ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2021. Випуск 92. С. 61–76
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2021. Issue 92. P. 61–76
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2021.92.061-076

УДК 512.546

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЗА МАРКОВИМ НАБОРІВ ТИХОНОВСЬКИХ ПРОСТОРІВ 4: УЗАГАЛЬНЕНІ РЕТРАКТИ ТА ІЗОМОРФНА КЛАСИФІКАЦІЯ

Назар ПИРЧ

Українська Академія Друкарства,
вул. Підголоско, 19, 79020, Львів
e-mails: pnazar@ukr.net

Вивчаємо методи зведення задач ізоморфної класифікації вільних топологічних груп над тихоновськими просторами та підгруп, породжених їхніми просторами до аналогічної задачі з меншою кількістю підпросторів.

Ключові слова: вільна топологічна група, сім'я топологічних просторів, узагальнений ретракт.

1. Вступ

Поняття еквівалентних за Марковим наборів тихоновських просторів було введено в [4]. ***Порядком*** задачі про M-еквівалентність наборів тихоновських просторів будемо називати кількість підпросторів у кожному з наборів. Мета нашої праці — запропонувати методи пониження порядку задачі про еквівалентність наборів.

Для тихоновського простору X через $F(X)$ будемо позначати вільну топологічну групу над X. Для підпростору $Y \subseteq X$ тихоновського простору X через $G(Y)$ будемо позначати підгрупу в $F(X)$, породжену множиною твірних Y. Нехай $\{X_i : i \in I\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_i : i \in I\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y. Скажемо, що сім'я $(X, \{X_i : i \in I\})$ є *M-еквівалентною* сім'ї $(Y, \{Y_i : i \in I\})$, якщо такий існує топологічний ізоморфізм $h\colon F(X) \to F(Y)$, що $h(X_i) \subseteq G(Y_i)$ і $h^{-1}(Y_i) \subseteq G(X_i)$ для всіх $i \in I$. Будемо позначати це так:

$$(X, \{X_i : i \in I\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_i : i \in I\}).$$

Міняючи в цьому означенні функтор вільної топологічної групи на функтор вільної абелевої топологічної групи чи вільного локально опуклого простору, отримаємо означення відповідно A-еквівалентних та L-еквівалентних наборів просторів.

2020 Mathematics Subject Classification: 22A05

У другому підрозділі ми доводимо деякі загальні теореми, що допомагають звести задачу ізоморфної класифікації вільних груп над тихоновськими просторами та їх підпросторами до аналогічної задачі, але з меншою кількістю елементів у наборах. В третьому розділі застосовуємо отримані результати до нульвимірних локально компактних метризованих сепарабельних просторів, зокрема і зліченних компактних просторів.

2. Узагальнені ретракти та еквівалентність наборів

Підпростір Y топологічного простору X називається *G-ретрактом* цього простору, якщо довільне неперервне відображення $f\colon Y \to H$ з простору Y у довільну топологічну групу H допускає неперервне продовження на X. Зокрема, в цьому випадку кожна неперервна псевдометрика, означена на просторі Y, допускає продовження до неперервної псевдометрики на X, а отже, підгрупа $G(Y)$ в $F(X)$ топологічно ізоморфна вільній топологічній групі $F(Y)$.

Нехай $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я замкнених підпросторів тихоновського простору X, $X = \bigcup\limits_{s\in S} X_s$, $K = \bigcap\limits_{s\in S} X_s \neq \varnothing$. Скажемо, що сім'я $\{X_s : s \in S\}$ є *Δ-системою*, якщо для довільних $i, j \in S$ $(i \neq j)$ маємо, що $X_i \cap X_j = K$. Якщо простір K є одноточковим, то отримаємо означення букета $\bigvee\limits_{s\in S}(X_s, x_s)$ сім'ї топологічних просторів $\{(X_s, x_s) : s \in S\}$ з відміченими точками [10].

Для топологічного простору X і елемента $a \in X$ позначимо через $FG(X, a)$ вільну топологічну групу в сенсі Граєва над простором X з одиницею a [1].

Такі результати, які були доведені в [6] будуть ми застосовуватимемо для наших досліджень.

Теорема 1. *Нехай підпростір A є G-ретрактом цілком регулярного простору X, підпростір B є G-ретрактом цілком регулярного простору Y, причому $FG(X/A) \simeq FG(Y/B)$. Тоді довільний топологічний ізоморфізм $i\colon F(A) \to F(B)$ може бути продовжений до топологічного ізоморфізму $j\colon F(X) \to F(Y)$.*

Теорема 2. *Для просторів X та Y такі умови еквівалентні:*

(1) *для довільних точок $a \in X$, $b \in Y$ існує топологічний ізоморфізм $h\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $h(a) = b$;*
(2) *вільні топологічні групи в сенсі Граєва просторів $FG(X, a)$ та $FG(Y, b)$ топологічно ізоморфні.*

Простори, які задовольняють умови теореми 2, називатимемо M^*-еквівалентними. Як з'ясували в [11], відношення A^*-еквівалентності збігається з відношенням A-еквівалентності, а відношення L^*-еквівалентності збігається з відношенням L-еквівалентності.

Твердження 1. *Такі умови еквівалентні для тихоновських просторів X і Y та їхніх G-ретрактів $A \subseteq X$ і $B \subseteq Y$:*

(1) $(X, A) \overset{M}{\sim} (Y, B)$;
(2) $X/A \overset{M^*}{\sim} Y/B$ *та* $A \overset{M}{\sim} B$.

Для сім'ї $\{G_s : s \in S\}$ топологічних груп позначимо через $\prod^{*} G_s$ вільний добуток сім'ї груп $\{G_s : s \in S\}$ [8].

Теорема 3. *Нехай $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів тихоновського простору X, $K = \bigcap_{s\in S} X_s$, $\{K_t : t \in T\}$ — сім'я підпросторів простору K і виконуються умови: $X = \bigcap_{s\in S} X_s$, $X_i \cap X_j = K$ при $i \neq j$, а підпростір K є G-ретрактом в X. Нехай також $\{Y_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів тихоновського простору Y, $P = \bigcap_{s\in S} Y_s$, $\{P_t : t \in T\}$ — сім'я підпросторів простору P, причому виконуються умови $Y = \bigcup_{s\in S} Y_s$, $Y_i \cap Y_j = P$ при $i \neq j$, а підпростір P є G-ретрактом в Y. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, \{X_s : s \in S\}, \{K_t : t \in T\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\}, \{P_t : t \in T\})$;

(2) $(K, \{K_t : t \in T\}) \overset{M}{\sim} (P, \{P_t : t \in T\})$ *і* $X_s/K \overset{M^*}{\sim} Y_s/P$ *для всіх* $s \in S$.

Доведення. (1)⇒(2) Нехай $i\colon F(X) \to F(Y)$ — топологічний ізоморфізм такий, що $i(G(X_s)) = G(Y_s)$ для всіх $s \in S$, $i(G(K_t)) = G(P_t)$ для всіх $t \in T$. Той факт, що $(K, \{K_t : t \in T\}) \overset{M}{\sim} (P, \{P_t : t \in T\})$ випливає з того, що підгрупа $G(K)$ топологічно ізоморфна вільній топологічній групі $F(K)$, а підгрупа $G(P)$ топологічно ізоморфна вільній топологічній групі $F(P)$.

Умова $X_s/K \overset{M^*}{\sim} Y_s/P$ випливає з твердження 1.

(2)⇒(1) Як було доведено у [6] для довільного простору X та його G-ретракту K існує топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(K) * FG(X/K)$ такий, що $i(G(K)) = F(K)$. Фактор-простір X/K природно гомеоморфний букетові просторів X_s/K. Тому вільна топологічна група $FG(X/K)$ природно топологічно ізоморфна вільному топологічному добутку $\prod^{*}_{s\in S} FG(X_s/K)$. Отже, існує топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(K) * \prod^{*}_{s\in S} FG(X_s/K)$ для якого, за побудовою, $i(G(X_s)) = F(K) * FG(X_s/K)$ для всіх $s \in S$. Аналогічно, існує такий топологічний ізоморфізм $j\colon F(Y) \to F(P) * \prod^{*}_{s\in S} FG(Y_s/P)$, що $j(G(Y_s)) = F(P) * FG(Y_s/P)$ для всіх $s \in S$. Оскільки $\Big(K, \{K_t : t \in T\}) \overset{M}{\sim} (P, \{P_t : t \in T\}\Big)$, то існує такий топологічний ізоморфізм $u\colon F(K) \to F(P)$, що $u(G(K_t)) = G(P_t)$ для всіх $t \in T$. Позначимо через $u_s\colon FG(X_s/K) \to FG(Y_s/P)$ — топологічний ізоморфізм. З означення вільного топологічного добутку існує топологічний ізоморфізм

$$m\colon F(K) * \prod_{s\in S}{}^{*} FG(X_s/K) \to F(P) * \prod_{s\in S}{}^{*} FG(Y_s/P),$$

який є вільним добутком ізоморфізму u та сім'ї ізоморфізмів $\{u_s : s \in S\}$. Для нього, відповідно, виконуються умови $m(F(K)) = F(P)$, $m(FG(X_s/K)) = FG(Y_s/P)$

для всіх $s \in S$. Тоді гомоморфізм $l = j^{-1} \circ m \circ i\colon F(X) \to F(Y)$ є топологічним ізоморфізмом. Причому для всіх $s \in S$ виконується

$$\begin{aligned} l(G(X_s)) &= (j^{-1} \circ m \circ i)(G(X_s)) = \\ &= (j^{-1} \circ m)(F(K) * FG(X_s/K)) = \\ &= j^{-1}(F(P) * FG(Y_s/P)) = \\ &= G(Y_s). \end{aligned}$$

Для довільного $t \in T$ будемо мати також, що

$$\begin{aligned} l(G(K_t)) &= (j^{-1} \circ m \circ i)(G(K_t)) = \\ &= (j^{-1} \circ m)(G(K_t)) = \\ &= (j^{-1} \circ u)(G(K_t)) = \\ &= j^{-1}(G(P_t)) = \\ &= G(P_t). \end{aligned}$$

□

Якщо множина T у теоремі 3 порожня, а простори K і P одноточкові, то отримуємо такий наслідок

Наслідок 1. *Нехай $X = \bigvee_{s\in S}(X_s, x_s)$ — букет сім'ї тихоновських просторів X_s з відміченими точками x_s, $Y = \bigvee_{s\in S}(Y_s, y_s)$ — букет сім'ї тихоновських просторів Y_s з відміченими точками y_s. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\})$;
(2) $X_s \overset{M^*}{\sim} Y_s$ *для всіх* $s \in S$.

Наслідок 2 отримуємо з теореми 3, якщо прийняти $S = \{1, 2\}$, $X_1 = X$, $X_2 = K$, $Y_1 = Y$, $Y_2 = P$.

Наслідок 2. *Нехай підпростір K є G-ретрактом тихоновського простору X, підпростір P є G-ретрактом тихоновського простору Y, $\{A_i : i \in I\}$ — сім'я підпросторів в K, $\{B_i : i \in I\}$ — сім'я підпросторів в P. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, K, \{A_i : i \in I\}) \overset{M}{\sim} (Y, P, \{B_i : i \in I\})$;
(2) $(K, \{A_i : i \in I\}) \overset{M}{\sim} (P, \{B_i : i \in I\})$ *і* $X/K \overset{M^*}{\sim} Y/P$.

Наслідок 3. *Нехай $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я диз'юнктних підпросторів тихоновського простору X, причому підпростір $K = \bigcup_{s\in S} X_s$ є G-ретрактом в X. Нехай також $\{Y_s : s \in S\}$ — сім'я диз'юнктних підпросторів тихоновського простору Y, причому підпростір $P = \bigcup_{s\in S} Y_s$ є G-ретрактом в P. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\})$;
(2) $X/K \overset{M^*}{\sim} Y/P$ *і* $X_s \overset{M}{\sim} Y_s$ *для всіх* $s \in S$.

Доведення. (1)⇒(2) За наслідком 2 $X/K \overset{M^*}{\sim} Y/P$ і

$$(K, \{X_s : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (P, \{Y_s : s \in S\}).$$

Оскільки підпростір X_s є ретрактом простору K, то групи $G(X_s)$ і $F(X_s)$ топологічно ізоморфні. Аналогічно, оскільки групи $G(Y_s)$ і $F(Y_s)$ топологічно ізоморфні, то

$$F(X_s) \simeq G(X_s) \simeq G(Y_s) \simeq F(Y_s).$$

(2)⇒(1) З твердження 4 [4]випливає, що

$$(K, \{X_s : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (P, \{Y_s : s \in S\}).$$

Далі застосуємо наслідок 2. □

Наслідок 4. *Нехай $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів тихоновського простору X, які утворюють букет, причому підпростір $K = \bigcup_{s \in S} X_s$ є G-ретрактом в X. Нехай також $\{Y_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів тихоновського простору Y, які утворюють букет, причому підпростір $P = \bigcup_{s \in S} Y_s$ є G-ретрактом в P. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\})$;
(2) $X/K \overset{M^*}{\sim} Y/P$ *і* $X_s \overset{M^*}{\sim} Y_s$ *для всіх* $s \in S$.

Доведення. За наслідком 2 умова

$$(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\})$$

еквівалентна умові

$$[(K, \{X_s : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (P, \{Y_s : s \in S\})] \wedge [X/K \overset{M^*}{\sim} Y/P].$$

За наслідком 1 умова

$$(K, \{X_s : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (P, \{Y_s : s \in S\})$$

еквівалентна умові $X_s \overset{M^*}{\sim} Y_s$ для всіх $s \in S$. □

Якщо множина T у теоремі 3 порожня, то отримуємо такий наслідок.

Наслідок 5. *Нехай $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів тихоновського простору X, які утворюють Δ-систему, $\{Y_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів тихоновського простору Y, які утворюють Δ-систему, $K = \bigcap_{s \in S} X_s$, $P = \bigcap_{s \in S} Y_s$, $X = \bigcup_{s \in S} X_s$, $Y = \bigcup_{s \in S} Y_s$, підпростір K є G-ретрактом в X, підпростір P є G-ретрактом в Y. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\})$;
(2) $K \overset{M}{\sim} P$ *і* $X_s/K \overset{M^*}{\sim} Y_s/P$ *для всіх* $s \in S$.

Наслідок 6. *Нехай X, Y — тихоновські простори $A_1, A_2 \subseteq X$, $B_1, B_2 \subseteq Y$ — їхні замкнені підпростори, причому підпростір $A_1 \cup A_2$ є G-ретрактом в X, підпростір $B_1 \cup B_2$ є G-ретрактом в Y, підпростір $A_1 \cap A_2$ є G-ретрактом в $A_1 \cup A_2$, підпростір $B_1 \cap B_2$ є G-ретрактом в $B_1 \cup B_2$. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, A_1, A_2) \overset{M}{\sim} (Y, B_1, B_2)$;

(2) $[X/(A_1 \cup A_2) \overset{M^*}{\sim} Y/(B_1 \cup B_2)] \wedge [A_1/(A_1 \cap A_2) \overset{M^*}{\sim} B_1/(B_1 \cap B_2)] \wedge$
$\wedge [A_2/(A_1 \cap A_2) \overset{M^*}{\sim} B_2/(B_1 \cap B_2)] \wedge [A_1 \cap A_2 \overset{M}{\sim} B_1 \cap B_2]$.

Доведення. За наслідком 2 умова $(X, A_1, A_2) \overset{M}{\sim} (Y, B_1, B_2)$ еквівалентна умові

$$[(A_1 \cup A_2, A_1, A_2) \overset{M}{\sim} (B_1 \cup B_2, B_1, B_2)] \wedge [X/(A_1 \cup A_2) \overset{M^*}{\sim} Y/(B_1 \cup B_2)].$$

Якщо в наслідку 5 прийняти $S = \{1, 2\}$, то отримуємо, що умова

$$(A_1 \cup A_2, A_1, A_2) \overset{M}{\sim} (B_1 \cup B_2, B_1, B_2)$$

еквівалентна умові

$$[A_1/(A_1 \cap A_2) \overset{M^*}{\sim} B_1/(B_1 \cap B_2)] \wedge [A_2/(A_1 \cap A_2) \overset{M^*}{\sim} B_2/(B_1 \cap B_2)] \wedge$$
$$\wedge [A_1 \cap A_2 \overset{M}{\sim} B_1 \cap B_2].$$

□

Теорема 4. *Нехай $X_n \subseteq X_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq X_1 \subseteq X_0$, $Y_n \subseteq Y_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq Y_1 \subseteq Y_0$, причому підпростір X_{i+1} є G-ретрактом в X_i, підпростір Y_{i+1} є G-ретрактом в Y_i. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n) \overset{M}{\sim} (Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$;

(2) $X_i/X_{i+1} \overset{M^*}{\sim} Y_i/Y_{i+1}$ *при* $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ *і* $X_n \overset{M}{\sim} Y_n$.

Доведення. (1)⇒(2) Умова

$$(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n) \overset{M}{\sim} (Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

за наслідком 2 еквівалентна умові

$$[(X_1, X_2, \ldots, X_n) \overset{M}{\sim} (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)] \wedge [X_0/X_1 \overset{M^*}{\sim} Y_0/Y_1].$$

Так само умова

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) \overset{M}{\sim} (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

еквівалентна умові

$$[(X_2, X_3, \ldots, X_n) \overset{M}{\sim} (Y_2, Y_3, \ldots, Y_n)] \wedge [X_1/X_2 \overset{M^*}{\sim} Y_1/Y_2].$$

Продовжуючи цей ланцюжок міркувань, на n-му кроці отримуємо, що початкова умова еквівалентна умові

$$[X_0/X_1 \overset{M}{\sim} Y_0/Y_1] \wedge [X_1/X_2 \overset{M^*}{\sim} Y_1/Y_2] \wedge \ldots \wedge [X_{n-2}/X_{n-1} \overset{M^*}{\sim} Y_{n-2}/Y_{n-1}] \wedge$$
$$\wedge [(X_{n-1}, X_n) \overset{M^*}{\sim} (Y_{n-1}, Y_n)].$$

Умова $(X_{n-1}, X_n) \overset{M}{\sim} (Y_{n-1}, Y_n)$ за наслідком 2 еквівалентна умові

$$[X_{n-1}/X_n \overset{M^*}{\sim} Y_{n-1}/Y_n)] \wedge [X_n \overset{M}{\sim} Y_n],$$

що і доводить нашу імплікацію.

Повторивши ці міркування в оберненому порядку, отримаємо доведення імплікації (2)⇒(1). □

Твердження 2. *Якщо K_1, K_2 — паралельні G-ретракти тихоновського простору X, то $(X, K_1, K_2) \overset{M}{\sim} (X, K_2, K_1)$.*

Доведення. Нехай $R_1\colon F(X) \to F(K_1)$, $R_2\colon F(X) \to F(K_2)$ — паралельні ретракції. Розглянемо відображення $i\colon X \to F(X)$ визначене за формулою $i(x) = R_1(x)x^{-1}R_2(x)$. Продовжимо відображення i до гомоморфізму $I\colon F(X) \to F(X)$. Як було доведено в [3], $I \circ I = 1_{F(X)}$, тобто відображення I є топологічним ізоморфізмом, причому $I(K_1) \subseteq G(K_2)$ та $I(K_2) \subseteq G(K_1)$. □

Наслідок 7. *Нехай X — тихоновський простір, $a, b \in X$. Тоді*

$$(X, \{a\}, \{b\}) \overset{M}{\sim} (X, \{b\}, \{a\}).$$

Теорема 5. *Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — сім'я підпросторів тихоновського простору X, причому $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ і при довільних $i \neq j$ виконується рівність $X_i \cap X_j = K$, де $K = \bigcap_{i=1}^{n} X_i$, а підпростір K є G-ретрактом в X. Нехай також $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — сім'я підпросторів тихоновського простору Y, причому $Y = \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$ і при довільних $i \neq j$ виконується рівність $Y_i \cap Y_j = P$, де $P = \bigcap_{i=1}^{n} X_i$, а підпростір P є G-ретрактом в Y Приймемо $Z_i = \bigcup_{j=1}^{i} X_j$, $P_i = \bigcup_{j=1}^{i} Y_j$, $Z_0 = K$, $P_0 = P$. Тоді такі умови еквівалентні:*

1. *$(X, X_1, X_2, \ldots, X_n) \overset{M}{\sim} (Y, Y_1, Y_2, \ldots Y_n)$;*
2. *$(X, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) \overset{M}{\sim} (Y, P_1, P_2, \ldots P_n)$.*

Аналогічні твердження виконуються для відношень A-еквівалентності та L-еквівалентності.

Доведення. Перша умова за наслідком 5 еквівалентна кон'юнкції

$$\left[\bigwedge_{i=1}^{n} (X_i/K \overset{M^*}{\sim} Y_i/P)\right] \wedge [K \overset{M}{\sim} P].$$

Друга умова за теоремою 4 еквівалентна кон'юнкції

$$\left[\bigwedge_{i=1}^{n} (Z_i/Z_{i-1} \overset{M^*}{\sim} P_i/P_{i-1})\right] \wedge [X/Z_n \overset{M}{\sim} Y/P_n].$$

Залишається зауважити, що простір Z_i/Z_{i-1} гомеоморфний простору X_i/K, а простір P_i/P_{i-1} гомеоморфний простору Y_i/K. □

Теорема 6. *Нехай X, Y — тихоновські простори, $A_1, A_2 \subseteq X$, B_1, B_2 — їхні G-ретракти, причому підпростори $A_1 \cup A_2$ та $A_1 \cap A_2$ є G-ретрактами в X, а підпростори $B_1 \cup B_2$ та $B_1 \cap B_2$ є G-ретрактами в B. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, A_1, A_2) \overset{M}{\sim} (Y, B_1, B_2)$;

(2) $(X, A_1 \cup A_2, A_1, A_1 \cap A_2) \overset{M}{\sim} (Y, B_1 \cup B_2, B_1, B_1 \cap B_2)$.

Аналогічні твердження виконуються для відношень A-еквівалентності та L-еквівалентності.

Доведення. За теоремою 3 умова (1) еквівалентна умові

$$[X/(A_1 \cup A_2) \overset{M^*}{\sim} Y/(B_1 \cup B_2)] \wedge [A_1/(A_1 \cap A_2) \overset{M^*}{\sim} B_1/(B_1 \cap B_2)] \wedge$$
$$\wedge [A_2/(A_1 \cap A_2) \overset{M^*}{\sim} B_2/(B_1 \cap B_2)] \wedge [A_1 \cap A_2 \overset{M}{\sim} B_1 \cap B_2].$$

За теоремою 5 умова (2) еквівалентна умові

$$[X/(A_1 \cup A_2) \overset{M^*}{\sim} Y/(B_1 \cup B_2)] \wedge [(A_1 \cup A_2)/A_1 \overset{M^*}{\sim} (B_1 \cup B_2)/B_1] \wedge$$
$$\wedge [A_2/(A_1 \cap A_2) \overset{M^*}{\sim} B_2/(B_1 \cap B_2)] \wedge [A_1 \cap A_2 \overset{M}{\sim} B_1 \cap B_2].$$

Залишається зауважити, що простір $(A_1 \cup A_2)/A_1$ гомеоморфний простору $A_2/(A_1 \cap A_2)$, а простір $(B_1 \cup B_2)/B_1$ — простору $B_2/(B_1 \cap B_2)$. □

Якщо в теоремі 6 приймемо $B_1 = A_2$, $B_2 = A_1$, то отримуємо такий наслідок.

Наслідок 8. *Нехай X — тихоновський простір, $A_1, A_2 \subseteq X$, причому підпростори A_1, A_2, $A_1 \cup A_2$ та $A_1 \cap A_2$ є G-ретрактами в X. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, A_1, A_2) \overset{M}{\sim} (X, A_2, A_1)$;

(2) $A_1 \overset{M}{\sim} A_2$, $A_1/(A_1 \cap A_2) \overset{M}{\sim} A_2/(A_1 \cap A_2)$.

Аналогічні твердження виконуються для відношень A-еквівалентності та L-еквівалентності.

Застосувавши теорему 6 до множин $A_1 = Z_1$, $A_2 = W_1 \cup (Y_1 \setminus Z_1)$, $B_2 = Z_2$, $B_2 = W_2 \cup (Y_2 \setminus Z_2)$, отримуємо наслідок.

Наслідок 9. *Нехай $W_i \subseteq Z_i \subseteq Y_i \subseteq X_i$, а підпростори W_i, Z_i, Y_i та $W_i \cup (Y_i \setminus Z_i)$ є G-ретрактами в X_i при $i = 1, 2$. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X_1, Y_1, Z_1, W_1) \overset{M}{\sim} (X_1, Y_2, Z_2, W_2)$;

(2) $(X_1, Z_1, W_1 \cup (Y_1 \setminus Z_1)) \overset{M}{\sim} (X_2, Z_2, W_2 \cup (Y_2 \setminus Z_2))$.

Аналогічні твердження виконуються для відношень A-еквівалентності та L-еквівалентності.

3. Локально компактні нульвимірні сепарабельні метризовані простори та еквівалентність наборів

Як було з'ясовано у [7], для локально-компактних нульвимірних метризованих сепарабельних просторів (надалі будемо вживати абревіатуру LcZdMS-простір) ізоморфні класифікації вільних топологічних груп у сенсі Маркова та Граєва, вільних абелевих топологічних груп, вільних локально опуклих просторів збігаються, тобто відношення M, M^*, A та L-еквівалентності збігаються. Будемо називати простори еквівалентні в цьому сенсі f-еквівалентними. Враховуючи те, що кожен замкнений підпростір нульвимірного метризованого простору є його ретрактом (а отже, і G-ретрактом)отримаємо ряд класифікацій наборів LcZdMS-просторів. Особливим випадком LcZdMS-просторів є зліченні компактні простори, ізоморфна класифікація вільних об'єктів над якими вперше отримано в [1].

Доведення наступної теореми випливає з наслідку 5.

Теорема 7. *Нехай X і Y — тихоновські простори, $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq X$, $B_1, B_2, \dots, B_n \subseteq Y$ — їхні замкнені підпростори, що утворюють Δ-системи, $A = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$, $B = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i$, причому $W = (X/A) \oplus (Y/B) \oplus X \oplus Y$ є LcZdMS-простором. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{M}{\sim} (Y, B_1, B_2, \dots, B_n)$;
(2) $(X, A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{A}{\sim} (Y, B_1, B_2, \dots, B_n)$;
(3) $(X, A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{L}{\sim} (Y, B_1, B_2, \dots, B_n)$;
(4) $\left[X/\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \overset{f}{\sim} Y/(\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i)\right] \wedge [A_1/A \overset{f}{\sim} B_1/B] \wedge [A_2/A \overset{f}{\sim} B_2/B] \wedge \dots \wedge$
$\wedge\, [A_n/A \overset{f}{\sim} B_n/B] \wedge [A \overset{f}{\sim} B]$.

Наслідок 10 випливає з того факту, що кожен зліченний компактний простір є LcZdMS-простором і для замкненого підпростору A зліченного компактного простору X простір $A \oplus X/A$ є зліченним компактним.

Наслідок 10. *Нехай X і Y — зліченні компактні простори, $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq X$, $B_1, B_2, \dots, B_n \subseteq Y$ — їхні замкнені підпростори, що утворюють Δ-системи, $A = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$, $B = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i$, Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{M}{\sim} (Y, B_1, B_2, \dots, B_n)$;
(2) $(X, A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{A}{\sim} (Y, B_1, B_2, \dots, B_n)$;
(3) $(X, A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{L}{\sim} (Y, B_1, B_2, \dots, B_n)$;
(4) $\left[X/\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \overset{f}{\sim} Y/(\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i)\right] \wedge [A_1/A \overset{f}{\sim} B_1/B] \wedge [A_2/A \overset{f}{\sim} B_2/B] \wedge \dots \wedge$
$\wedge\, [A_n/A \overset{f}{\sim} B_n/B] \wedge [A \overset{f}{\sim} B]$.

З теореми 6 та ізоморфної класифікації вільних об'єктів над LcZdMS-просторами [7] випливає таке твердження.

Твердження 3. *Нехай X і Y — тихоновські простори, $A_1, A_2 \subseteq X$, $B_1, B_2 \subseteq Y$ — їхні замкнені підпростори, $A = A_1 \cap A_2$, $B = B_1 \cap B_2$, причому*

$$W = (X/A) \oplus (Y/B) \oplus X \oplus Y$$

є $LcZdMS$-простором. Тоді такі умови еквівалентні:

(1) $(X, A_1, A_2) \overset{M}{\sim} (Y, B_1, B_2)$;
(2) $(X, A_1, A_2) \overset{A}{\sim} (Y, B_1, B_2)$;
(3) $(X, A_1, A_2) \overset{L}{\sim} (Y, B_1, B_2)$;
(4) $[X/(A_1 \cup A_2)) \overset{f}{\sim} Y/(B_1 \cup B_2)] \wedge [A_1/A \overset{f}{\sim} B_1/B] \wedge [A_2/A \overset{f}{\sim} B_2/B] \wedge [A \overset{f}{\sim} B]$.

З врахуванням того факту, що для замкненого підпростору A зліченного компактного простору X простір $A \oplus X/A$ є зліченним компактним, отримаємо такий наслідок.

Наслідок 11. *Нехай X і Y — зліченні компактні, $A_1, A_2 \subseteq X$, $B_1, B_2 \subseteq Y$ — їхні замкнені підпростори, $A = A_1 \cap A_2$, $B = B_1 \cap B_2$. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, A_1, A_2) \overset{M}{\sim} (Y, B_1, B_2)$;
(2) $(X, A_1, A_2) \overset{A}{\sim} (Y, B_1, B_2)$;
(3) $(X, A_1, A_2) \overset{L}{\sim} (Y, B_1, B_2)$;
(4) $[X/(A_1 \cup A_2)) \overset{f}{\sim} Y/(B_1 \cup B_2)] \wedge [A_1/A \overset{f}{\sim} B_1/B] \wedge [A_2/A \overset{f}{\sim} B_2/B] \wedge [A \overset{f}{\sim} B]$.

З наслідку 1 та ізоморфної класифікації вільних об'єктів над LcZdMS-просторами [7] випливає твердження.

Твердження 4. *Нехай X і Y — тихоновські простори, $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq X$, $B_1, B_2, \ldots, B_n \subseteq Y$ — їхні замкнені підпростори, що утворюють букети, $A = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$, $B = \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i$, причому*

$$W = (X/A) \oplus (Y/B) \oplus X \oplus Y$$

є $LcZdMS$-простором. Тоді такі умови еквівалентні:

(1) $(X, A_1, A_2, \ldots, A_n) \overset{M}{\sim} (Y, B_1, B_2, \ldots, B_n)$;
(2) $(X, A_1, A_2, \ldots, A_n) \overset{A}{\sim} (Y, B_1, B_2, \ldots, B_n)$;
(3) $(X, A_1, A_2, \ldots, A_n) \overset{L}{\sim} (Y, B_1, B_2, \ldots, B_n)$;
(4) $\left[X/\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \overset{f}{\sim} Y/(\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i)\right] \wedge [A_1 \overset{f}{\sim} B_1] \wedge [A_2 \overset{f}{\sim} B_2] \wedge \ldots \wedge [A_n \overset{f}{\sim} B_n]$.

З врахуванням того факту, що для замкненого підпростору A зліченного компактного простору X простір $A \oplus X/A$ є зліченним компактним, отримуємо такий наслідок.

Наслідок 12. *Нехай X і Y — зліченні компактні простори, $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq X$, $B_1, B_2, \dots, B_n \subseteq Y$ — їхні замкнені підпростори, що утворюють букети. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{M}{\sim} (Y, B_1, B_2, \dots, B_n)$;
(2) $(X, A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{A}{\sim} (Y, B_1, B_2, \dots, B_n)$;
(3) $(X, A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{L}{\sim} (Y, B_1, B_2, \dots, B_n)$;
(4) $\left[X/\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \overset{f}{\sim} Y/(\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i)\right] \wedge [A_1 \overset{f}{\sim} B_1] \wedge [A_2 \overset{f}{\sim} B_2] \wedge \dots \wedge [A_n \overset{f}{\sim} B_n]$.

З теореми 4 та ізоморфної класифікації вільних об'єктів над LcZdMS-просторами [7] випливає теорема 8.

Теорема 8. *Нехай X і Y — тихоновські простори, $A_n \subseteq A_{n-1} \subseteq \dots \subseteq A_1 \subseteq X$, $B_n \subseteq B_{n-1} \subseteq \dots \subseteq B_1 \subseteq Y$ — їхні замкнені підпростори, причому*

$$X \oplus X/A_1 \oplus A_1/A_2 \oplus \dots \oplus A_{n-1}/A_n \oplus Y \oplus Y/B_1 \oplus B_1/B_2 \oplus \dots \oplus B_{n-1}/B_n$$

є $LcZdMS$-простором. Тоді такі умови еквівалентні:

(1) $(X, A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{M}{\sim} (Y, B_1, B_2, \dots, B_n)$;
(2) $(X, A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{A}{\sim} (Y, B_1, B_2, \dots, B_n)$;
(3) $(X, A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{L}{\sim} (Y, B_1, B_2, \dots, B_n)$;
(4) $[X/A_1 \overset{f}{\sim} Y/B_1] \wedge [A_1/A_2 \overset{f}{\sim} B_1/B_2] \wedge \dots \wedge [A_{n-1}/A_n \overset{f}{\sim} B_{n-1}/B_n] \wedge [A_n \overset{f}{\sim} B_n]$.

З врахуванням того факту, що для замкненого підпростору A зліченного компактного простору X простір $A \oplus X/A$ є зліченним компактним, отримуємо наслідок 13.

Наслідок 13. *Нехай X і Y — зліченні компактні простори, $A_n \subseteq A_{n-1} \subseteq \dots \subseteq A_1 \subseteq X$, $B_n \subseteq B_{n-1} \subseteq \dots \subseteq B_1 \subseteq Y$ — їхні замкнені підпростори. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{M}{\sim} (Y, B_1, B_2, \dots, B_n)$;
(2) $(X, A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{A}{\sim} (Y, B_1, B_2, \dots, B_n)$;
(3) $(X, A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{L}{\sim} (Y, B_1, B_2, \dots, B_n)$;
(4) $[X/A_1 \overset{f}{\sim} Y/B_1] \wedge [A_1/A_2 \overset{f}{\sim} B_1/B_2] \wedge \dots \wedge [A_{n-1}/A_n \overset{f}{\sim} B_{n-1}/B_n] \wedge$
$\wedge [A_n \overset{f}{\sim} B_n]$.

З наслідку 3 та ізоморфної класифікації вільних об'єктів над LcZdMS-просторами [7] випливає твердження 5.

Твердження 5. *Нехай X і Y — тихоновські простори, $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq X$, $B_1, B_2, \dots, B_n \subseteq Y$ — їхні замкнені диз'юнктні підпростори, причому*

$$X \oplus X/(A_1 \cup \dots \cup A_n) \oplus Y \oplus Y/(B_1 \cup \dots \cup B_n)$$

є $LcZdMS$-простором. Тоді такі умови еквівалентні:

(1) $(X, A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{M}{\sim} (Y, B_1, B_2, \dots, B_n)$;

(2) $(X, A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{A}{\sim} (Y, B_1, B_2, \dots, B_n)$;
(3) $(X, A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{L}{\sim} (Y, B_1, B_2, \dots, B_n)$;
(4) $[X/(A_1 \cup \dots \cup A_n) \overset{f}{\sim} Y/(B_1 \cup \dots \cup B_n)] \wedge [A_1 \overset{f}{\sim} B_1], [A_2 \overset{f}{\sim} B_2] \wedge \ldots \wedge [A_n \overset{f}{\sim} B_n]$.

З врахуванням того факту, що для замкненого підпростору A зліченного компактного простору X простір $A \oplus X/A$ є зліченним компактним, отримуємо такий наслідок.

Наслідок 14. *Нехай X і Y — зліченні компактні простори і $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq X$, $B_1, B_2, \dots, B_n \subseteq Y$ — їхні замкнені диз'юнктні підпростори. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{M}{\sim} (Y, B_1, B_2, \dots, B_n)$;
(2) $(X, A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{A}{\sim} (Y, B_1, B_2, \dots, B_n)$;
(3) $(X, A_1, A_2, \dots, A_n) \overset{L}{\sim} (Y, B_1, B_2, \dots, B_n)$;
(4) $[X/(A_1 \cup \dots \cup A_n) \overset{f}{\sim} Y/(B_1 \cup \dots \cup B_n)] \wedge [A_1 \overset{f}{\sim} B_1], [A_2 \overset{f}{\sim} B_2] \wedge \ldots \wedge [A_n \overset{f}{\sim} B_n]$.

Надалі через D_n позначатимемо скінченний дискретний простір потужності n.

Твердження 6. *Якщо $X \oplus D_n \overset{A}{\sim} Y \oplus D_n$, то $X \overset{A}{\sim} Y$. Аналогічне твердження виконгується і для відношення L-еквівалентності.*

Доведення. Як було доведено в [11], з умови $X \oplus D_1 \overset{A}{\sim} Y \oplus D_1$ випливає, що $X \overset{A}{\sim} Y$. Застосувавши n разів це твердження до просторів $X \oplus D_n$ та $Y \oplus D_n$, отримуємо, що $X \overset{A}{\sim} Y$. □

Будемо говорити, що сім'я топологічних просторів $(X, \{X_i : i \in I\})$ *топологічно еквівалентна* сім'ї топологічних просторів $(Y, \{Y_i : i \in I\})$, якщо існує такий гомеоморфізм $h\colon X \to Y$, що $h(X_i) = Y_i$ для всіх $i \in I$, і це надалі позначатимемо так

$$(X, \{X_i : i \in I\}) \overset{h}{\sim} (Y, \{Y_i : i \in I\}).$$

Лема 1. *Нехай X_1 і X_2 — підпростори тихоновського простору X, Y_1 і Y_2 — підпростори тихоновського простору Y. Якщо $(X, X_1, X_2) \overset{A}{\sim} (Y, Y_1, Y_2)$, то*

а) $|X_1 \cup X_2| = |Y_1 \cup Y_2|$;
б) $|X_1 \cap X_2| = |Y_1 \cap Y_2|$;
в) $|X_1 \setminus X_2| = |Y_1 \setminus Y_2|$.

Доведення. Пункти а) та б) випливають з твердження з [4]. Доведемо твердження в). Якщо $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, то $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, а тому

$$|X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2| = |Y_1| + |Y_2| = |Y_1 \cup Y_2|.$$

Якщо $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, то за твердженням з [5] існує спеціальний топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $i(\langle X_1 \rangle) = \langle Y_1 \rangle$ та $i(\langle X_2 \rangle) = \langle Y_2 \rangle$.

За твердженням з [5] маємо, що $|X_1/X_2| = |Y_1/Y_2|$. Оскільки $|X_1 \setminus X_2| = |X_1/X_2| - 1$ і $|Y_1 \setminus Y_2| = |Y_1/Y_2| - 1$, то $|X_1 \setminus X_2| = |Y_1 \setminus Y_2|$. □

Твердження 7. *Нехай* $\{A_s : s \in S\}$ *— сім'я підпросторів дискретного простору* X, $\{B_s : s \in S\}$ *— сім'я підпросторів тихоновського простору* Y. *Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, \{A_s : s \in S\}) \overset{h}{\sim} (Y, \{B_s : s \in S\})$;
(2) $(X, \{A_s : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{B_s : s \in S\})$;
(3) $(X, \{A_s : s \in S\}) \overset{A}{\sim} (Y, \{B_s : s \in S\})$;
(4) $(X, \{A_s : s \in S\}) \overset{L}{\sim} (Y, \{B_s : s \in S\})$.

Доведення. Імплікації (1)⇒(2), (2)⇒(3) та (3)⇒(4) виконуються для довільних наборів.

Доведемо імплікацію (4)⇒(1). Для довільної підмножини $J \subseteq I$ приймемо

$$X_J = \bigcap_{i \in J} A_i \cap \bigcap_{t \in I \setminus J} X \setminus A_t;$$

$$Y_J = \bigcap_{i \in J} B_i \cap \bigcap_{t \in I \setminus J} Y \setminus B_t.$$

За законом де Моргана отримуємо, що

$$X_J = \bigcap_{i \in J} A_i \cap \left(X \setminus \bigcup_{t \in I \setminus J} A_t \right);$$

$$Y_J = \bigcap_{i \in J} B_i \cap \left(Y \setminus \bigcup_{t \in I \setminus J} B_t \right).$$

Приймемо

$$C_J^1 = \bigcap_{i \in J} A_i;$$

$$C_J^2 = \bigcup_{t \in I \setminus J} A_t;$$

$$D_J^1 = \bigcap_{i \in J} B_i;$$

$$D_J^2 = \bigcup_{t \in I \setminus J} B_t.$$

За твердженням 1 з [4] маємо, що $(X, C_J^1, C_J^2) \overset{L}{\sim} (Y, D_J^1, D_J^2)$. Тоді $X_J = C_J^1 \setminus C_J^2$ і $Y_J = D_J^1 \setminus D_J^2$. За лемою 1 отримуємо, що $|X_J| = |Y_J|$. Нехай $h_J \colon X_J \to Y_J$ — бієктивне відображення. Означимо відображення $h \colon X \to Y$, прийнявши $h(x) = h_J(x)$, якщо $x \in X_J$. За побудовою, якщо $x \in A_s$, то $h(x) \in B_s$. □

Твердження 8. *Нехай* X *і* Y *— LcZdMS-простори,* $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq X$, $B_1, B_2, \ldots, B_n \subseteq Y$ *— іхні скінченні підпростори,* $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ *і* $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. *Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, A_1, A_2, \ldots, A_n) \overset{M}{\sim} (Y, B_1, B_2, \ldots, B_n)$;
(2) $(X, A_1, A_2, \ldots, A_n) \overset{A}{\sim} (Y, B_1, B_2, \ldots, B_n)$;
(3) $(X, A_1, A_2, \ldots, A_n) \overset{L}{\sim} (Y, B_1, B_2, \ldots, B_n)$;
(4) $X \overset{f}{\sim} Y$ *та існує таке бієктивне відображення* $h\colon A \to B$, *що* $h(A_i) = B_i$ *для всіх* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Доведення. Імплікації (1)⇒(2) та (2)⇒(3) виконуються для довільних наборів.

(3)⇒(4) Оскільки кожен замкнений (зокрема скінченний) підпростір нульвимірного простору є його ретрактом, то підпростір A є ретрактом простору X, а підпростір B є ретрактом простору Y. Отже,

$$(A, A_1, A_2, \ldots, A_n) \overset{L}{\sim} (B, B_1, B_2, \ldots, B_n),$$

і тоді за твердженням 7 існує бієктивне відображення $h\colon A \to B$ таке, що $h(A_n) = B_n$.

(4)⇒(1) За твердженням 7 маємо, що

$$(A, A_1, A_2, \ldots, A_n) \overset{L}{\sim} (B, B_1, B_2, \ldots, B_n).$$

Оскільки простір A є ретрактом у X, то підпростір B є ретрактом у Y. То $X \overset{A}{\sim} X/A \oplus D_{m-1}$ і $Y \overset{A}{\sim} Y/B \oplus D_{m-1}$. Отже, $X/A \oplus D_{m-1} \overset{A}{\sim} Y/B \oplus D_{m-1}$. За твердженням 6 отримуємо, що $X/A \overset{A}{\sim} \sim Y/B$. Покажемо, що простори є X/A та Y/B $LcZdMS$-просторами. Фактор-відображення $p\colon X \to X/A$ є досконалим замкненим, а тому простір X/A є локально-компактним метризованим сепарабельним (див. [9, с. 511–512]). Оскільки розмірність зберігається відношенням M-еквівалентності, то за твердженнями 6.2.9 і 7.1.12 з [9] простір X/A є нульвимірним.

Застосувавши наслідок 2, отримуємо, що

$$(X, A_1, A_2, \ldots, A_n) \overset{M}{\sim} (Y, B_1, B_2, \ldots, B_n).$$

□

Твердження 9. *Нехай X і Y — нульвимірні простори,* $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq X$, $B_1, B_2, \ldots, B_n \subseteq Y$ *— їхні скіченні підпростори,* $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ *і* $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. *Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, A_1, A_2, \ldots, A_n) \overset{A}{\sim} (Y, B_1, B_2, \ldots, B_n)$;
(2) $X \overset{A}{\sim} Y$ *та існує бієктивне відображення* $h\colon A \to B$ *таке, що* $h(A_i) = B_i$ *для всіх* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Доведення. (1)⇒(2) Оскільки всі підпростори A_i скінченні, то простір $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ скінченний, а отже, за тведженням 6 існує бієктивне відображення $h\colon A \to B$ таке, що $h(A_i) = B_i$ для всіх $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(2)⇒(1) Оскільки кожен скінченний підпростір нульвимірного простору є його ретрактом, то $X/A \oplus D_{m-1} \overset{A}{\sim} X \overset{A}{\sim} Y \overset{A}{\sim} Y/B \oplus D_{m-1}$, де $m = |A| = |B|$. За наслідком 2 маємо, що $X/A \overset{A}{\sim} Y/B$. З твердження 7 випливає, що

$$(X, A_1, A_2, \ldots, A_n) \overset{A}{\sim} (Y, B_1, B_2, \ldots, B_n).$$

□

Аналогічно до твердження 9 доводиться таке твердження.

Твердження 10. *Нехай X і Y — нульвимірні простори, $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq X$, $B_1, B_2, \ldots, B_n \subseteq Y$ — їхні скінченні підпростори, $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ і $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, A_1, A_2, \ldots, A_n) \overset{L}{\sim} (Y, B_1, B_2, \ldots, B_n)$;

(2) $X \overset{L}{\sim} Y$ *та існує бієктивне відображення $h\colon A \to B$ таке, що $h(A_i) = B_i$ для всіх $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Список використаної літератури

1. М. И. Граев, *Свободные топологические группы*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **12** (1948), no. 3, 279–324.
2. Н. М. Пирч, *M-еквівалентність пар і відображень*, Мат. методи фіз.-мех. поля **49** (2006), no. 2, 21–26.
3. Н. М. Пирч, *Узагальнені ретракти і ізоморфізми вільних топологічних груп*, Мат. студії **33** (2010), no. 1, 29–38.
4. Н. М. Пирч, *Еквівалентність за Марковим наборів тихоновських просторів 1: загальні властивості*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **87** (2017), 38–46.
5. Н. М. Пирч, *Еквівалентність за Марковим наборів тихоновських просторів 3: інваріанти*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **89** (2020), 32–38. DOI: 10.30970/vmm.2020.89.031-038
6. Н. М. Пирч, *Еквівалентність за Марковим пар невідокремлюваних просторів*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **90** (2020), 57–68. DOI: 10.30970/vmm.2020.90.057-068
7. J. Baars, *Equivalence of certain free topological groups*, Commentat. Math. Univ. Carol. **33** (1992), no. 1, 125–130.
8. S. A. Morris, *Free products of topological groups*, Bull. Austral. Math. Soc. **4** (1971), no. 1, 17–29. DOI: 10.1017/S0004972700046219; **Corrigendum:** S. A. Morris, *Free products of topological groups: Corrigendum*, Bull. Austral. Math. Soc. **12** (1975), no. 3, 480. DOI: 10.1017/S0004972700024175
9. R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989, 529 p.
10. O. G. Okunev, *A method for constructing examples of M-equivalent spaces*, Topology Appl. **36** (1990), no. 2, 157–171. DOI: 10.1016/0166-8641(90)90006-N; **Correction:** O. G. Okunev, *A method for constructing examples of M-equivalent spaces*, Topology Appl. **49** (1993), 191–192. DOI: 10.1016/0166-8641(93)90044-E
11. N. M. Pyrch, *Orthogonal retractions and the relation of M-equivalence*, Mat. Studii **20** (2003), no. 2, 151–161.

Стаття: надійшла до редколегії 07.02.2021
доопрацьована 31.07.2021
прийнята до друку 29.12.2021

ON MARKOV EQUIVALENCE OF THE BUNDLES OF TYCHONOFF SPACES 4: GENERALIZED RETRACTS AND CLASSIFICATION

Nazar PYRCH

Ukrainian Academy of Printing,
Pidgolosko Str., 19, 79020, Lviv, Ukraine
e-mails: pnazar@ukr.net

We consider a method of reducing of the problem of isomorphic classification of the free topological groups on Tychonoff spaces and subgroups generated by their subspaces to the same problem with smaller number of subspaces.

Key words: free topological group, bundle of topological spaces, generalized retract.