ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2021. Випуск 92. С. 5–16
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2021. Issue 92. P. 5–16
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2021.92.005-016

УДК 512.53

ПРО ЕНДОМОРФІЗМИ БІЦИКЛІЧНОЇ НАПІВГРУПИ ТА РОЗШИРЕНОЇ БІЦИКЛІЧНОЇ НАПІВГРУПИ

Олег ГУТІК, Оксана ПРОХОРЕНКОВА, Діана СЕХ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,
oksana.prokhorenkova@lnu.edu.ua, diana.sekh@lnu.edu.ua

Доведено, що напівгрупи $\mathbf{End}(\boldsymbol{B}_\omega)$ та $\mathbf{End}(\boldsymbol{B}_\mathbb{Z})$ ендоморфізмів біциклічної напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega$ та ендоморфізмів розширеної біциклічної напівгрупи $\boldsymbol{B}_\mathbb{Z}$ ізоморфні напівпрямим добуткам $(\omega,+)\rtimes_\varphi(\omega,*)$ і $\mathbb{Z}(+)\rtimes_\varphi(\omega,*)$, відповідно.

Ключові слова: напівгрупа, біциклічний моноїд, розширена біциклічна напівгрупа, ендоморфізм, автоморфізм, напівпрямий добуток.

1. Вступ

Ми користуватимемося термінологією з [7, 8, 16, 20]. Надалі у тексті множину невід'ємних цілих чисел позначатимемо через ω, множину цілих чисел через $\mathbb{Z}$, і адитивну групу цілих чисел через $\mathbb{Z}(+)$. Надалі, якщо $f\colon X\to Y$ — відображення, то через $(x)f$ будемо позначати образ елемента $x\in X$ стосовно f.

Якщо S — напівгрупа, то її підмножина ідемпотентів позначається через $E(S)$. Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного її елемента x існує єдиний елемент $x^{-1}\in S$ такий, що $xx^{-1}x=x$ та $x^{-1}xx^{-1}=x^{-1}$ [1, 20]. В інверсній напівгрупі S вище означений елемент x^{-1} називається *інверсним до* x. *В'язка* — це напівгрупа ідемпотентів, а *напівґратка* — це комутативна в'язка.

Через $(\omega,+)$ і $(\omega,*)$ позначатимемо адитивну та мультиплікативну напівгрупи невід'ємних цілих чисел, відповідно.

Якщо S — напівгрупа, то на $E(S)$ визначено частковий порядок: $e\preccurlyeq f$ тоді і лише тоді, коли $ef=fe=e$. Так означений частковий порядок на $E(S)$ називається *природним.*

2020 Mathematics Subject Classification: 20M10, 20M15, 18B40

Означимо відношення $\preccurlyeq$ на інверсній напівгрупі S так: $s \preccurlyeq t$ тоді і лише тоді, коли $s = te$. для деякого ідемпотента $e \in S$. Так означений частковий порядок називається *природним частковим порядком* на інверсній напівгрупі S [1]. Очевидно, що звуження природного часткового порядку $\preccurlyeq$ на інверсній напівгрупі S на її в'язку $E(S)$ є природним частковим порядком на $E(S)$.

Нехай S і T — напівгрупи. Відображення $\mathfrak{h}\colon S \to T$ називається *гомоморфізмом*, якщо $(x \cdot y)\mathfrak{h} = (x)\mathfrak{h} \cdot (y)\mathfrak{h}$ для довільних $x, y \in S$ [7]. Якщо ж S і T — моноїди з одиницями 1_S і 1_T, відповідно, то гомоморфізм $\mathfrak{h}\colon S \to T$ такий, що $(1_S)\mathfrak{h} = 1_T$, будемо називати *гомоморфізмом моноїдів*. Також гомоморфізм $\mathfrak{h}\colon S \to S$ називається *ендоморфізмом* напівгрупи S, ізоморфізм $\mathfrak{i}\colon S \to S$ називається *автоморфізмом* напівгрупи S, а якщо S — моноїд з одиницею 1_S і $\mathfrak{h}\colon S \to S$ — гомоморфізм такий, що $(1_S)\mathfrak{h} = 1_S$, то будемо говорити, що $\mathfrak{h}$ — *ендоморфізм* моноїда S. Очевидно, що композиція двох ендоморфізмів напівгрупи (моноїда) S є ендоморфізмом напівгрупи (моноїда) S, а композиція двох автоморфізмів напівгрупи (моноїда) S є автоморфізмом напівгрупи (моноїда) S. Отож множина усіх ендоморфізмів $\mathbf{End}(S)$ напівгрупи S стосовно операції композиції відображень є моноїдом, а множина усіх автоморфізмів $\mathbf{Aut}(S)$ напівгрупи S стосовно операції композиції відображень є групою, і очевидно є групою одиниць напівгрупи $\mathbf{End}(S)$. Якщо $S = S^1$ — моноїд, то надалі напівгрупу ендоморфізмів моноїда S (як моноїда) будемо позначати через $\mathbf{End}^1(S)$, а напівгрупу ендоморфізмів напівгрупи S (як напівгрупи) будемо позначати через $\mathbf{End}(S)$.

Нагадаємо (див. [7, §1.12]), що *біциклічною напівгрупою* (або *біциклічним моноїдом*) $\mathscr{C}(p, q)$ називається напівгрупа з одиницею, породжена двоелементною множиною $\{p, q\}$ і визначена одним співвідношенням $pq = 1$. Біциклічна напівгрупа відіграє важливу роль у теорії напівгруп. Зокрема, класична теорема О. Андерсена [5] стверджує, що (0-)проста напівгрупа з (ненульовим) ідемпотентом є цілком (0-)простою тоді і лише тоді, коли вона не містить ізоморфну копію біциклічної напівгрупи.

Зауваження 1. Легко бачити, що біциклічний моноїд $\mathscr{C}(p, q)$ ізоморфний напівгрупі, заданій на множині $\boldsymbol{B}_\omega = \omega \times \omega$ з напівгруповою операцією

$$
\begin{aligned}
(i_1, j_1) \cdot (i_2, j_2) &= (i_1 + i_2 - \min\{j_1, i_2\}, j_1 + j_2 - \min\{j_1, i_2\}) = \\
&= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2), & \text{якщо } j_1 \leqslant i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2), & \text{якщо } j_1 \geqslant i_2, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

причому цей ізоморфізм визначається за формулою $(q^i p^j)\mathfrak{i} = (i, j)$, $i, j \in \omega$.

Піднапівгрупи біциклічного моноїда $\boldsymbol{B}_\omega$ описано в багатьох працях (див. [3, 4, 10, 15, 17, 2]). Узагальнення відношень Ґріна, сумісні часткові порядки, автоморфізми, напівавтоморфізми та конгруенції на $\boldsymbol{B}_\omega$ вивчали в [9, 11, 17, 18, 19, 21]. Інші властивості біциклічного моноїда описано в [6, 7, 16, 20].

Добре відомо, що кожен неін'єктивний гомоморфний образ біциклічної напівгрупи є циклічною групою (див. [7, наслідок 1.32]), а також лише тотожне відображення біциклічної напівгрупи є її автоморфізмом.

Нагадаємо (див. [22]), що *розширеною біциклічною напівгрупою* називається множина $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ з напівгруповою операцією (1). Відношення Ґріна на розширеній біциклічній напівгрупі описані в [12]. Також кожний неін'єктивний гомоморфний образ розширеної біциклічної напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ є циклічною групою [12]. Група $\mathbf{Aut}(\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}})$ автоморфізмів напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел $\mathbb{Z}(+)$ [14].

Варіанти біциклічного моноїда та розширеної біциклічної напівгрупи вивчали в [13, 14].

Ми описуємо ендоморфізми біциклічного моноїда $\boldsymbol{B}_{\omega}$ як моноїда та як напівгрупи. Доведено, що напівгрупа $\mathbf{End}(\boldsymbol{B}_{\omega})$ ендоморфізмів біциклічної напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}$ ізоморфна напівпрямому добутку $(\omega, +) \rtimes_{\varphi} (\omega, *)$, а також, що напівгрупа $\mathbf{End}(\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}})$ ендоморфізмів розширеної біциклічної напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathbb{Z}(+) \rtimes_{\varphi} (\omega, *)$.

2. Напівгрупа ендоморфізмів біциклічної напівгрупи

Для довільних $a, k \in \omega$ означимо відображення $\varepsilon_{k[a]} \colon \boldsymbol{B}_{\omega} \to \boldsymbol{B}_{\omega}$ за формулою

$$(m,n)\varepsilon_{k[a]} = (km+a, kn+a), \qquad m,n \in \omega. \tag{2}$$

Якщо $k = 0$, то $(m,n)\varepsilon_{0[a]} = (a,a)$ для всіх $(m,n) \in \boldsymbol{B}_{\omega}$, і відображення $\varepsilon_{0[a]} \colon \boldsymbol{B}_{\omega} \to \boldsymbol{B}_{\omega}$ анулюючий ендоморфізм напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}$. Тому надалі вважатимемо, що $k > 0$. Тоді для довільних $(i,j), (m,n) \in \boldsymbol{B}_{\omega}$ маємо, що

$$((i,j)\cdot(m,n))\varepsilon_{k[a]} = \begin{cases} (i-j+m,n)\varepsilon_{k[a]}, & \text{якщо } j<m; \\ (i,n)\varepsilon_{k[a]}, & \text{якщо } j=m; \\ (i,j-m+n)\varepsilon_{k[a]}, & \text{якщо } j>m \end{cases} = \begin{cases} (k(i-j+m)+a, kn+a), & \text{якщо } j<m; \\ (ki+a, kn+a), & \text{якщо } j=m; \\ (ki+a, k(j-m+n)+a), & \text{якщо } j>m \end{cases}$$

і оскільки $k > 0$, то

$$\begin{aligned} (i,j)\varepsilon_{k[a]}\cdot(m,n)\varepsilon_{k[a]} &= (ki+a, kj+a)\cdot(km+a, kn+a) = \\ &= \begin{cases} (ki+a-(kj+a)+km+a, kn+a), & \text{якщо } kj+a<km+a; \\ (ki+a, kn+a), & \text{якщо } kj+a=km+a; \\ (ki+a, kj+a-(km+a)+kn+a), & \text{якщо } kj+a>km+a \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (k(i-j+m)+a, kn+a), & \text{якщо } kj<km; \\ (ki+a, kn+a), & \text{якщо } kj=km; \\ (ki+a, k(j-m+n)+a), & \text{якщо } kj>km \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (k(i-j+m)+a, kn+a), & \text{якщо } j<m; \\ (ki+a, kn+a), & \text{якщо } j=m; \\ (ki+a, k(j-m+n)+a), & \text{якщо } j>m. \end{cases} \end{aligned}$$

Отже. ми довели таку лему.

Лема 1. *Для довільних $a, k \in \omega$ відображення $\varepsilon_{k[a]} \colon \boldsymbol{B}_{\omega} \to \boldsymbol{B}_{\omega}$, означене за формулою (2) є ендоморфізмом біциклічної напівгрупи.*

З леми 1 випливає наслідок.

Наслідок 1. *Для довільного числа $k \in \omega$ відображення $\varepsilon_{k[0]} \colon \boldsymbol{B}_\omega \to \boldsymbol{B}_\omega$, означене за формулою (2), де $a = 0$, є ендоморфізмом біциклічного моноїда.*

Лема 2. *Для довільного ендоморфізму $\varphi \colon \boldsymbol{B}_\omega \to \boldsymbol{B}_\omega$ біциклічного моноїда існує таке число $k \in \omega$, що $\varphi = \varepsilon_{k[0]}$.*

Доведення. Оскільки $\varphi \colon \boldsymbol{B}_\omega \to \boldsymbol{B}_\omega$ — ендоморфізм біциклічного моноїда, то $(0,0)\varphi = (0,0)$. Тоді для породжуючих елементів $(0,1)$ і $(1,0)$ біциклічного моноїда $\boldsymbol{B}_\omega$ існують елементи $(i,j), (m,n) \in \boldsymbol{B}_\omega$ такі, що $(0,1)\varphi = (i,j)$ і $(1,0)\varphi = (m,n)$ для деяких $i,j,m,n \in \omega$. Оскільки $\boldsymbol{B}_\omega$ — інверсна напівгрупа та $(0,1)$ і $(1,0)$ — інверсні елементи в $\boldsymbol{B}_\omega$, то

$$\begin{aligned}(m,n) &= (1,0)\varphi = \\ &= ((0,1)^{-1})\varphi = \\ &= ((0,1)\varphi)^{-1} = \\ &= (i,j)^{-1} = (j,i).\end{aligned}$$

Також з рівності $(0,1) \cdot (1,0) = (0,0)$ випливає, що

$$\begin{aligned}(i,i) &= (i,j) \cdot (j,i) = \\ &= (0,1)\varphi \cdot (1,0)\varphi = \\ &= ((0,1) \cdot (1,0))\varphi = \\ &= (0,0)\varphi = \\ &= (0,0),\end{aligned}$$

а отже, $i = 0$.

Приймемо $(0,1)\varphi = (0,k)$. Оскільки $(0,1)$ і $(1,0)$ — твірні елементи біциклічного моноїда $\boldsymbol{B}_\omega$, то для довільного елемента $(m,n) \in \boldsymbol{B}_\omega$ маємо, що

$$\begin{aligned}(m,n)\varphi &= ((m,0) \cdot (0,n))\varphi = \\ &= ((1,0)^m \cdot (0,1)^n)\varphi = \\ &= ((1,0)^m)\varphi \cdot ((0,1)^n)\varphi = \\ &= ((1,0)\varphi)^m \cdot ((0,1)\varphi)^n = \\ &= (k,0)^m \cdot (0,k)^n = \\ &= (km,0) \cdot (0,kn) = \\ &= (km,kn),\end{aligned}$$

звідки і випливає твердження леми. □

З леми 2 випливає, що

$$\varepsilon_{k_1[0]} \cdot \varepsilon_{k_2[0]} = \varepsilon_{k_1 k_2[0]} = \varepsilon_{k_2 k_1[0]} = \varepsilon_{k_2[0]} \cdot \varepsilon_{k_1[0]}$$

для довільних ендоморфізмів $\varepsilon_{k_1[0]}$ і $\varepsilon_{k_2[0]}$, $k_1, k_2 \in \omega$, біциклічного моноїда $\boldsymbol{B}_\omega$, а отже, виконується така теорема.

Теорема 1. *Напівгрупа* $\mathbf{End}^1(\boldsymbol{B}_\omega)$ *ендоморфізмів біциклічного моноїда* $\boldsymbol{B}_\omega$ *ізоморфна напівгрупі* $(\omega, *)$.

Рівності

$$(k+a,a)^n = (kn+a,a) \qquad \text{і} \qquad (a,k+a)^n = (a,kn+a), \qquad a,k \in \omega, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

для елементів $(k+a,a), (a,k+a)$ біциклічного моноїда $\boldsymbol{B}_\omega$ доводяться методом математичної індукції.

Твердження 1 описує ендоморфізми біциклічного моноїда як напівгрупи.

Твердження 1. *Для довільного ендоморфізму* $\varphi\colon \boldsymbol{B}_\omega \to \boldsymbol{B}_\omega$ *біциклічного моноїда як напівгрупи існують такі* $k, a \in \omega$, *що* $\varphi = \varepsilon_{k[a]}$.

Доведення. Оскільки $(0,0)$ — ідемпотент біциклічного моноїда $\boldsymbol{B}_\omega$, то образ $(0,0)\varphi$ є ідемпотентом у $\boldsymbol{B}_\omega$.

У випадку $(0,0)\varphi = (0,0)$ твердження випливає з леми 2. Тому надалі вважатимемо, що

$$(0,0)\varphi = (a,a) \neq (0,0).$$

Оскільки $(0,1)\cdot(1,0) = (0,0)$, $(1,0)\cdot(0,1) = (1,1)$ і $(1,1) \preccurlyeq (0,0)$ в $\boldsymbol{B}_\omega$, то, врахувавши, що кожен гомоморфізм інверсних напівгруп зберігає природний частковий порядок, отримуємо, що $(1,1)\varphi \preccurlyeq (0,0)\varphi = (a,a)$ в $\boldsymbol{B}_\omega$. Якщо $(1,1)\varphi = (a,a)$, то за наслідком 1.32 [7] ендоморфізм φ є груповим, і оскільки всі підгрупи в біциклічному моноїді є тривіальними, то отримуємо, що $\varphi\colon \boldsymbol{B}_\omega \to \boldsymbol{B}_\omega$ — анулюючий ендоморфізм, тобто $\varphi = \varepsilon_{0[a]}$ для деякого натурального числа a.

Надалі вважатимемо, що $(1,1)\varphi \neq (a,a)$. З означення природного часткового порядку на біциклічному моноїді $\boldsymbol{B}_\omega$ випливає, що існує таке натуральне число k, що

$$(1,1)\varphi = (k+a, k+a).$$

Припустимо, що для твірних елементів $(0,1)$ і $(1,0)$ біциклічного моноїда $\boldsymbol{B}_\omega$ маємо, що $(0,1)\varphi = (i,j)$ і $(1,0)\varphi = (m,n)$ для деяких $i,j,m,n \in \omega$. Оскільки $\boldsymbol{B}_\omega$ — інверсна напівгрупа та $(0,1)$ і $(1,0)$ — інверсні елементи в $\boldsymbol{B}_\omega$, то

$$\begin{aligned}
(m,n) &= (1,0)\varphi = \\
&= ((0,1)^{-1})\varphi = \\
&= ((0,1)\varphi)^{-1} = \\
&= (i,j)^{-1} = \\
&= (j,i),
\end{aligned}$$

а отже,

$$\begin{aligned}
(a,a) &= (0,0)\varphi = \\
&= ((0,1)\cdot(1,0))\varphi = \\
&= (0,1)\varphi\cdot(1,0)\varphi = \\
&= (i,j)\cdot(j,i) = \\
&= (i,i),
\end{aligned}$$

звідки випливає, що $i = a$. Також з аналогічних міркувань випливає, що

$$\begin{aligned}(k+a, k+a) &= (1,1)\varphi = \\ &= ((1,0)\cdot(0,1))\varphi = \\ &= (1,0)\varphi\cdot(0,1)\varphi = \\ &= (j,a)\cdot(a,j) = \\ &= (j,j),\end{aligned}$$

тобто $(0,1)\varphi = (a, k+a)$ і $(1,0)\varphi = (k+a, a)$. Тоді для довільного елемента (m,n) біциклічного моноїда $\boldsymbol{B}_\omega$, використавши формули (3), отримуємо

$$\begin{aligned}(m,n)\varphi &= ((m,0)\cdot(0,n))\varphi = \\ &= ((1,0)^m\cdot(0,1)^n)\varphi = \\ &= ((1,0)^m)\varphi\cdot((0,1)^n)\varphi = \\ &= ((1,0)\varphi)^m\cdot((0,1)\varphi)^n = \\ &= (k+a,a)^m\cdot(a,k+a)^n = \\ &= (km+a,a)\cdot(a,kn+a) = \\ &= (km+a,kn+a).\end{aligned}$$

Звідки випливає, що $\varphi = \varepsilon_{k[a]}$. □

Нехай S і T — напівгрупи та $\mathfrak{f}\colon T\to \mathbf{End}(S)$, $t\mapsto f_t$ — гомоморфізм. На декартовому добутку $S\times T$ означимо напівгрупову операцію так:

$$(s_1,t_1)\cdot(s_2,t_2) = (s_1\cdot(s_2)f_{t_1}, t_1\cdot t_2).$$

Множина $S\times T$ з так визначеною напівгруповою операцією називається *напівпрямим добутком* напівгрупи S напівгрупою T стосовно гомоморфізму $\mathfrak{f}$, та позначається $S\rtimes_{\mathfrak{f}} T$ [16].

Означимо відображення $\mathfrak{f}\colon(\omega,*)\to\mathbf{End}(\omega,+)$ за формулою $\mathfrak{f}(k)(n) = kn$. Очевидно, що відображення $\mathfrak{f}$ є гомоморфізмом з напівгрупи $(\omega,*)$ у $\mathbf{End}(\omega,+)$. Оскільки напівгрупа $(\omega,*)$ діє на напівгрупі $(\omega,+)$ ендоморфізмами, то на декартовому добутку $(\omega,+)\times(\omega,*)$ визначена напівгрупова операція

$$(a_1,k_1)\cdot(a_2,k_2) = (a_1+k_1a_2, k_1k_2)$$

напівпрямого добутку $(\omega,+)\rtimes_{\mathfrak{f}}(\omega,*)$ стосовно гомоморфізму $\mathfrak{f}$. Означимо відображення $\mathfrak{I}\colon \mathbf{End}(\boldsymbol{B}_\omega)\to(\omega,+)\rtimes_{\mathfrak{f}}(\omega,*)$ за формулою $\varepsilon_{k[a]}\mapsto(a,k)$. З леми 1 і твердження 1 випливає, що $\mathfrak{I}$ — бієктивне відображення.

Отже, ми довели таку теорему.

Теорема 2. *Напівгрупа* $\mathbf{End}(\boldsymbol{B}_\omega)$ *ендоморфізмів біциклічної напівгрупи* $\boldsymbol{B}_\omega$ *ізоморфна напівпрямому добутку* $(\omega,+)\rtimes_{\mathfrak{f}}(\omega,*)$.

3. Напівгрупа ендоморфізмів розширеної біциклічної напівгрупи

Аналогічно, як і у випадку біциклічного моноїда $\boldsymbol{B}_{\omega}$ для довільних $k \in \omega$ і $a \in \mathbb{Z}$ означимо відображення $\varepsilon_{k[a]} \colon \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}} \to \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ за формулою

$$(m,n)\varepsilon_{k[a]} = (km+a, kn+a), \qquad m,n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Доведення леми 3 аналогічне лемі 1.

Лема 3. *Для довільних $k \in \omega$ і $a \in \mathbb{Z}$ відображення $\varepsilon_{k[a]} \colon \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}} \to \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$, означене за формулою* (4)*, є ендоморфізмом узагальненої біциклічної напівгрупи.*

Рівності

$$(k+a,a)^n = (kn+a,a) \qquad \text{і} \qquad (a,k+a)^n = (a,kn+a), \qquad a \in \mathbb{Z}, k,n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

для елементів $(k+a,a)$ і $(a,k+a)$ розширеної біциклічної напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$, аналогічно як і формули (3), доводяться методом математичної індукції.

Піднапівгрупи розширеної біциклічної напівгрупи, які ізоморфні біциклічній напівгрупі, описано в лемі 4.

Лема 4. *Нехай S — піднапівгрупа розширеної біциклічної напівгрупи, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}$. Тоді*

$$S = \{(km+a, kn+a) \colon m,n \in \omega\}$$

для деяких $a \in \mathbb{Z}$ і $k \in \mathbb{N}$, причому ізоморфне занурення $\mathfrak{I} \colon \boldsymbol{B}_{\omega} \to \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ визначається за формулою $(m,n) \mapsto (km+a, kn+a)$.

Доведення. Нехай $\varphi \colon \boldsymbol{B}_{\omega} \to \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ — ізоморфне занурення біциклічної напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}$ у розширену біциклічну напівгрупу $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$. Тоді $(0,0)\varphi = (a,a)$ для деякого цілого числа a. Оскільки $(1,1) \preccurlyeq (0,0)$ у $\boldsymbol{B}_{\omega}$, то $(1,1)\varphi \preccurlyeq (0,0)\varphi$ у $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$, а отже за твердженням 2.1(i) з [12] існує натуральне таке число k, що $(1,1)\varphi = (k+a, k+a)$. Ми стверджуємо, що $(0,1)\varphi = (a, k+a)$ і $(1,0)\varphi = (k+a, a)$. Справді, припустимо, що для твірних елементів $(0,1)$ і $(1,0)$ біциклічного моноїда $\boldsymbol{B}_{\omega}$ маємо, що $(0,1)\varphi = (i,j)$ і $(1,0)\varphi = (m,n)$ для деяких $i,j,m,n \in \mathbb{Z}$. Оскільки $\boldsymbol{B}_{\omega}$ — інверсна напівгрупа та $(0,1)$ і $(1,0)$ — інверсні елементи в $\boldsymbol{B}_{\omega}$, то з того, що $\varphi \colon \boldsymbol{B}_{\omega} \to \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ — гомоморфізм інверсних напівгруп, випливає, що

$$\begin{aligned}
(m,n) &= (1,0)\varphi = \\
&= ((0,1)^{-1})\varphi = \\
&= ((0,1)\varphi)^{-1} = \\
&= (i,j)^{-1} = (j,i),
\end{aligned}$$

а отже,

$$\begin{aligned}
(a,a) &= (0,0)\varphi = \\
&= ((0,1)\cdot(1,0))\varphi = \\
&= (0,1)\varphi \cdot (1,0)\varphi = \\
&= (i,j)\cdot(j,i) = \\
&= (i,i),
\end{aligned}$$

звідки випливає, що $i = a$. Також з аналогічних міркувань випливає, що

$$\begin{aligned}(k+a,k+a) &= (1,1)\varphi = \\ &= ((1,0)\cdot(0,1))\varphi = \\ &= (1,0)\varphi\cdot(0,1)\varphi = \\ &= (j,a)\cdot(a,j) = (j,j),\end{aligned}$$

тобто $(0,1)\varphi = (a,k+a)$ і $(1,0)\varphi = (k+a,a)$. Тоді для довільного елемента (m,n) розширеної біциклічної напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$, використавши формули (5), отримуємо

$$\begin{aligned}(m,n)\varphi &= ((m,0)\cdot(0,n))\varphi = \\ &= ((1,0)^m\cdot(0,1)^n)\varphi = \\ &= ((1,0)^m)\varphi\cdot((0,1)^n)\varphi = \\ &= ((1,0)\varphi)^m\cdot((0,1)\varphi)^n = \\ &= (k+a,a)^m\cdot(a,k+a)^n = \\ &= (km+a,a)\cdot(a,kn+a) = \\ &= (km+a,kn+a),\end{aligned}$$

що і завершує доведення леми. □

Ендоморфізм $\varphi\colon \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}} \to \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ називається $(0,0)$-*ендоморфізмом*, якщо

$$(0,0)\varphi = (0,0).$$

Лема 5. *Для довільного $(0,0)$-ендоморфізму $\varphi\colon \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}} \to \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ розширеної біциклічної напівгрупи існує таке число $k \in \omega$, що $\varphi = \varepsilon_{k[0]}$.*

Доведення. Припустимо, що $(1,1)\varphi = (k,k)$.

Якщо $k = 0$, то $(1,1)\varphi = (0,0)$. За твердженням 2.2 з [12] кожний неін'єктивний гомоморфний образ узагальненої біциклічної напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ є циклічною групою, і оскільки за твердженням 2.1(iv) [12] усі максимальні підгрупи в $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ є тривіальними, то ендоморфізм $\varphi\colon \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}} \to \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ анулюючий.

Припустимо, що $k \neq 0$. Оскільки $(1,1) \preccurlyeq (0,0)$ у напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$, то $(k,k) \preccurlyeq (0,0)$, і тоді з твердження 2.1(i) [12] випливає, що $k > 0$. Врахувавши, що множина

$$\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}[0] = \{(m,n)\colon m,n \in \omega\}$$

з індукованою напівгруповою операцією з $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі, то з леми 2 випливає, що $(m,n)\varphi = (km,kn)$ для всіх $m,n \in \omega$.

За лемою 4 для довільного цілого числа t множина

$$\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}[t] = \{(m,n)\colon m,n \geqslant t\} \subseteq \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$$

з індукованою з $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ напівгруповою операцією ізоморфна біциклічній напівгрупі стосовно відображення $(m+t,n+t) \mapsto (m,n)$.

Далі доведемо твердження леми методом математичної індукції. З наведеного вище випливає, що у випадку $p = 0$ маємо, що $(m,n)\varphi = (km,kn)$ для всіх цілих $m,n \geqslant 0$. Припустимо, що з того, що виконується рівність $(m,n)\varphi = (km,kn)$ для всіх цілих $m,n \geqslant -p$, де p — деяке натуральне число, випливає, що ця рівність виконується для всіх цілих $m,n \geqslant -(p+1)$. Нехай

$$(-(p+1),-(p+1))\varphi = (s,s)$$

для деякого цілого числа s. Оскільки

$$(-p,-p) \preccurlyeq (-(p+1),-(p+1))$$

в $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ і кожен гомоморфізм інверсних напівгруп зберігає природний частковий порядок, то $(-kp,-kp) \preccurlyeq (s,s)$, і врахувавши, що $(-kp,-kp) \neq (s,s)$, то з твердження 2.1(i) [12] випливає, що $s < -kp$. Тоді з рівностей

$$(-p-1,-p)\cdot(-p,-p-1) = (-p-1,-p-1)$$

і

$$(-p,-p-1)\cdot(-p-1,-p) = (-p,-p)$$

випливає, що

$$(-p-1,-p)\varphi = (s,-kp) \qquad \text{і} \qquad (-p,-p-1)\varphi = (-kp,s).$$

Оскільки

$$(-p,-p)\cdot(-p-1,-p) = (-p,-p+1),$$

то з припущення індукції та нерівності $s < -kp$ випливає, що

$$\begin{aligned}
(-kp,-kp+k) = (-p,-p+1)\varphi &= \\
&= ((-p,-p)\cdot(-p-1,-p))\varphi = \\
&= (-p,-p)\varphi\cdot(-p-1,-p)\varphi = \\
&= (-kp,-kp)\cdot(s,-kp) = \\
&= (-kp+s-s,-kp-kp-s) = \\
&= (-kp,-kp-kp-s),
\end{aligned}$$

а отже, $-kp+k = -kp-kp-s$. Звідки випливає, що $s = -k(p+1)$. Тоді для довільного цілого числа $q < p+1$ маємо, що

$$(-p-1,-q) = (-p-1,-p)\cdot(-p,-q)$$

і

$$(-q,-p-1) = (-q,-p)\cdot(-p,-p-1),$$

а отже,

$$\begin{aligned}
(-p-1,-q)\varphi &= (-p-1,-p)\varphi\cdot(-p,-q)\varphi = \\
&= (-kp-k,-kp)\cdot(-kp,-kq) = \\
&= (-kp-k,-kq)
\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
(-q,-p-1)\varphi &= (-q,-p)\varphi\cdot(-p,-p-1)\varphi = \\
&= (-kq,-kp)\cdot(-kp,-kp-k) = \\
&= (-kq,-kp-k).
\end{aligned}$$

Звідси випливає, що $(m,n)\varphi = (km,kn)$ для всіх цілих $m,n \geqslant -p-1$, що і завершує доведення леми. $\square$

З леми 5 випливає, що

$$\varepsilon_{k_1[0]} \cdot \varepsilon_{k_2[0]} = \varepsilon_{k_1k_2[0]} = \varepsilon_{k_2k_1[0]} = \varepsilon_{k_2[0]} \cdot \varepsilon_{k_1[0]}$$

для довільних $(0,0)$-ендоморфізмів $\varepsilon_{k_1[0]}$ і $\varepsilon_{k_2[0]}$, $k_1, k_2 \in \omega$, розширеної біциклічної напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$, а отже, виконується така теорема.

Теорема 3. *Напівгрупа* $(0,0)$*-ендоморфізмів розширеної біциклічної напівгрупи* $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ *ізоморфна напівгрупі* $(\omega, *)$.

Твердження 2 описує ендоморфізми розширеної біциклічної напівгрупи.

Твердження 2. *Для довільного ендоморфізму* $\varphi\colon \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}} \to \boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ *розширеної біциклічної напівгрупи існують такі* $k \in \omega$ *і* $a \in \mathbb{Z}$*, що* $\varphi = \varepsilon_{k[a]}$.

Доведення. Нехай φ — довільний ендоморфізм розширеної біциклічної напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$. Тоді $(0,0)\varphi = (a,a)$ для деякого $a \in \mathbb{Z}$. За теоремою 1 [14] ендоморфізм $\varepsilon_{1[-a]}$ є елементом групи одиниць напівгрупи ендоморфізмів розширеної біциклічної напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$. З визначення відображення $\varepsilon_{1[-a]}$ випливає, що

$$(0,0)\varphi\varepsilon_{1[-a]} = (a,a)\varepsilon_{1[-a]} = (0,0),$$

а отже, відображення $\varphi\varepsilon_{1[-a]}$ є $(0,0)$-ендоморфізмом розширеної біциклічної напівгрупи. За лемою 5 існує таке число $k \in \omega$, що $\varphi\varepsilon_{1[-a]} = \varepsilon_{k[0]}$. Оскільки $\varepsilon_{1[-a]}\varepsilon_{1[a]} = \varepsilon_{1[0]}$ — тотожний автоморфізм розширеної біциклічної напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$, то

$$\varphi = \varphi\varepsilon_{1[-a]}\varepsilon_{1[a]} = \varepsilon_{k[0]}\varepsilon_{1[a]} = \varepsilon_{k[a]},$$

що і завершує доведення твердження. □

Аналогічно, як і у випадку біциклічної напівгрупи, означимо відображення $\mathfrak{f}\colon (\omega, *) \to \mathbf{End}(\mathbb{Z}(+))$ за формулою $\mathfrak{f}(k)(n) = kn$. Очевидно, що відображення $\mathfrak{f}$ є гомоморфізмом з напівгрупи $(\omega, *)$ у напівгрупу $\mathbf{End}(\mathbb{Z}(+))$. Оскільки напівгрупа $(\omega, *)$ діє на групі $\mathbb{Z}(+)$ ендоморфізмами, то на декартовому добутку $\mathbb{Z}(+) \times (\omega, *)$ визначена напівгрупова операція

$$(a_1, k_1) \cdot (a_2, k_2) = (a_1 + k_1 a_2, k_1 k_2)$$

напівпрямого добутку $\mathbb{Z}(+) \rtimes_{\mathfrak{f}} (\omega, *)$ стосовно гомоморфізму $\mathfrak{f}$. Означимо відображення $\mathfrak{I}\colon \mathbf{End}(\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}) \to \mathbb{Z}(+) \rtimes_{\mathfrak{f}} (\omega, *)$ за формулою $\varepsilon_{k[a]} \mapsto (a,k)$. З леми 3 і твердження 2 випливає, що $\mathfrak{I}$ — бієктивне відображення. Отже, ми довели таку теорему.

Теорема 4. *Напівгрупа* $\mathbf{End}(\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}})$ *ендоморфізмів розширеної біциклічної напівгрупи* $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ *ізоморфна напівпрямому добутку* $\mathbb{Z}(+) \rtimes_{\mathfrak{f}} (\omega, *)$.

Подяка

Автори висловлюють щиру подяку Т. Банаху, О. Равському та рецензентові за цінні поради та зауваження.

Список використаної літератури

1. В. В. Вагнер, *Обобщенные группы*, ДАН СССР **84** (1952), 1119–1122.
2. К. Г. Овсепян, *О C^*-алгебрах порожденных инверсными подполугруппами бициклической полугруппы*, Изв. нац. акад. наук Армении, матем. **49** (2014), no. 5, 67–75.
3. К. Г. Овсепян, *Тип некоторых ядерных подалгебр алгебры Теплица, порожденных инверсными подполугруппами бициклической полугруппы*, Укр. мат. ж. **69** (2017), no. 11, 1551-1163; **English version:** K. H. Hovsepyan, *Type of some muclear subalgebras of the Toeplitz algebra generated by snverse subsemigroups of a bicyclic semigroup*, Ukr. Math. J. **69** (2018), no. 11, 1805–1820. DOI: 10.1007/s11253-018-1471-6
4. К. Г. Овсепян, *Инверсные подполугруппы бициклической полугруппы*, Матем. заметки **108** (2020), no. 4, 552–560. DOI: 10.4213/mzm12235; **English version:** K. H. Hovsepyan, *Inverse subsemigroups of the bicyclic semigroup*, Math. Notes **108** (2020), no. 3–4, 550–556. DOI: 10.1134/S0001434620090278
5. O. Andersen, *Ein Bericht uber die Struktur abstrakter Halbgruppen*, PhD Thesis. Hamburg, 1952.
6. A. Bouvier et A. Faisant, *Demi-groupe libre et demi-groupe bicyclique*, Séminaire P. Lefebvre (année 1969/1970), Théorie des demi-groupes, Dép. Math., Univ. Lyon I, Villeurbanne, 1970. Exp. No. 4, pp. 31–40.
7. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. I, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1961.
8. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. II, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1967.
9. L. Descalço and P. M. Higgins, *Generalized Green's equivalences on the subsemigroups of the bicyclic monoid*, Comm. Algebra **38** (2010), no. 12, 4597–4612. DOI: 10.1080/00927870903432918
10. L. Descalço and N. Ruškuc, *Subsemigroups of the bicyclic monoid*, Internat. J. Algebra Comput. **15** (2005), no. 1, 37–57. DOI: 10.1142/S0218196705002098
11. G. Duchamp, *Étude du treillis des congruences à droite sur le monoïde bicyclique*, Semigroup Forum **33** (1986), no. 1, 31–46. DOI: 10.1007/BF02573180
12. I. R. Fihel and O. V. Gutik, *On the closure of the extended bicyclic semigroup*, Carpathian Math. Publ. **3** (2011), no. 2, 131–157.
13. B. N. Givens, A. Rosin, and K. Linton, *Interassociates of the bicyclic semigroup*, Semigroup Forum **94** (2017), no. 1, 104–122. DOI: 10.1007/s00233-016-9794-9
14. O. Gutik and K. Maksymyk, *On variants of the bicyclic extended semigroup*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **84** (2017), 22–37.
15. Jiu Lin Jin, Gui Rong Guo, and Tai Jie You, *Maximal inverse subsemigroups of bicyclic semigroup*, J. Jilin Univ. Sci. **55** (2017), no. 2, 211–215 (Chinese).
16. M. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, Singapore, World Scientific, 1998. DOI: 10.1142/3645
17. S. O. Makanjuola and A. Umar, *On a certain subsemigroup of the bicyclic semigroup*, Comm. Algebra **25** (1997), no. 2, 509–519. DOI: 10.1080/00927879708825870
18. D. B. McAlister, *Compatible orders on the bicyclic semigroup*, Comm. Algebra **27** (1999), no. 9, 4179–4208. DOI: 10.1080/00927879908826690
19. W. R. Nico, *A classification of indecomposable S-sets*, J. Algebra **54** (1978), no. 1, 260–272. DOI: 10.1016/0021-8693(78)90029-7
20. M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
21. N. Taguchi and T. Saitô, *On half-automorphisms in the bicyclic semigroup*, Bull. Tokyo Gakugei Univ. **18** (1967), 11–12 (Japanese).

22. R. J. Warne, *I-bisimple semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968), no. 3, 367–386. DOI: 10.1090/S0002-9947-1968-0223476-8

Стаття: надійшла до редколегії 07.07.2021
доопрацьована 31.11.2021
прийнята до друку 19.12.2021

ON ENDOMORPHISMS OF THE BICYCLIC SEMIGROUP AND THE EXTENDED BICYCLIC SEMIGROUP

Oleg GUTIK, Oksana PPOKHORENKOVA, Diana SEKH

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,
oksana.prokhorenkova@lnu.edu.ua, diana.sekh@lnu.edu.ua

It is proved that the semigroups $\mathbf{End}(\boldsymbol{B}_\omega)$ and $\mathbf{End}(\boldsymbol{B}_\mathbb{Z})$ of the endomorphisms of the bicyclic semigroup $\boldsymbol{B}_\omega$ and the endomorphisms of the extended bicyclic semigroup $\boldsymbol{B}_\mathbb{Z}$ are isomorphic to the semidirect products $(\omega,+)\rtimes_\varphi(\omega,*)$ and $\mathbb{Z}(+)\rtimes_\varphi(\omega,*)$, respectively.

Key words: semigroup, bicyclic monoid, extended bicyclic semigroup, endomorphism, automorphism, semidirect product.