а отже,

$$(0, 0, [k+1])\varepsilon = (0, 0, [k+1]).$$

Знову, оскільки  $(1, 1, [k+1])$  і  $(2, 2, [k-1])$  — єдині такі ідемпотенти  $e$  напівгрупи  $\mathbf{B}_\omega^\mathcal{F}$ , для яких виконується нерівність

$$(2, 2, [k]) \preceq e \preceq (1, 1, [k]),$$

у випадку  $k > 0$ , а у випадку  $k = 0$  ідемпотент  $(1, 1, [k+1])$  єдиний, який задовольняє цю умову, то з твердження 1.4.21(6) [10] та припущення індукції випливає, що

$$(2, 2, [k]) = (2, 2, [k])\varepsilon \preceq (1, 1, [k+1])\varepsilon \preceq (1, 1, [k])\varepsilon = (1, 1, [k]),$$

а отже,

$$(1, 1, [k+1])\varepsilon = (1, 1, [k+1]).$$

Далі, аналогічно як і у випадку  $k = 0$  доводиться, що  $(m, n, [k+1])\varepsilon = (m, n, [k+1])$  для довільних  $m, n \in \omega$ .  $\square$

**Лема 2.** Нехай  $\varepsilon$  — ін'єктивний ендоморфізм моноїда  $\mathbf{B}_\omega^\mathcal{F}$ . Якщо  $(0, 0, [k])\varepsilon = (0, 0, [k])$  для деякого натурального числа  $k \geq 2$ , то  $\varepsilon$  — тотожсне відображення.

*Доведення.* Якщо  $(0, 0, [k])\varepsilon = (0, 0, [k])$  для деякого натурального числа  $k \geq 2$ , то з визначення природного часткового порядку на  $E(\mathbf{B}_\omega^\mathcal{F})$  (див. твердження 2 [3]) випливає, що

$$\uparrow_{\preceq}(0, 0, [k]) = \{(0, 0, [0]), (0, 0, [1]), \dots, (0, 0, [k])\},$$

а отже, множина  $\uparrow_{\preceq}(0, 0, [k])$  є максимальним  $(k+1)$ -елементним ланцюгом, який містить ідемпотенти  $(0, 0, [0])$  і  $(0, 0, [k])$ , як найбільший і найменший елементи, відповідно. Також з визначення природного часткового порядку на напівгратці  $E(\mathbf{B}_\omega^\mathcal{F})$  випливає, що для ідемпотента  $(j, j, [k]) \in \mathbf{B}_\omega^\mathcal{F}$  множина  $\uparrow_{\preceq}(j, j, [k])$  є ланцюгом в  $E(\mathbf{B}_\omega^\mathcal{F})$  тоді і лише тоді, коли  $j = 0$ . Отже, отримуємо, що  $(0, 0, [j])\varepsilon = (0, 0, [j])$  для всіх  $j = 1, \dots, k$ .

Далі доведемо, що  $(1, 1, [0])\varepsilon = (1, 1, [0])$ . Оскільки  $(0, 0, [0])\varepsilon = (0, 0, [0])$ , то за твердженням 3 з [2] піднапівгрупа  $\mathbf{B}_\omega^{\{0\}}$  в  $\mathbf{B}_\omega^\mathcal{F}$  ізоморфна біциклічній напівгрупі  $\mathbf{B}_\omega$ , і тоді з умови  $(0, 0, [0]), (1, 1, [0]) \in \mathbf{B}_\omega^{\{0\}}$ , твердження 4 [3] та твердження 1.4.21(2) [10] випливає, що  $(1, 1, [0])\varepsilon$  — ідемпотент напівгрупи  $\mathbf{B}_\omega^{\{0\}}$ . За лемою 2 з [2],  $(1, 1, [0])\varepsilon = (i, i, [0])$  для деякого натурального числа  $i$ , оскільки  $\varepsilon$  — ін'єктивний ендоморфізм.

Якщо  $i \geq 2$ , то з твердження 2 [3] випливає, що

$$(1, 1, [0])\varepsilon = (i, i, [0]) \preceq (0, 0, [2]) = (0, 0, [2])\varepsilon,$$

тобто

$$(2) \quad (1, 1, [0])\varepsilon \cdot (0, 0, [2])\varepsilon = (1, 1, [0])\varepsilon.$$

Однак ідемпотенти  $(1, 1, [0])$  і  $(0, 0, [2])$  за твердженням 2 [3] непорівняльні в  $E(B_\omega^{\mathcal{F}})$ , а отже

$$(3) \quad (0, 0, [2]) \neq (1, 1, [0]) \cdot (0, 0, [2]) \neq (1, 1, [0]).$$

Отримані умови (2) і (3) суперечать ін'єктивності ендоморфізму  $\varepsilon$ . З отриманого протиріччя випливає, що  $i = 1$ , а отже,  $(1, 1, [0])\varepsilon = (1, 1, [0])$ . Далі скористаємося лемою 1.  $\square$

З означення напівгрупової операції на  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  випливає, що у випадку, коли  $\mathcal{F}$  —  $\omega$ -замкнена сім'я підмножин у  $\omega$  та  $F \in \mathcal{F}$  — непорожня індуктивна підмножина в  $\omega$ , то множина

$$B_\omega^{\{F\}} = \{(i, j, F) : i, j \in \omega\}$$

з індукованою напівгруповою операцією з  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  є піднапівгрупою в  $B_\omega^{\mathcal{F}}$ , яка за твердженням 3 з [2] ізоморфна біциклічній напівгрупі.

**Лема 3.** *Нехай  $\varepsilon$  — ін'єктивний ендоморфізм моноїда  $B_\omega^{\mathcal{F}}$ . Якщо існує такий ідемпотент  $(i, i, [p]) \in B_\omega^{\mathcal{F}} \setminus \{(0, 0, [0]), (0, 0, [1])\}$ , що  $(i, i, [p])\varepsilon = (i, i, [p])$ , то  $\varepsilon$  — тотальне відображення.*

*Доведення.* Розглянемо можливі випадки:

- (i)  $i \geq 1$  і  $p = 0$ ;
- (ii)  $i \geq 1$  і  $p = 1$ ;
- (iii)  $p \geq 2$ .

(i) Якщо  $i = 1$  і  $p = 0$ , то твердження леми випливає з леми 1. Тому надалі будемо вважати, що  $i \geq 2$ .

За твердженням 3 з [2] піднапівгрупа  $B_\omega^{\{[0]\}}$  моноїда  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  ізоморфна біциклічній напівгрупі  $B_\omega$ , і оскільки  $(i, i, [0])\varepsilon = (i, i, [0])$ , то за наслідком 1.32 [6] образ піднапівгрупи  $B_\omega^{\{[0]\}}$  стосовно ендоморфізму  $\varepsilon$  ізоморфний біциклічній напівгрупі, а тоді образ  $(B_\omega^{\{[0]\}})\varepsilon$  міститься в  $B_\omega^{\{[0]\}}$ . З визначення природного часткового порядку на  $B_\omega^{\{[0]\}}$ , рівності  $(i, i, [0])\varepsilon = (i, i, [0])$  та ін'єктивності ендоморфізму  $\varepsilon$  за твердженням 1.4.21(6) з [10] маємо, що  $(j, j, [0])\varepsilon = (j, j, [0])$  для всіх  $j = 1, \dots, i$ . Далі скористаємося лемою 1.

(ii) Розглянемо випадок  $i \geq 1$  і  $p = 1$ . За твердженням 3 з [2] піднапівгрупа  $B_\omega^{\{[1]\}}$  в  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  ізоморфна біциклічній напівгрупі  $B_\omega$ , і оскільки  $(i, i, [1])\varepsilon = (i, i, [1])$ , то за наслідком 1.32 з [6] образ піднапівгрупи  $B_\omega^{\{[1]\}}$  стосовно ін'єктивного ендоморфізму  $\varepsilon$  ізоморфний біциклічній напівгрупі, а тоді цей образ міститься в  $B_\omega^{\{[1]\}}$ . Оскільки

$$\uparrow_{\leq} (i, i, [1]) \cap B_\omega^{\{[1]\}} = \{(0, 0, [1]), \dots, (i, i, [1])\},$$

то з визначення природного часткового порядку на  $B_\omega^{\{[1]\}}$ , рівності  $(i, i, [1])\varepsilon = (i, i, [1])$  та ін'єктивності ендоморфізму  $\varepsilon$  за твердженням 1.4.21(6) [10] маємо, що  $(j, j, [1])\varepsilon = (j, j, [1])$  для всіх  $j = 0, \dots, i$ .

З визначення природного часткового порядку на  $E(B_\omega^{\mathcal{F}})$  випливає, що

$$\uparrow_{\leq} (1, 1, [1]) = \{(0, 0, [0]), (1, 1, [0]), (0, 0, [1]), (1, 1, [1])\}.$$

Оскільки за твердженням 1.4.21(6) [10] гомоморфізм інверсних напівгруп зберігає природний частковий порядок, а отже, і на напівгратках їхніх ідемпотентів, то з рівностей

$$\begin{aligned}(0, 0, [0])\varepsilon &= (0, 0, [0]), \\ (0, 0, [1])\varepsilon &= (0, 0, [1]), \\ (1, 1, [1])\varepsilon &= (1, 1, [1])\end{aligned}$$

отримуємо, що

$$\begin{aligned}\uparrow_{\leq}((1, 1, [1])\varepsilon) &= \{(0, 0, [0])\varepsilon, (1, 1, [0])\varepsilon, (0, 0, [1])\varepsilon, (1, 1, [1])\varepsilon\} = \\ &= \{(0, 0, [0]), (1, 1, [0])\varepsilon, (0, 0, [1]), (1, 1, [1])\},\end{aligned}$$

звідки випливає, що  $(1, 1, [0])\varepsilon = (1, 1, [0])$ . Далі скористаємося лемою 1.

(iii) Якщо  $i = 0$  і  $p \geq 2$ , то твердження леми випливає з леми 2. Тому надалі будемо вважати, що  $i \geq 1$ .

За твердженням 3 з [2] піднапівгрупа  $\mathbf{B}_{\omega}^{\{[p]\}}$  в  $\mathbf{B}_{\omega}^{\mathcal{F}}$  ізоморфна біциклічній напівгрупі  $\mathbf{B}_{\omega}$ , і оскільки  $(i, i, [p])\varepsilon = (i, i, [p])$ , то за наслідком 1.32 [6] образ піднапівгрупи  $\mathbf{B}_{\omega}^{\{[p]\}}$  стосовно ін'єктивного ендоморфізму  $\varepsilon$  ізоморфний біциклічній напівгрупі, а тоді цей образ міститься в  $\mathbf{B}_{\omega}^{\{[p]\}}$ . Оскільки

$$\uparrow_{\leq}(i, i, [p]) \cap \mathbf{B}_{\omega}^{\{[p]\}} = \{(0, 0, [p]), \dots, (i, i, [p])\},$$

то визначення природного часткового порядку на  $\mathbf{B}_{\omega}^{\{[p]\}}$ , рівності  $(i, i, [p])\varepsilon = (i, i, [p])$  та ін'єктивності ендоморфізму  $\varepsilon$  за твердженням 1.4.21(6) [10] маємо, що  $(j, j, [p])\varepsilon = (j, j, [p])$  для всіх  $j = 0, \dots, i$ . Отже,  $(0, 0, [p])\varepsilon = (0, 0, [p])$  і залишилося скористатися лемою 2.  $\square$

**Теорема 1.** *Нехай  $\mathcal{F}$  —  $\omega$ -замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у  $\omega$ . Тоді ін'єктивний ендоморфізм  $\varepsilon$  моноїда  $\mathbf{B}_{\omega}^{\mathcal{F}}$  є тотожним відображенням тоді і тільки тоді, коли існує такий елемент  $(i, j, [p]) \in \mathbf{B}_{\omega}^{\mathcal{F}} \setminus \{(0, 0, [0]), (0, 0, [1])\}$ , що  $(i, j, [p])\varepsilon = (i, j, [p])$ .*

*Доведення. Необхідність* очевидна.

*Доведемо достатність.* Якщо елемент  $(i, j, [p]) \in \mathbf{B}_{\omega}^{\mathcal{F}} \setminus \{(0, 0, [0]), (0, 0, [1])\}$  є ідемпотентом, то твердження теореми випливає з леми 3. Припустимо, що  $(i, j, [p])$  не є ідемпотентом. Тоді з леми 2 [2] випливає, що  $i \neq j$ , а з твердження 1.4.21(1) [10] отримуємо, що

$$\begin{aligned}(j, i, [p])\varepsilon &= ((i, j, [p])^{-1})\varepsilon \\ &= ((i, j, [p])\varepsilon)^{-1} \\ &= (i, j, [p])^{-1} \\ &= (j, i, [p]).\end{aligned}$$

Отже, маємо, що

$$\begin{aligned} (j, j, [p])\varepsilon &= ((j, i, [p]) \cdot (i, j, [p]))\varepsilon \\ &= (j, i, [p])\varepsilon \cdot (i, j, [p])\varepsilon \\ &= (j, i, [p]) \cdot (i, j, [p]) \\ &= (j, j, [p]) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} (i, i, [p])\varepsilon &= ((i, j, [p]) \cdot (j, i, [p]))\varepsilon \\ &= (i, j, [p])\varepsilon \cdot (j, i, [p])\varepsilon \\ &= (i, j, [p]) \cdot (j, i, [p]) \\ &= (i, i, [p]), \end{aligned}$$

i оскільки  $i \neq j$ , то виконується хоча б одна з умов  $(i, i, [p]) \in \mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}} \setminus \{(0, 0, [0]), (0, 0, [1])\}$ , або  $(j, j, [p]) \in \mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}} \setminus \{(0, 0, [0]), (0, 0, [1])\}$ . Залишилося скористатися лемою 3.  $\square$

**Теорема 2.** Нехай  $\mathcal{F}$  —  $\omega$ -замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у  $\omega$ , яка містить хоча б дві множини. Тоді для ін'єктивного ендоморфізму  $\varepsilon$  моноїда  $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$  такі умови еквівалентні:

- (i)  $\varepsilon$  — тотожне відображення;
- (ii) існує неїдемпотентний елемент  $(i, j, [p]) \in \mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$  такий, що  $(i, j, [p])\varepsilon = (i, j, [p])$ ;
- (iii)  $\varepsilon$  має хоча б три нерухомі елементи.

*Доведення.* Імплікації (i)  $\Rightarrow$  (ii) та (i)  $\Rightarrow$  (iii) очевидні. Імплікація (ii)  $\Rightarrow$  (i) з теореми 1.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Очевидно, що  $(0, 0, [0])\varepsilon = (0, 0, [0])$ . Якщо один з нерухомих елементів  $\varepsilon$  неїдемпотентний, то виконується умова (ii). Тому припустимо, що  $(i, i, [p])\varepsilon = (i, i, [p])$  та  $(j, j, [q])\varepsilon = (j, j, [q])$  для двох різних неєдиничних ідемпотентів  $(i, i, [p])$  і  $(j, j, [q])$  моноїда  $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$ .

Тоді один з ідемпотентів  $(i, i, [p])$  або  $(j, j, [q])$  відмінний від  $(0, 0, 1)$ . Далі скористаємося теоремою 1.  $\square$

*Зауваження 3.* За твердженням 3 з [2] для  $\omega$ -замкненої сім'ї  $\mathcal{F}$  індуктивних непорожніх підмножин у  $\omega$  напівгрупа  $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$  ізоморфна біциклічному моноїду  $\mathbf{B}_\omega$  тоді і лише тоді, коли сім'я  $\mathcal{F}$  складається з єдиної непорожньої індуктивної підмножини в  $\omega$ . Усі автоморфізми біциклічного моноїда тривіальні, а напівгрупа  $\mathbf{End}(\mathbf{B}_\omega)$  ендоморфізмів біциклічної напівгрупи  $\mathbf{B}_\omega$  ізоморфна напівпрямому добутку  $(\omega, +) \rtimes_{\varphi} (\omega, *)$ , де  $(\omega, +)$  і  $(\omega, *)$  — адитивна та мультиплікативна напівгрупи невід'ємних цілих чисел, відповідно, (див. [5]). Оскільки біциклічний моноїд  $\mathbf{B}_\omega$  як інверсна напівгрупа породжується єдиним елементом  $(0, 1)$ , то очевидно, що для його ін'єктивного ендоморфізму  $\varepsilon$  такі умови еквівалентні:

- (i)  $\varepsilon$  — тотожне відображення;
- (ii) існує неїдемпотентний елемент  $(i, j) \in \mathbf{B}_\omega$  такий, що  $(i, j)\varepsilon = (i, j)$ ;
- (iii)  $\varepsilon$  має хоча б два нерухомі елементи.



У випадку ендоморфізму біциклічної напівгрупи  $\mathbf{B}_\omega$  умову (ii) в зауваженні 3 можна замінити твердженням 1.

**Твердження 1.** *Нехай  $\varepsilon$  — ін'єктивний ендоморфізм біциклічної напівгрупи  $\mathbf{B}_\omega$ . Якщо  $(i, j)\varepsilon = (i, j)$  для деякого неединичного елемента  $(i, j) \in \mathbf{B}_\omega$ , то  $\varepsilon$  — тождественне перетворення.*

*Доведення.* Спочатку розглянемо випадок, коли  $(i, i)\varepsilon = (i, i)$  для деякого неединичного ідемпотента  $(i, i) \in \mathbf{B}_\omega$ . З ін'єктивності ендоморфізму  $\varepsilon$  та з того, що гомоморфізм інверсних напівгруп зберігає природний частковий порядок і образ ідемпотента при гомоморфізмі напівгруп є знову ідемпотент (див. твердження 1.4.21 з [10]) випливає, що  $(k, k)\varepsilon = (k, k)$  для всіх  $k = 0, \dots, i - 1$ , оскільки

$$\uparrow_{\leq}(i, i) = \{(k, k) : k = 0, \dots, i\}.$$

Далі скористаємося еквівалентністю умов (i) та (iii) зауваження 3.

Далі припустимо, що  $(i, j) \in \mathbf{B}_\omega$  не є ідемпотентом. За твердженням 1.4.21 з [10] матимемо, що

$$\begin{aligned} (i, i)\varepsilon &= ((i, j) \cdot (j, i))\varepsilon \\ &= ((i, j) \cdot (i, j)^{-1})\varepsilon \\ &= (i, j)\varepsilon \cdot ((i, j)^{-1})\varepsilon \\ &= (i, j)\varepsilon \cdot ((i, j)\varepsilon)^{-1} \\ &= (i, j) \cdot (i, j)^{-1} \\ &= (i, j) \cdot (j, i) \\ &= (i, i), \end{aligned}$$

та аналогічно,  $(j, j)\varepsilon = (j, j)$ .

Оскільки  $(i, j) \neq (0, 0)$ , то  $(i, i) \neq (j, j)$ . Отже,  $(i, i)\varepsilon = (i, i)$  для деякого неединичного ідемпотента  $(i, i) \in \mathbf{B}_\omega$ . Далі скористаємося попередньою частиною доведення.  $\square$

Тому природно виникає таке запитання.

**Питання 1.** *Чи можна послабити умови теореми 2?*

З прикладу 1 випливає, що умову про ін'єктивність ендоморфізму  $\varepsilon$  моноїда  $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$  не можна вилучити в припущеннях теореми 2.

**Приклад 1.** Нехай  $\mathcal{F}$  — довільна  $\omega$ -замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у  $\omega$ , яка містить хоча б дві множини. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що  $[0], [1] \in \mathcal{F}$ . Означимо відображення  $\mu_0: \mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$  за формулою

$$(i, j, [p])\mu_0 = (i, j, [0]), \quad \text{для довільних } i, j \in \omega \text{ і } [p] \in \mathcal{F}.$$

За твердженням 5 [3] відображення  $\mu_0$  є ендоморфізмом напівгрупи  $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$ , причому піднапівгрупа  $\mathbf{B}_\omega^{\{[0]\}}$  є гомоморфним ретрактом моноїда  $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$  стосовно ендоморфізму  $\mu_0$ , а отже, виконуються умови (ii) і (iii) теореми 2, і не виконується умова (i).

З прикладу 2 випливає, що умову про те, що ендоморфізм  $\varepsilon$  моноїда  $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$  має хоча б три нерухомі елементи, не можна послабити в умові (iii) теореми 2.

**Приклад 2.** Нехай  $\mathcal{F} = \{[0], [1]\}$ . Зафіксуємо довільне натуральне число  $k \geq 2$ .  
 Означимо відображення  $\mu_k: \mathbf{B}_\omega^\mathcal{F} \rightarrow \mathbf{B}_\omega^\mathcal{F}$  за формулою

$$(i, j, [p])\mu_k = (ki, kj, [p]).$$

Очевидно, що так означене відображення  $\mu_k$  ін'єктивне. Доведемо, що  $\mu_k: \mathbf{B}_\omega^\mathcal{F} \rightarrow \mathbf{B}_\omega^\mathcal{F}$  — гомоморфізм. Надалі будемо вважати, що  $p \in \{0,1\}$ . Тоді маємо, що

$$\begin{aligned} ((i_1, j_1, [p]) \cdot (i_2, j_2, [0]))\mu_k &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + [p]) \cap [0])\mu_k, & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, [p] \cap [0])\mu_k, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [p] \cap (i_2 - j_1 + [0]))\mu_k, & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0])\mu_k, & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, [p])\mu_k, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [p])\mu_k, & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (k(i_1 - j_1 + i_2), kj_2, [0]), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (ki_1, kj_2, [p]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (ki_1, k(j_1 - i_2 + j_2), [p]), & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (i_1, j_1, [p])\mu_k \cdot (i_2, j_2, [0])\mu_k &= (ki_1, kj_1, [p]) \cdot (ki_2, kj_2, [0]) = \\ &= \begin{cases} (ki_1 - kj_1 + ki_2, kj_2, (kj_1 - ki_2 + [p]) \cap [0]), & \text{якщо } kj_1 < ki_2; \\ (ki_1, kj_2, [p] \cap [0]), & \text{якщо } kj_1 = ki_2; \\ (ki_1, kj_1 - ki_2 + kj_2, [p] \cap (ki_2 - kj_1 + [0])), & \text{якщо } kj_1 > ki_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (k(i_1 - j_1 + i_2), kj_2, [0]), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (ki_1, kj_2, [p]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (ki_1, k(j_1 - i_2 + j_2), [p]), & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} ((i_1, j_1, [p]) \cdot (i_2, j_2, [1]))\mu_k &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + [p]) \cap [1])\mu_k, & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, [p] \cap [1])\mu_k, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [p] \cap (i_2 - j_1 + [1]))\mu_k, & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [1])\mu_k, & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, [1])\mu_k, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [p])\mu_k, & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (k(i_1 - j_1 + i_2), kj_2, [1]), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (ki_1, kj_2, [1]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (ki_1, k(j_1 - i_2 + j_2), [p]), & \text{якщо } j_1 > i_2, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (i_1, j_1, [p])\mu_k \cdot (i_2, j_2, [1])\mu_k &= (ki_1, kj_1, [p]) \cdot (ki_2, kj_2, [1]) = \\ &= \begin{cases} (ki_1 - kj_1 + ki_2, kj_2, (kj_1 - ki_2 + [p]) \cap [1]), & \text{якщо } kj_1 < ki_2; \\ (ki_1, kj_2, [p] \cap [1]), & \text{якщо } kj_1 = ki_2; \\ (ki_1, kj_1 - ki_2 + kj_2, [p] \cap (ki_2 - kj_1 + [1])), & \text{якщо } kj_1 > ki_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (k(i_1 - j_1 + i_2), kj_2, [1]), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (ki_1, kj_2, [1]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (ki_1, k(j_1 - i_2 + j_2), [p]), & \text{якщо } j_1 > i_2, \end{cases} \end{aligned}$$

а отже,  $\mu_k: B_\omega^{\mathcal{F}} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}}$  — ін'єктивний ендоморфізм.

### Подяка

Автори висловлюють щирю подяку рецензентові за цінні поради та зауваження.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. В. В. Вагнер, *Обоженные группы*, ДАН СССР **84** (1952), 1119–1122.
2. О. Гутік, М. Михаленич, *Про одне узагальнення біциклічного моноїда*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **90** (2020), 5–19. DOI: 10.30970/vmm.2020.90.005-019
3. О. Гутік, М. Михаленич, *Про групові конгруенції на напівгрупі  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  та її гомоморфні ретракти у випадку, коли сім'я  $\mathcal{F}$  складається з непорожніх індуктивних підмножин  $\omega$* , Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **91** (2021), 5–27. DOI: 10.30970/vmm.2021.91.005-027
4. О. В. Гутік, І. В. Позднякова, *Про напівгрупу, породжену розширеною біциклічною напівгрупою та  $\omega$ -замкненою сім'єю*, Мат. методи фіз.-мех. поля **64** (2021), по. 1, 21–34 (arXiv:2107.14075).
5. О. Гутік, О. Прохоренкова, Д. Сех, *Про ендоморфізми біциклічної напівгрупи та розширеної біциклічної напівгрупи*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **92** (2021), 5–16. DOI: 10.30970/vmm.2021.92.005-016
6. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Vol. I, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1961.
7. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Vol. II, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1967.
8. O. Gutik and O. Lysetska, *On the semigroup  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  which is generated by the family  $\mathcal{F}$  of atomic subsets of  $\omega$* , Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **92** (2021), 34–50. DOI: 10.30970/vmm.2021.92.034-050
9. O. Gutik and I. Pozdniakova, *On the group of automorphisms of the semigroup  $B_{\mathbb{Z}}^{\mathcal{F}}$  with the family  $\mathcal{F}$  of inductive nonempty subsets of  $\omega$* , Algebra Discrete Math. **35** (2023), по. 1, 42–61. DOI: 10.12958/adm2010
10. M. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, World Scientific, Singapore, 1998.
11. O. Lysetska, *On feebly compact topologies on the semigroup  $B_\omega^{\mathcal{F}^1}$* , Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **90** (2020), 48–56. DOI: 10.30970/vmm.2020.90.048-056
12. M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

Стаття: надійшла до редколегії 07.02.2022  
доопрацьована 31.03.2022  
прийнята до друку 22.06.2022

ON AUTOMORPHISMS OF THE SEMIGROUP  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  IN THE CASE  
WHEN THE FAMILY  $\mathcal{F}$  CONSISTS OF NONEMPTY INDUCTIVE  
SUBSETS OF  $\omega$

Oleg GUTIK, Mykola Mykhalenych

*Ivan Franko National University of Lviv,  
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine  
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,  
mykhalenychm@gmail.com*

Let  $\mathcal{F}$  be a family of nonempty inductive subsets of  $\omega$ . It is proved that in the case when  $|\mathcal{F}| \geq 2$  an injective endomorphism  $\varepsilon$  of the semigroup  $B_\omega^{\mathcal{F}}$  is the identity map if and only if  $\varepsilon$  has three distinct fixed points, which is equivalent to existence non-idempotent element  $(i, j, [p]) \in B_\omega^{\mathcal{F}}$  such that  $(i, j, [p])\varepsilon = (i, j, [p])$ .

*Key words:* inverse semigroup, automorphism, endomorphism, bicyclic monoid, extension of the bicyclic monoid, fixed point.