ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2021. Випуск 91. С. 87–98
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2021. Issue 91. P. 87–98
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2021.91.087-098

УДК 517.95, 511.2

ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ТИПУ ЕЙЛЕРА

Володимир ІЛЬКІВ, Ярослав СЛОНЬОВСЬКИЙ

Національний університет "Львівська політехніка",
вул. Степана Бандери, 12, 79000, м. Львів
e-mail: yaroslav.o.slonovskyi@lpnu.ua

Розглянуто двоточкову задачу для рівнянь із частинними похідними другого порядку з коефіцієнтами залежними лише від часової змінної (рівняння типу Ейлера). Така задача некоректна, а її розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників. Визначено достатні умови існування та єдиності розв'язку, які отримано на підставі оцінок знизу малих знаменників.

Ключові слова: рівняння з частинними похідними, двоточкова задача, проблема малих знаменників, некоректні задачі.

1. Вступ

Двоточкові крайові задачі для рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними вивчали у багатьох працях (див., наприклад, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]), оскільки такі задачі є моделями багатьох фізичних процесів. Зокрема, у працях [1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16] вивчено двоточкові задачі для рівнянь із частинними похідними на торі. Дослідження розв'язності цих задач пов'язане з проблемою малих знаменників, для оцінок знизу яких використано метричний підхід [8] і результати метричної теорії чисел. У [4, 5, 6] застосовано диференціально-символьний метод та апарат алгебри псевдодиференціальних операторів для побудови у необмежених областях розв'язків двоточкових задач для рівнянь із частинними похідними.

Ця праця є продовженням досліджень, розпочатих раніше у [15], на випадок рівнянь зі змінними коефіцієнтами типу Ейлера. У ній визначено умови розв'язності двоточкової задачі за змінною t у класах функцій, періодичних за x, для рівнянь,

2020 Mathematics Subject Classification: 35C10, 35M12

коефіцієнти яких є многочленами за t. Уперше для рівнянь зі змінними за t коефіцієнтами доведено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, утворених із коефіцієнтів рівняння. Цей результат доповнює результат праці [15], де отримано умови коректності двоточкової задачі для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із вузлів інтерполяції.

В області $[t^-,t^+]\times\Omega_{2\pi}^p$, де $\Omega_{2\pi}^p$ — p-вимірний тор, $p\in\mathbb{N}$, $0<t^-<t^+<+\infty$, розглядається задача

$$\big[t^2\partial_t^2+ta(\partial_x)\partial_t+b(\partial_x)\big]u(t,x)=0,\qquad (t,x)\in(0,\infty)\times\Omega_{2\pi}^p, \tag{1}$$

де

$$a(\partial_x)=\sum_{|s|\le 1}a_s\partial_x^s,\qquad b(\partial_x)=\sum_{|s|\le 2}b_s\partial_x^s, \tag{2}$$

a_s, b_s — комплексні числа, $\partial_t=\partial/\partial t$, $\partial_x^s=\partial_{x_1}^{s_1}\cdots\partial_{x_p}^{s_p}$, $d_{x_r}=\partial/\partial x_r$, $x=(x_1,\ldots,x_p)$, $s=(s_1,\ldots,s_p)$, $|s|=s_1+\cdots+s_p$.

Розв'язок рівняння (1) заданий у два моменти часу t_0, t_1, де $0<t_0<t_1=t_0\tau$, тобто умовами

$$u(t_0,x)=\varphi_0(x),\quad u(t_1,x)=\varphi_1(x),\qquad x\in\Omega_{2\pi}^p. \tag{3}$$

Знайдемо розв'язок задачі (1), (3) за допомогою відокремлення змінної x, використовуючи ряди Фур'є

$$\varphi_0(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\varphi_{0k}e^{ikx},\qquad \varphi_1(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\varphi_{1k}e^{ikx}.$$

Згідно з рівнянням (1) звичайне диференціальне рівняння з векторним параметром $k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$ має вигляд рівняння Ейлера

$$\big[t^2d_t^2+ta(ik)d_t+b(ik)\big]u_k(t)=0,\qquad d_t=d/dt, \tag{4}$$

а розв'язок рівняння (1) зображується рядом

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}u_k(t)e^{ikx},\qquad kx=k_1x_1+\cdots+k_px_p. \tag{5}$$

Введемо простори $\Phi_{q,g}$ і $U_{q,G}$ з нормами

$$\|\varphi\|_{q,g}^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\tilde{k}^{2q}g^{2\tilde{k}}|\varphi_k|^2,\qquad \|u\|_{q,G}=\sum_{r=0}^{2}\max_{t\in[t^-,t^+]}\|t^r\partial_t^ru(t,\cdot)\|_{q-r,G(t)},$$

де g і G — додатне число і додатна функція, $q\in\mathbb{R}$.

2. Побудова розв'язку задачі

Позначимо $a=a(ik)$, $b=b(ik)$, а корені характеристичного (квадратного) рівняння

$$\lambda^2+(a-1)\lambda+b=0 \tag{6}$$

через $\lambda_1=\lambda_1(k)$, $\lambda_2=\lambda_2(k)$. Ці корені мають таке зображення:

$$\lambda_{1,2}=\frac{1-a\mp\sqrt{D}}{2},\quad D=(a-1)^2-4b, \tag{7}$$

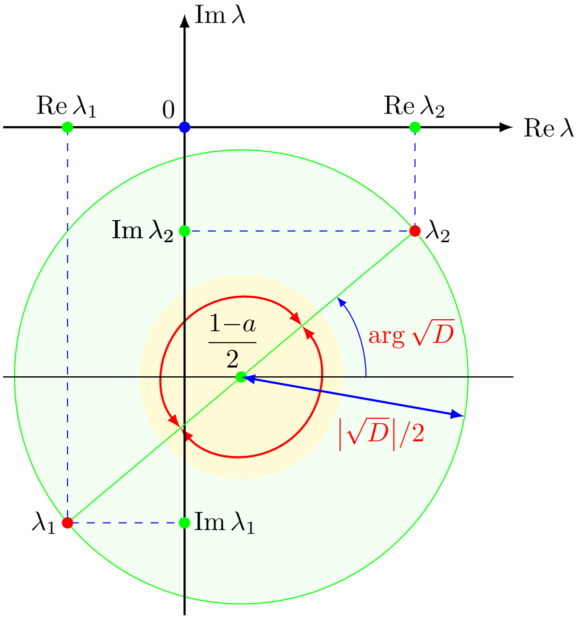

Рис. 1. Геометрична інтерпретація коренів

де аргумент $\arg\sqrt{D}$ квадратного кореня з дискримінанта D належить множині $(-\pi/2, \pi/2]$, тому справджується нерівність $\operatorname{Re}\lambda_1 \leq \operatorname{Re}\lambda_2$, причому $\operatorname{Re}\lambda_1 < \operatorname{Re}\lambda_2$, якщо $\arg\sqrt{D} \neq \pi/2$.

Якщо дискримінант $D = D(k)$ полінома $\lambda^2 + (a-1)\lambda + b$ не дорівнює нулю, то рівняння (6) має прості корені, а якщо $D = 0$, то корінь — кратний, зокрема $\lambda_1 = \lambda_2 = (1-a)/2$.

Для дійсних a, b маємо дійсні корені, якщо $D \geq 0$ (зокрема різні, якщо $D > 0$), і пару комплексних, якщо $D < 0$.

Геометрична інтерпретація коренів зображена на рис. 1.

Розіб'ємо множину $\mathbb{Z}^p$ на дві множини $\mathbb{Z}^p = \mathcal{Z}_1 \sqcup \mathcal{Z}_2$, причому для векторів $k \in \mathcal{Z}_2$ корені рівняння (6) є простими, а для векторів $k \in \mathcal{Z}_1$, для яких $D(k) = 0$, корінь — двократний.

Загальний розв'язок рівняння (4) для всіх $t > 0$ зображає формула

$$\begin{aligned} u_k(t) &= t^{\lambda_1}(C_{1k} + C_{2k}\ln t) = t^{(1-a)/2}(C_{1k} + C_{2k}\ln t), \qquad k \in \mathcal{Z}_1, \\ u_k(t) &= C_{1k}t^{\lambda_1} + C_{2k}t^{\lambda_2} = t^{(1-a)/2}(C_{1k}t^{-\sqrt{D}/2} + C_{2k}t^{\sqrt{D}/2}), \qquad k \in \mathcal{Z}_2, \end{aligned} \tag{8}$$

де C_{1k} і C_{2k} — довільні комплексні сталі, а

$$t^{\lambda} = e^{\lambda \ln t} = e^{(\operatorname{Re}\lambda + i\operatorname{Im}\lambda)\ln t} = e^{\operatorname{Re}\lambda \ln t}(\cos \operatorname{Im}\lambda \ln t + i \sin \operatorname{Im}\lambda \ln t).$$

Функція (5) є розв'язком задачі (1), (3) лише тоді, коли

$$u_k(t_0) = \varphi_{0k}, \qquad u_k(t_1) = \varphi_{1k}, \qquad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{9}$$

Звідси маємо системи для визначення сталих у формулі (8):

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_1}\ln t_0 \\ t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_1}\ln t_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{1k} \\ C_{2k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_{0k}\\ \varphi_{1k}\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_2} \\ t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{1k} \\ C_{2k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_{0k}\\ \varphi_{1k}\end{pmatrix}$$

з ненульовими матрицями

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_1}\ln t_0 \\ t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_1}\ln t_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \ln t_0 \\ 1 & \ln t_1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_2} \\ t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \tau^{\lambda_1-\lambda_2} \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_2-\lambda_1}\end{pmatrix}, \quad t_1\le 1,$$

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_2} \\ t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \tau^{\lambda_1-\lambda_2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1-\lambda_2} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad t_0\ge 1,$$

і для випадку $t_0<1<t_1$ з матрицею

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_2} \\ t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t_0^{\lambda_2-\lambda_1} \\ t_1^{\lambda_1-\lambda_2} & 1\end{pmatrix}.$$

З формули (8), відповідно, отримуємо

$$u_k(t)=t^{\lambda_1}\frac{\begin{pmatrix}1 & \ln t\end{pmatrix}}{\ln\tau}\begin{pmatrix}\ln t_1 & -\ln t_0 \\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_1}\varphi_{0k} \\ t_1^{-\lambda_1}\varphi_{1k}\end{pmatrix}, \qquad k\in\mathcal{Z}_1,$$

де $\ln(t_1/t_0)>0$, а для $k\in\mathcal{Z}_2$, відповідно, матимемо

$$u_k(t)=\frac{\begin{pmatrix}t^{\lambda_1} & t^{\lambda_2}t_1^{\lambda_1-\lambda_2}\end{pmatrix}}{1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}}\begin{pmatrix}1 & -\tau^{\lambda_1-\lambda_2} \\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_1}\varphi_{0k} \\ t_1^{-\lambda_1}\varphi_{1k}\end{pmatrix}, \quad t_1\le 1,$$

$$u_k(t)=\frac{-\begin{pmatrix}t^{\lambda_1} & t^{\lambda_2}\end{pmatrix}}{1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}}\begin{pmatrix}-1 & t_0^{\lambda_2-\lambda_1} \\ t_1^{\lambda_1-\lambda_2} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_1}\varphi_{0k} \\ t_1^{-\lambda_2}\varphi_{1k}\end{pmatrix}, \quad t_0<1<t_1, \tag{10}$$

$$u_k(t)=\frac{\begin{pmatrix}t^{\lambda_1}t_0^{\lambda_2-\lambda_1} & t^{\lambda_2}\end{pmatrix}}{1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}}\begin{pmatrix}1 & -1 \\ -\tau^{\lambda_1-\lambda_2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_2}\varphi_{0k} \\ t_1^{-\lambda_2}\varphi_{1k}\end{pmatrix}, \quad t_0\ge 1,$$

де елементи $\tau^{\lambda_1-\lambda_2}$, $t_0^{\lambda_2-\lambda_1}$, $t_1^{\lambda_1-\lambda_2}$ відповідних квадратних матриць мають менший за одиницю модуль для всіх $k\in\mathcal{Z}_2$ з умовою $\operatorname{Re}\lambda_2>\operatorname{Re}\lambda_1$.

Якщо $\operatorname{Re}\lambda_2=\operatorname{Re}\lambda_1$, то $D<0$, $\sqrt{-D}>0$, $\lambda_{1,2}=(1-a)/2\mp i\sqrt{-D/4}$ і

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_2} \\ t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t_0^{(1-a)/2} & 0 \\ 0 & t_1^{(1-a)/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_0^{-i\sqrt{-D/4}} & t_0^{i\sqrt{-D/4}} \\ t_1^{-i\sqrt{-D/4}} & t_1^{i\sqrt{-D/4}}\end{pmatrix}, \quad k\in\mathcal{Z}_2,$$

а формули (10) набувають вигляду

$$u_k(t)=\frac{\begin{pmatrix}-\sin\left(\sqrt{-D}\,\ln\sqrt{t/t_1}\right) & \sin\left(\sqrt{-D}\,\ln\sqrt{t/t_0}\right)\end{pmatrix}}{t^{(a-1)/2}\,\sin\left(\sqrt{-D}\,\ln\sqrt{\tau}\right)}\begin{pmatrix} t_0^{(a-1)/2}\varphi_{0k} \\ t_1^{(a-1)/2}\varphi_{1k}\end{pmatrix}$$

у припущенні, що $\sqrt{-D(k)}\ln\tau \neq 2m\pi$ для усіх натуральних m. У протилежному випадку $\sqrt{-D(k)} = 2m\pi/\ln\tau$, або $t_0^{\lambda_2-\lambda_1} = t_1^{\lambda_2-\lambda_1}$, або $\tau^{\lambda_1} = \tau^{\lambda_2}$ розв'язок задачі (4), (9) існує лише за умови $\varphi_{1k} = \tau^{\lambda_1}\varphi_{0k}$, а сама задача має одновимірне ядро, зокрема

$$u_k(t) = \Big(\frac{t^{\lambda_1}}{t_0^{\lambda_1}} + \frac{t^{\lambda_2}}{t_0^{\lambda_2}}\Big)\frac{\varphi_{0k}}{2} + \Big(\frac{t^{\lambda_1}}{t_0^{\lambda_1}} - \frac{t^{\lambda_2}}{t_0^{\lambda_2}}\Big)C_k \equiv \Big(\frac{t^{\lambda_1}}{t_1^{\lambda_1}} + \frac{t^{\lambda_2}}{t_1^{\lambda_2}}\Big)\frac{\varphi_{1k}}{2} + \Big(\frac{t^{\lambda_1}}{t_1^{\lambda_1}} - \frac{t^{\lambda_2}}{t_1^{\lambda_2}}\Big)\tau^{\lambda_1}C_k,$$

де C_k — довільне комплексне число.

Умова неоднозначності розв'язку задачі (1), (3) полягає у виконанні хоча б однієї з нескінченної кількості умов

$$b(ik) = \Big(\frac{a(ik)-1}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{m\pi}{\ln\tau}\Big)^2, \qquad m\in\mathbb{N}, \quad k\in\mathbb{Z}^p,$$

причому розмірність її ядра дорівнює кількості розв'язків $k\in\mathbb{Z}^p$ останнього рівняння і може бути нескінченною.

На підставі формул (10) отримуємо для похідних $u_k^{(l)}$, де $l=0,1,2$, розв'язку u_k задачі (4), (9) відповідні нерівності

$$8\lambda_l^*\frac{\big|t_0^{-\lambda_1}\varphi_{0k}\big|^2 + \big|t_1^{-\lambda_1}\varphi_{1k}\big|^2}{\big|1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}\big|^2} \geq \begin{cases}\big|t^{l-\lambda_1}u_k^{(l)}(t)\big|^2, & t\leq t_1,\\ \big|t^{l-\lambda_2}t_1^{\lambda_2-\lambda_1}u_k^{(l)}(t)\big|^2, & t\geq t_1,\end{cases}$$

$$(11)\qquad 8\lambda_l^*\frac{\big|t_0^{-\lambda_1}\varphi_{0k}\big|^2 + \big|t_1^{-\lambda_2}\varphi_{1k}\big|^2}{\big|1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}\big|^2} \geq \begin{cases}\big|t^{l-\lambda_1}u_k^{(l)}(t)\big|^2, & t\leq 1,\\ \big|t^{l-\lambda_2}u_k^{(l)}(t)\big|^2, & t\geq 1,\end{cases}$$

$$8\lambda_l^*\frac{\big|t_0^{-\lambda_2}\varphi_{0k}\big|^2 + \big|t_1^{-\lambda_2}\varphi_{1k}\big|^2}{\big|1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}\big|^2} \geq \begin{cases}\big|t^{l-\lambda_1}t_0^{\lambda_1-\lambda_2}u_k^{(l)}(t)\big|^2, & t\leq t_0,\\ \big|t^{l-\lambda_2}u_k^{(l)}(t)\big|^2, & t\geq t_0.\end{cases}$$

Величини λ_l^* визначають формули

$$(12)\qquad \lambda_0^* = 1, \quad \lambda_1^* = \max_r|\lambda_r|^2, \quad \lambda_2^* = \max_r|(\lambda_r-1)\lambda_r|^2 = \max_r|a\lambda_r + b|^2.$$

3. Оцінювання розв'язку

Нехай компоненти вектора

$$\vec{b} = \big(b(1),\dots,b(p)\big) = \big(b_{s(1)},\dots,b_{s(p)}\big),$$

де $s(j) = \big(\underbrace{0,\dots,0,2}_{j},0,\dots,0\big)$, у рівнянні (1) належать кругу Q^* радіуса b^*, а саме $Q^* = \{z\in\mathbb{C}\colon |z|\leq b^*\}$. Тоді залежні від k величини

$$\lambda_1(k), \lambda_2(k), D(k), \Delta(k)$$

залежать також і від цього вектора на множині $Q^{*p} = \underbrace{Q^*\times\dots\times Q^*}_{p}$.

Розглядаємо множину розв'язків $u=u(t,x)$ задачі (1), (3) складену для значень вектора $\vec{b}$ на множині Q^{*p} з метою визначення її метричних оцінок.

Оскільки $|a(ik)|\leq L_1\tilde{k}$ і $|b(ik)|\leq L_1^2\tilde{k}^2$, то $|D(k)|\leq L_2^2\tilde{k}^2$ і $|\lambda_j(k)|\leq L_3\tilde{k}$, де додатні числа L_1, L_2, L_3 — не залежать від k та $\vec{b}$, а залежать від b^*.

З іншого боку, на підставі рівностей $D(k) = 4k_j^2 b(j) - D_1(k)$, де $D_1(k) = 4k_j^2 b(j) - D(k)$ не залежить від $b(j)$ і $k_j^2 = \max(k_1^2, \dots, k_p^2)$, отримаємо оцінки знизу.

Для довільного фіксованого $\varepsilon \in (0,1]$ виберемо послідовність невід'ємних чисел ε_k, які задовольняють умову $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}} \varepsilon_k^2 = \varepsilon/2$.

Тоді міра множини

$$\tilde{Q}_k\big(b(1),\dots,b(j-1),b(j+1),\dots,b(p)\big), \qquad k \neq 0,$$

елементів $b(j) \in Q^*$, що задовольняють нерівність

$$\Big|b(j) - \frac{D_1(k)}{4k_j^2}\Big| \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi^{p/2}b^{*p-1}}\varepsilon_k, \qquad \varepsilon_k \leq 1/2,$$

для довільного фіксованого вектора $\big(b(1),\dots,b(j-1),b(j+1),\dots,b(p)\big) \in Q^{*p-1}$ не перевищує $2\pi^{1-p}b^{*2(1-p)}\varepsilon_k^2$, а міра множини $\tilde{Q}_k$ усіх таких векторів $\vec{b} \in Q^{*p}$ не перевищує $2\varepsilon_k^2$.

Тому на доповненні $Q^{*p} \setminus \tilde{Q}_k$ цієї множини, шо має міру не меншу ніж $\pi^p b^{*(2p-2)}b^{*2} - 2\varepsilon_k^2$, справджується оцінка знизу

$$|D(k)| = 4k_j^2\Big|b(j) - \frac{D_1(k)}{4k_j^2}\Big| > \frac{4\sqrt{2}k_j^2}{\pi^{p/2}b^{*p-1}}\varepsilon_k \geq \frac{4\sqrt{2}\tilde{k}^2}{(p+1)\pi^{p/2}b^{*p-1}}\varepsilon_k.$$

Розглянемо вираз $\Delta(k) = 1 - \tau^{\lambda_1-\lambda_2}$, який треба оцінити знизу. Оскільки $\tau > 1$, а $\operatorname{Re}(\lambda_1 - \lambda_2) \leq 0$, то для $\Delta(k) = 1 - e^{(\lambda_1-\lambda_2)\ln\tau}$ маємо оцінку зверху

$$|\Delta(k)| \leq 1 + e^{\operatorname{Re}(\lambda_1-\lambda_2)\ln\tau} \leq 2$$

для усіх $\vec{b} \in Q^{*p}$, зокрема $|\Delta(k)| = 2$, якщо $e^{(\lambda_1-\lambda_2)\ln\tau} = -1$. Якщо ж $e^{(\lambda_1-\lambda_2)\ln\tau} = 1$, то $|\Delta(k)| = 0$.

Позначимо $\varepsilon_k^* = \dfrac{\varepsilon_k/\sqrt{\tilde{k}}}{\sqrt{m_0\pi^p b^{*2(p-1)}}}$, причому $m_0 = \dfrac{12}{11\pi}(L_2\ln\tau + 1)$, число ε вибираємо таким, щоб $\varepsilon_k^* \leq 1/2$; ще позначимо $z = (\lambda_1 - \lambda_2)\ln\tau$, тоді $\operatorname{Re} z \leq 0$ і

$$|z| = \sqrt{|D(k)|}\ln\tau \leq \tilde{k}L_2\ln\tau,$$

тобто z належить півкругу радіуса $\tilde{k}L_2\ln\tau$.

Образи прямокутників

$$R_m = \{z = x + iy\colon (x,y) \in [-\varepsilon_k^{**}, 0] \times [-\varepsilon_k^{**} + 2\pi m, \varepsilon_k^{**} + 2\pi m]\}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

де $\varepsilon_k^{**} = \dfrac{\tilde{k}\ln\tau}{pL_2}\varepsilon_k^* = \dfrac{\sqrt{\tilde{k}}\ln\tau\cdot\varepsilon_k/p}{\sqrt{m_0L_2^2\pi^p b^{*2(p-1)}}}$, що містять точки $2\pi i m$, при відображенні $w = e^z$ є однаковими, рис. 2; це частина кільця між колами $|z| = e^{-\varepsilon_k^{**}}$, $|z| = 1$ і променями $\arg z = \pm\varepsilon_k^{**}$.

Прямокутник R_m має ненульовий перетин з кругом $|z| \leq \tilde{k}L_2\ln\tau$, якщо $2\pi|m| - \varepsilon_k^{**} < \tilde{k}L_2\ln\tau$ або $11\pi|m| < 6\tilde{k}L_2\ln\tau$. Звідси отримуємо, що кількість таких перетинів не перевищує числа $m_0\tilde{k}$.

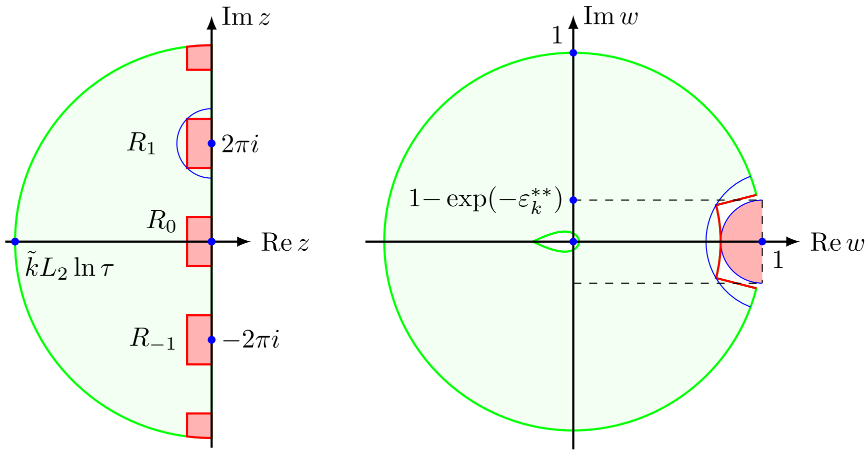

Рис. 2. Образи півкруга без прямокутників при відображенні $w = e^z$

Для довільної точки $z \notin \bigcup_m R_m$ півкруга справджується нерівність

$$|1 - e^z| \geq 1 - e^{-\varepsilon_k^{**}} > \frac{3}{4}\varepsilon_k^{**}.$$

Справді, відстань від одиниці до точок $e^{-\varepsilon_k^{**}} \cdot e^{i\varphi}$ дуги $|\arg z| \leq \varepsilon_k^{**}$ на колі $|z| = e^{-\varepsilon_k^{**}}$ не перевищує $1 - e^{-\varepsilon_k^{**}}$, оскільки

$$|1 - e^{i\varphi - \varepsilon_k^{**}}|^2 = \left(1 - e^{-\varepsilon_k^{**}}\cos\varphi\right)^2 + e^{-2\varepsilon_k^{**}}\sin^2\varphi \geq \left(1 - e^{-\varepsilon_k^{**}}\cos\varphi\right)^2 \geq \left(1 - e^{-\varepsilon_k^{**}}\right)^2.$$

Відстань від одиниці до точок $|z|e^{\pm i\varepsilon_k^{**}}$ відрізка $1 - e^{-\varepsilon_k^{**}} \leq |z| \leq 1$ обох променів $\arg z = \pm\varepsilon_k^{**}$ не перевищує відстані до прямих $y = \pm \operatorname{tg}\varepsilon_k^{**} \cdot x$ відповідно, яка є однаковою і дорівнює $\sin\varepsilon_k^{**}$.

Тому $|1 - e^z| \geq \min\left(1 - e^{-\varepsilon_k^{**}}, \sin\varepsilon_k^{**}\right)$, оскільки мінімум модуля функції $1 - e^z$ на півкрузі з вилученими прямокутниками досягається на розглянутій частині границі кільця.

На відрізку $[0, 1/2]$ маємо нерівності $\sin x > 1 - e^{-x} > 3x/4$, які випливають з формули Маклорена

$$\sin x - (1 - e^{-x}) = \frac{x^2}{2} + \frac{e^{-\theta x} + \sin\theta x}{24}x^4 > \frac{x^2}{3} \geq 0,$$

$$1 - e^{-x} - \frac{3}{4}x = \left(x - e^{-\theta x}\frac{x^2}{2}\right) - \frac{3}{4}x > \frac{x}{4} - \frac{x^2}{2} = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{2} - x\right) \geq 0,$$

де $\theta = \theta(x)$ належить інтервалу $(0, 1)$.

Використовуємо рівність

$$(13) \qquad z - 2\pi im = \frac{D(k)\ln^2\tau + 4\pi^2m^2}{z + 2\pi im} = \frac{b(j) - (D_1(k) - 4\pi^2m^2)/(4k_j^2\ln^2\tau)}{(z + 2\pi im)/(4k_j^2\ln^2\tau)},$$

де $D_1(k)$ не залежить від $b(j)$. Оскільки міра множини

$$Q_{mk}\big(b(1), \ldots, b(j-1), b(j+1), \ldots, b(p)\big), \qquad k \neq 0,$$

елементів $b(j) \in Q^*$, що при фіксованому m задовольняють нерівність

$$\left|b(j) - \frac{D_1(k) - 4\pi^2 m^2}{4k_j^2 \ln^2 \tau}\right| \le \sqrt{2}\varepsilon_k^* \tag{14}$$

для довільного фіксованого вектора $\big(b(1), \dots, b(j-1), b(j+1), \dots, b(p)\big) \in Q^{*p-1}$, не перевищує $2\pi\varepsilon_k^{*2} = \dfrac{2\varepsilon_k^2}{m_0 \pi^{p-1} b^{*2(p-1)} \tilde{k}}$, то міра множини $Q_k = \bigcup\limits_m Q_{mk}$ усіх таких векторів $\vec{b} \in Q^{*p}$, що задовольняють нерівність хоча б для одного m, не більша $2\varepsilon_k^2$.

З нерівностей (13), (14) для $\vec{b} \in Q^{*p} \setminus Q_k$ випливає формула

$$|z - 2\pi i m| \ge 4k_j^2 \ln^2 \tau \frac{11\sqrt{2}\varepsilon_k^*}{23\tilde{k} L_2 \ln \tau} > \sqrt{2}\frac{\tilde{k} \ln \tau}{p L_2}\varepsilon_k^* = \sqrt{2} \cdot \varepsilon_k^{**},$$

яка справджується для всіх $k \ne 0$.

Звідси легко бачити, що $z \notin \bigcup_m R_m$, де $\operatorname{meas} Q_k \le 2\varepsilon_k^2$, і тому маємо такі оцінки знизу: $|1 - e^z| \ge 3/8$, якщо $\varepsilon_k^{**} \ge 1/2$, та $|1 - e^z| \ge 3\varepsilon_k^{**}/4$, якщо $\varepsilon_k^{**} < 1/2$.

Позначимо Q_0 — множину векторів (a_0, b_0), які лежать на комплексних параболах

$$b_0 = \left(\frac{a_0 - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{\ln \tau}\right)^2$$

для цілих чисел m; якщо $(a_0, b_0) \notin Q_0$, то $\Delta(0) \ne 0$.

У припущенні $(a_0, b_0) \notin Q_0$ для довільних достатньо малих $\varepsilon > 0$ і послідовності $\varepsilon_k \ge 0$, для яких $\sum_{k \ne 0} \varepsilon_k^2 = \varepsilon/2$, на множині $\vec{b} \in Q^{*p} \setminus Q$ знаменники у формулі (11) задовольняють нерівність

$$|1 - \tau^{\lambda_1 - \lambda_2}| \ge \min\left(|\Delta(0)|, \frac{3}{8}, \frac{3}{4} L_4 \tilde{k}^{1/2} \varepsilon_k\right) \ge L_5 \tilde{k}^{1/2} \varepsilon_k, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{15}$$

де $Q = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} Q_k$, $\operatorname{meas} Q \le \varepsilon$ і $L_4 = \dfrac{\ln \tau}{p L_2 b^{*p-1} \sqrt{m_0 \pi^p}} > 0$, $L_5 > 0$.

Для заданого ε і невід'ємної послідовності f_k з умовою $0 < F = \sum\limits_{k \ne 0} f_k^2 < \infty$ послідовність ε_k будується за правилом $\varepsilon_k = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2F}} f_k$.

Нехай корені (7) рівняння (6) на множині $\tilde{Q} \subset Q^{*p} \setminus Q$ задовольняють умови

$$-\lambda_0^- \tilde{k} \le \operatorname{Re}(\lambda_1 - \lambda_2) \le \lambda_0^+ \tilde{k}, \qquad -\lambda_j^- \tilde{k} \le \operatorname{Re} \lambda_j \le \lambda_j^+ \tilde{k}, \quad j = 1, 2, \tag{16}$$

для деяких дійсних чисел $\lambda_0^\pm$, $\lambda_1^\pm$, $\lambda_2^\pm$. Тоді $-L_3 \le -\lambda_1^- \le -\lambda_2^- \le \lambda_1^+ \le \lambda_2^+ \le L_3$ і $-2L_2 \le -\lambda_0^- \le \lambda_0^+ \le 0$, тобто ці умови виконуються на усій множині Q^{*p} для чисел $\lambda_1^\pm = \lambda_2^\pm = L_3$ і $\lambda_0^- = 2L_2$, $\lambda_0^+ = 0$.

Нерівності $\lambda_r^* \le L_6^2 \tilde{k}^{2r}$, де $r = 0, 1, 2$, $L_6 > 0$, і формули (11), (12), (15), (16) дають змогу у разі $t_1 \le 1$, за умови $(a_0, b_0) \notin Q_0$, визначити для векторів $\vec{b} \in Q^{*p} \setminus Q$ оцінки

$$t^{2r} \big|\tilde{k}^{-r} t^{\lambda_1^- \tilde{k}} u_k^{(r)}(t)\big|^2 \le \frac{8L_6^2}{L_5^2 \tilde{k} \varepsilon_k^2} \big(\big|t_0^{-\lambda_1^+ \tilde{k}} \varphi_{0k}\big|^2 + \big|t_1^{-\lambda_1^+ \tilde{k}} \varphi_{1k}\big|^2\big), \qquad t \le t_1, \tag{17}$$

$$t^{2r}\big|\tilde{k}^{-r}t^{\lambda_2^-}t_1^{\lambda_0^-\tilde{k}}u_k^{(r)}(t)\big|^2 \le \frac{8L_6^2}{L_5^2\tilde{k}\varepsilon_k^2}\big(\big|t_0^{-\lambda_1^+\tilde{k}}\varphi_{0k}\big|^2+\big|t_1^{-\lambda_1^+\tilde{k}}\varphi_{1k}\big|^2\big), \quad t_1<t\le 1, \tag{18}$$

$$t^{2r}\big|\tilde{k}^{-r}t^{-\lambda_2^+}t_1^{\lambda_0^-\tilde{k}}u_k^{(r)}(t)\big|^2 \le \frac{8L_6^2}{L_5^2\tilde{k}\varepsilon_k^2}\big(\big|t_0^{-\lambda_1^+\tilde{k}}\varphi_{0k}\big|^2+\big|t_1^{-\lambda_1^+\tilde{k}}\varphi_{1k}\big|^2\big), \qquad t>1. \tag{19}$$

Аналогічні оцінки для u_k, де $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}$, визначено також в інших двох випадках.

4. Основний результат

На підставі отриманих нерівностей для функцій u_k і оцінок мір множин векторів $\vec{b}$ доводимо такі твердження.

Теорема 1. *Якщо $\varphi_0\in\Phi_{(p^*+3)/2,g_{0j}}$, $\varphi_1\in\Phi_{(p^*+3)/2,g_{1j}}$, причому вибір g_{0j}, g_{1j} та t_0, t_1 визначає таблиця*

j	1	2	3
$t_0,\ t_1$	$t_1\le 1$	$t_0<1<t_1$	$t_0\ge 1$
g_{0j}	$t_0^{-L_3}$	$t_0^{-L_3}$	$t_0^{L_3}$
g_{1j}	$t_1^{-L_3}$	$t_1^{L_3}$	$t_1^{L_3}$

, *$p^*>p$ і $(a_0,b_0)\notin Q_0$, то для довільного $\varepsilon>0$ існує така множина $Q\subset Q^{*p}$ з мірою $\operatorname{meas}Q\leqslant\varepsilon$, що для довільного $\vec{b}\in Q^{*p}\setminus Q$ існує єдиний розв'язок и задачі* (1), (2) *з простору U_{2,G_j} і справджуються оцінки*

$$\|u\|^2_{2,G_j}\le\frac{16L_6^2\zeta(p^*)}{\varepsilon L_5^2}\big(\|\varphi_0\|^2_{(p^*+3)/2,g_{0j}}+\|\varphi_1\|^2_{(p^*+3)/2,g_{1j}}\big), \qquad j=1,2,3, \tag{20}$$

де $\zeta(p^*)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\tilde{k}^{-p^*}$, з функціями

$$G_1(t)=\begin{cases} t^{L_3}, & \text{якщо } t\le t_1,\\ t^{L_3}t_1^{2L_2}, & \text{якщо } t_1\le t\le 1,\\ t^{-L_3}t_1^{2L_2}, & \text{якщо } t\ge 1,\end{cases}$$

$$G_2(t)=\begin{cases} t^{L_3}, & \text{якщо } t\le 1,\\ t^{-L_3}, & \text{якщо } t\ge 1,\end{cases}$$

$$G_3(t)=\begin{cases} t^{L_3}t_0^{-2L_2}, & \text{якщо } t\le 1,\\ t^{-L_3}t_0^{-2L_2}, & \text{якщо } 1\le t\le t_0,\\ t^{-L_3}, & \text{якщо } t\ge t_0.\end{cases}$$

Доведення. Існування. Приймемо $\varepsilon_k^2=\dfrac{\varepsilon}{2\zeta(p^*)}\tilde{k}^{-p^*}$, де $p^*>p$ і $\varepsilon>0$. На підставі оцінок (17), (18), (19), в яких $\lambda_1^\pm=\lambda_2^\pm=L_3$ і $\lambda_0^-=2L_2$, $\lambda_0^+=0$, та означень просторів $\Phi_{q,g}$ і $U_{q,G}$ одержуємо оцінку (20) для $j=1$ з зазначеними сталими g_{01} і g_{11} та функцією $G_1(t)$. З аналогічних оцінок одержують нерівності (20) для $j=2,3$. Формули (20) справджуються для всіх $\vec{b}\in Q^{*p}\setminus Q$ за умови $(a_0,b_0)\notin Q_0$. Отримані нерівності доводять належність розв'язку до просторів U_{2,G_j}, де $j=1,2,3$, у залежності від значень t_0, t_1.

Єдиність. Припустимо, що існують два розв'язки $u_1 = u_1(t,x)$ і $u_2 = u_2(t,x)$ задачі (1), (2) з простору U_{2,G_j}. Тоді функція $u = u_2 - u_1$ є розв'язком задачі (1) з простору U_{2,G_j} з нульовими умовами

$$u(t_0,x) = 0, \quad u(t_1,x) = 0, \qquad x \in \Omega^p_{2\pi}.$$

Кожний із коефіцієнтів Фур'є функції u є розв'язком відповідної задачі (4), (9) при $\varphi_{0k} = \varphi_{1k} = 0$. Згідно з умовами теореми на коефіцієнти рівняння $(a_0,b_0) \notin Q_0$ і $\vec{b} \in Q^{*p} \setminus Q$ випливає, що $\Delta(k) \neq 0$ для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Отже, $u_k(t) \equiv 0$ на $[t^-,t^+]$ для усіх k, тому відповідно $u = 0$, тобто $u_1 = u_2$. Теорему доведено. □

Точніший результат отримується під час використання додаткових умов (16) для деякого фіксованого малого числа $\varepsilon > 0$; при цьому $\operatorname{meas}\tilde{Q} \leqslant \pi^p b^{*2p} - \varepsilon$.

Теорема 2. *Якщо* $\varphi_0 \in \Phi_{(p^*+3)/2,g_{0j}}$, $\varphi_1 \in \Phi_{(p^*+3)/2,g_{1j}}$, *причому вибір* g_{0j}, g_{1j} *та* t_0, t_1 *визначає таблиця*

j	1	2	3
$t_0,\ t_1$	$t_1 \leq 1$	$t_0 < 1 < t_1$	$t_0 \geq 1$
g_{0j}	$t_0^{-\lambda_1^+}$	$t_0^{-\lambda_1^+}$	$t_0^{\lambda_2^-}$
g_{1j}	$t_1^{-\lambda_1^+}$	$t_1^{\lambda_2^-}$	$t_1^{\lambda_2^-}$

$p^* > p$ *та* $(a_0,b_0) \notin Q_0$ *і виконується умова* (16), *то для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує така множина* $Q \subset Q^{*p}$ *з мірою* $\operatorname{meas} Q \leqslant \varepsilon$, *що для довільного* $\vec{b} \in \tilde{Q} \subset Q^{*p} \setminus Q$ *існує єдиний розв'язок* u *задачі* (1), (2) *з простору* U_{2,G_j} *і справджуються оцінки*

$$\|u\|^2_{2,G_j} \leq \frac{16L_6^2\zeta(p^*)}{\varepsilon L_5^2}\left(\|\varphi_0\|^2_{(p^*+3)/2,g_{0j}} + \|\varphi_1\|^2_{(p^*+3)/2,g_{1j}}\right), \qquad j = 1,2,3, \tag{21}$$

де $\zeta(p^*) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}} \tilde{k}^{-p^*}$, *з функціями*

$$G_1(t) = \begin{cases} t^{\lambda_1^-}, & \text{якщо } t \leq t_1, \\ t^{\lambda_2^-} t_1^{\lambda_0^-}, & \text{якщо } t_1 \leq t \leq 1, \\ t^{-\lambda_2^+} t_1^{\lambda_0^-}, & \text{якщо } t \geq 1, \end{cases}$$

$$G_2(t) = \begin{cases} t^{\lambda_1^-}, & \text{якщо } t \leq 1, \\ t^{-\lambda_2^+}, & \text{якщо } t \geq 1, \end{cases}$$

$$G_3(t) = \begin{cases} t^{\lambda_1^-} t_0^{-\lambda_0^-}, & \text{якщо } t \leq 1, \\ t^{-\lambda_1^+} t_0^{-\lambda_0^-}, & \text{якщо } 1 \leq t \leq t_0, \\ t^{-\lambda_2^+}, & \text{якщо } t \geq t_0. \end{cases}$$

5. Висновки

Використовуючи нерівності $-L_3 \leq -\lambda_1^- \leq -\lambda_2^- \leq \lambda_1^+ \leq \lambda_2^+ \leq L_3$ і $-2L_2 \leq -\lambda_0^- \leq \lambda_0^+ \leq 0$ можна порівняти простори отримані в теоремі 1 та теоремі 2. Для

$j=1$, тобто $t_0 < t_1 \leqslant 1$, отримуємо

$$t_0^{-\lambda_1^+} \leqslant t_0^{-L_3}, \quad t_1^{-\lambda_1^+} \leqslant t_1^{-L_3}, \quad t^{\lambda_1^-} \geqslant t^{L_3} \quad \text{для} \quad t \leq t_1,$$

$$t^{\lambda_2^-} t_1^{\lambda_0^-} \geqslant t^{L_3} t_1^{2L_2} \quad \text{для} \quad t_1 \leq t \leq 1, \quad t^{-\lambda_2^+} t_1^{\lambda_0^-} \geqslant t^{-L_3} t_1^{2L_2} \quad \text{для} \quad t \geq 1.$$

Аналогічно отримуються такі ж нерівності для $j = 2, 3$. З отриманих нерівностей можна побачити, що простори $\Phi_{(p^*+3)/2, g_{0j}}$ та $\Phi_{(p^*+3)/2, g_{1j}}$ у разі виконання умови (16) є ширшими, а простори розв'язків U_{2,G_j} — вужчими в теоремі 2 у порівнянні з просторами теореми 1.

Зауважимо, що отримані результати переносяться на випадок багатоточкових задач для рівнянь і систем рівнянь високого порядку типу Ейлера.

Список використаної літератури

1. І. О. Бобик, Б. Й. Пташник, *Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами*, Укр. мат. журн. **46** (1994), no. 7, 795–802; **English version:** I. O. Bobyk and B. I. Ptashnyk, *Boundary-value problems for hyperbolic equations with constant coefficients*, Ukr. Math. J. **46** (1994), no. 7, 869–877. DOI: 10.1007/BF01056663
2. І. О. Бобик, М. М. Симотюк, *Задача з двома кратними вузлами для лінійних факторизованих рівнянь із частинними похідними*, Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. (2010), no. 625, 11–19.
3. П. І. Каленюк, І. В. Когут, З. М. Нитребич, *Дослідження задачі з однорідними локальними двоточковими умовами для однорідної системи рівнянь із частинними похідними*, Мат. методи та фіз.-мех. поля. **52** (2009), no. 4, 7–17; **English version:** P. I. Kalenyuk, I. V. Kohut, and Z. M. Nytrebych, *An investigation into a problem with homogeneous local two-point conditions for a homogeneous system of partial differential equations*, J. Math. Sci. **174** (2011), no. 2, 121–135. DOI: 10.1007/s10958-011-0285-y
4. З. М. Нитребич, Б. Й. Пташник, С. М. Репетило, *Задача Діріхле–Неймана для лінійного гіперболічного рівняння високого порядку зі сталими коефіцієнтами у смузі*, Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. "Математика і інформатика" **25** (2014), no. 1, 94–105.
5. З. М. Нитребич, О. М. Маланчук, *Диференціально-символьний метод розв'язування двоточкової за часом задачі для рівняння із частинними похідними*, Укр. мат. вісник **13** (2016), no. 4, 514–531; **English version:** Z. M. Nytrebych and O. M. Malanchuk, *The differential-symbol method of solving the two-point problem with respect to time for a partial differential equation*, J. Math. Sci. **224** (2017), no. 4, 541–554. DOI: 10.1007/s10958-017-3434-0
6. Z. M. Nytrebych, O. M. Malanchuk, V. S. Il'kiv, and P. Ya. Pukach, *On the solvability of two-point in time problem for PDE*, Ital. J. Pure Appl. Math. **38** (2017), 715–726.
7. В. Н. Павленко, Т. А. Петраш, *Периодические решения уравнения колебаний струны с граничными условиями Неймана и Дирихле и разрывной нелинейностью*, Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. **18** (2012), no. 2, 199–204.
8. Б. И. Пташник, *Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными*, Наук. думка, Киев, 1984.
9. Б. И. Пташник, П. И. Штабалюк, *Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным*, Дифференц. уравнения. **22** (1986), no. 4, 669–678.
10. Б. Й. Пташник, С. М. Репетило, *Задача Діріхле–Неймана для системи рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами*, Прикл. проблеми механіки і математики **10** (2012), 7–14.

11. Б. И. Пташник, С. М. Репетило, *Задача Діріхле-Неймана у смузі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами*, Мат. методи та фіз.-мех. поля. **56** (2013), no. 3, 15–28; **English version:** B. Yo. Ptashnyk and S. M. Repetylo, *Dirichlet-Neumann problem in a strip for hyperbolic equations with constant coefficients*, J. Math. Sci. **205** (2015), no. 4, 501–517. DOI: 10.1007/s10958-015-2263-2
12. Б. И. Пташник, С. М. Репетило, *Задача Діріхле–Неймана для систем гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами*, Мат. методи та фіз.-мех. поля. **57** (2014), no. 2, 25–31; **English version:** B. Yo. Ptashnyk and S. M. Repetylo, *Dirichlet–Neumann problem for systems of hyperbolic equations*, J. Math. Sci. **215** (2016), no. 1, 26–35. DOI: 10.1007/s10958-016-2819-9
13. С. М. Репетило, М. М. Симотюк, *Задача Діріхле-Неймана для рівнянь із частинними похідними високого порядку зі сталими коефіцієнтами*, Прикл. проблеми механіки і математики. **16** (2018), 147–153.
14. М. М. Симотюк, *Двоточкова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами*, Наук. Вісник Ужгород. нац. ун-ту. **7** (2002), 96–107.
15. М. М. Симотюк *Двоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь*, Мат. методи та фіз.-мех. поля. **4**8 (2005), № 1, 44–58.
16. М.М. Симотюк, *Задача з двома кратними вузлами для систем лінійних рівнянь із частинними похідними, однорідних за порядком диференціювання*, Матем. вісник НТШ **1** (2004), 130–148.

Стаття: надійшла до редколегії 07.12.2020
доопрацьована 31.12.2020
прийнята до друку 18.05.2021

THE TWO-POINT PROBLEM FOR EULER TYPE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER

Volodymyr ILKIV, Yaroslav SLONOVSKYI

Lviv Polytechnic National University,
Stepana Bandery Str., 12, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: yaroslav.o.slonovskyi@lpnu.ua

A two-point problem for partial differential equations of the second order with coefficients dependent only on time variable (Euler type equation) is considered. This problem is ill-posed, and its solvability is related to the problem of small denominators. Existence and uniqueness of the solution are established, based on lower bounds estimations for the small denominators.

Key words: partial differential equations, two-point problem, small denominators, ill-posed problems.