ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2021. Випуск 91. С. 5–27
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2021. Issue 91. P. 5–27
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2021.91.005-027

УДК 512.53

ПРО ГРУПОВІ КОНГРУЕНЦІЇ НА НАПІВГРУПІ $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ТА ЇЇ ГОМОМОРФНІ РЕТРАКТИ У ВИПАДКУ, КОЛИ СІМ'Я $\mathscr{F}$ СКЛАДАЄТЬСЯ З НЕПОРОЖНІХ ІНДУКТИВНИХ ПІДМНОЖИН У ω

Олег ГУТІК, Микола МИХАЛЕНИЧ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,
myhalenychmc@gmail.com

Вивчаємо групові конгруенції на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ та її гомоморфні ретракти у випадку, коли $\mathscr{F}$ — ω-замкнена сім'я з індуктивних непорожніх підмножин в ω. Доведено, що конгруенція $\mathfrak{C}$ на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є груповою, тоді і лише тоді, коли звуження конгруенції $\mathfrak{C}$ на піднапівгрупу в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, яка ізоморфна біциклічній напівгруп, не є відношенням рівності. Також, описуємо всі нетривіальні гомоморфні ретракти й ізоморфізми напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Ключові слова: інверсна напівгрупа, біциклічна напівгрупа, індуктивна множина, групова конгруенція, гомоморфний ретракт, ізоморфізм, автоморфізм.

1. Вступ

Ми користуємося термінологією з монографій [8, 9, 16, 18]. Надалі у тексті множину невід'ємних цілих чисел позначатимемо через ω. Для довільного числа $k \in \omega$ позначимо $[k) = \{i \in \omega \colon i \geqslant k\}$.

Нехай $\mathscr{P}(\omega)$ — сім'я усіх підмножин у ω. Для довільних $F \in \mathscr{P}(\omega)$ і $n, m \in \omega$ приймемо

$$n - m + F = \{n - m + k \colon k \in F\}, \qquad \text{якщо } F \neq \varnothing$$

і $n - m + F = \varnothing$, якщо $F = \varnothing$. Будемо говорити, що непорожня підсім'я $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ є *ω-замкненою*, якщо $F_1 \cap (-n + F_2) \in \mathscr{F}$ для довільних $n \in \omega$ та $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$.

Підмножина A в ω називається *індуктивною*, якщо з $i \in A$ випливає, що $i + 1 \in A$. Очевидно, що $\varnothing$ — індуктивна множина в ω.

2020 Mathematics Subject Classification: 20M10, 20M15, 18B40

Зауваження 1. (1) За лемою 6 з [2] непорожня множина $F \subseteq \omega$ є індуктивною в ω тоді і лише тоді, коли $(-1+F)\cap F = F$.

(2) Оскільки множина ω зі звичайним порядком є цілком впорядкованою, то для кожної непорожньої індуктивної множини F у ω існує невід'ємне ціле число $n_F \in \omega$ таке, що $[n_F) = F$.

(3) З (2) випливає, що перетин довільної скінченної кількості непорожніх індуктивних підмножин у ω є непорожньою індуктивною підмножиною в ω.

Якщо S — напівгрупа, то її підмножина ідемпотентів позначається через $E(S)$. Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного її елемента x існує єдиний елемент $x^{-1} \in S$ такий, що $xx^{-1}x = x$ та $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$ [18, 1]. В інверсній напівгрупі S вище означений елемент x^{-1} називається *інверсним до* x. *В'язка* — це напівгрупа ідемпотентів, а *напівґратка* — це комутативна в'язка.

Відношення еквівалентності $\mathfrak{K}$ на напівгрупі S називається *конгруенцією*, якщо для елементів a та b напівгрупи S з того, що виконується умова $(a,b)\in\mathfrak{K}$ випливає, що $(ca,cb),(ad,bd)\in\mathfrak{K}$, для довільних $c,d\in S$. Відношення $(a,b)\in\mathfrak{K}$ ми також записуватимемо $a\mathfrak{K}b$, і в цьому випадку говоритимемо, що *елементи* a *і* b *є* $\mathfrak{K}$*-еквівалентними*.

Конгруенція $\mathfrak{K}$ на напівгрупі S називається *груповою*, якщо фактор-напівгрупа $S/\mathfrak{K}$ ізоморфна деякій групі G [8]. Нагадаємо [16, 18], що на кожній інверсній напівгрупі S існує *найменша* (*мінімальна*) *групова конгруенція* $\boldsymbol{\sigma}$ і вона визначається так:

$$s\boldsymbol{\sigma}t \qquad \Longleftrightarrow \qquad es=et \quad \text{для деякого} \quad e\in E(S).$$

Якщо S — напівгрупа, то на її множині ідемпотентів $E(S)$ визначено частковий порядок

$$e \preccurlyeq f \text{ тоді і лише тоді, коли } ef=fe=e.$$

Так означений частковий порядок на $E(S)$ називається *природним.*

Означимо відношення $\preccurlyeq$ на інверсній напівгрупі S так:

$$s \preccurlyeq t \text{ тоді і лише тоді, коли } s=te, \text{ для деякого ідемпотента } e\in S.$$

Так означений частковий порядок називається *природним частковим порядком* на інверсній напівгрупі S [1]. Очевидно, що звуження природного часткового порядку $\preccurlyeq$ на інверсній напівгрупі S на її в'язку $E(S)$ є природним частковим порядком на $E(S)$.

Нагадаємо (див. [8, §1.12], що *біциклічною напівгрупою* (або *біциклічним моноїдом*) $\mathscr{C}(p,q)$ називається напівгрупа з одиницею, породжена двоелементною множиною $\{p,q\}$ і визначена одним співвідношенням $pq=1$. Біциклічна напівгрупа відіграє важливу роль у теорії напівгруп. Зокрема, класична теорема О. Андерсена [5] стверджує, що (0-)проста напівгрупа з (ненульовим) ідемпотентом є цілком (0-)простою тоді і лише тоді, коли вона не містить ізоморфну копію біциклічного моноїда. Різні розширення та узагальнення біциклічного моноїда вводилися раніше різними авторами [10, 11, 12, 15, 21]. Такими, зокрема, є конструкції Брука та Брука–Рейлі занурення напівгруп у прості й описання інверсних біпростих і 0-біпростих ω-напівгруп [7, 19, 20, 13].

Гомоморфною ретракцією називається відображення з напівгрупи S в S, яке є одночасно ретракцією та гомоморфізмом [8, 9]. Образ напівгрупи S при її гомоморфній ретракції називається *гомоморфним ретрактом*. Тобто гомоморфний ретракт напівгрупи S — це така піднапівгрупа T в S, що існує гомоморфізм з S на T, для якого піднапівгрупа T є множиною всіх його нерухомих точок. Терміни "гомоморфні ретракції" та "гомоморфні ретракти", здається, вперше з'явились у праці Брауна [6], як один з методів дослідження структури топологічних напівґраток. Очевидно, що кожне тотожне відображення напівгрупи S є її гомоморфною ретракцією, а також, якщо e — ідемпотент в S, то стале відображення $h\colon S\to S$, $x\mapsto e$ — гомоморфна ретракція напівгрупи S. Такі гомоморфні ретракції та тотожне відображення напівгрупи S будемо називати *тривіальними*, а образи напівгрупи S стосовно них — *тривіальними* гомоморфними ретрактами.

Зауваження 2. Легко бачити, що біциклічний моноїд $\mathscr{C}(p,q)$ ізоморфний напівгрупі, заданій на множині $\boldsymbol{B}_{\omega}=\omega\times\omega$ з напівгруповою операцією

$$
\begin{aligned}
(i_1,j_1)\cdot(i_2,j_2) &= (i_1+i_2-\min\{j_1,i_2\},j_1+j_2-\min\{j_1,i_2\}) =\\
&= \begin{cases} (i_1-j_1+i_2,j_2), & \text{якщо } j_1\leqslant i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2), & \text{якщо } j_1\geqslant i_2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

У праці [2] введено алгебричні розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ біциклічного моноїда для довільної ω-замкненої сім'ї $\mathscr{F}$ підмножин в ω, які узагальнюють біциклічний моноїд, зліченну напівгрупу матричних одиниць і деякі інші комбінаторні інверсні напівгрупи.

Нагадаємо цю конструкцію. Нехай $\boldsymbol{B}_{\omega}$ — біциклічний моноїд і $\mathscr{F}$ — непорожня ω-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$. На множині $\boldsymbol{B}_{\omega}\times\mathscr{F}$ означимо бінарну операцію "$\cdot$" формулою

$$
(1)\quad (i_1,j_1,F_1)\cdot(i_2,j_2,F_2)=\begin{cases} (i_1-j_1+i_2,j_2,(j_1-i_2+F_1)\cap F_2), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ (i_1,j_2,F_1\cap F_2), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,F_1\cap(i_2-j_1+F_2)), & \text{якщо } j_1>i_2. \end{cases}
$$

У [2] доведено таке твердження: якщо сім'я $\mathscr{F}\subseteq\mathscr{P}(\omega)$ є ω-замкненою, то $(\boldsymbol{B}_{\omega}\times\mathscr{F},\cdot)$ — напівгрупа.

Припустимо, що ω-замкнена сім'я $\mathscr{F}\subseteq\mathscr{P}(\omega)$ містить порожню множину $\varnothing$, то з означення напівгрупової операції $(\boldsymbol{B}_{\omega}\times\mathscr{F},\cdot)$ випливає, що множина $\boldsymbol{I}=\{(i,j,\varnothing)\colon i,j\in\omega\}$ є ідеалом напівгрупи $(\boldsymbol{B}_{\omega}\times\mathscr{F},\cdot)$.

Означення 1 ([2]). Для довільної ω-замкненої сім'ї $\mathscr{F}\subseteq\mathscr{P}(\omega)$ означимо

$$
\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}=\begin{cases} (\boldsymbol{B}_{\omega}\times\mathscr{F},\cdot)/\boldsymbol{I}, & \text{якщо } \varnothing\in\mathscr{F};\\ (\boldsymbol{B}_{\omega}\times\mathscr{F},\cdot), & \text{якщо } \varnothing\notin\mathscr{F}. \end{cases}
$$

У [2] доведено, що $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є комбінаторною інверсною напівгрупою, а також описано відношення Ґріна, частковий природний порядок на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ та її множину ідемпотентів. Також у [2] доведено критерії простоти, 0-простоти, біпростоти та 0-біпростоти напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, і зазначено умови, коли напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ містить одиницю, ізоморфна біциклічному моноїду або зліченній напівгрупі матричних одиниць.

Зауважимо, що у [3] отримано подібні результати до [2] у випадку розширення $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathscr{F}}$ розширеної біциклічної напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\mathbb{Z}}$ для довільної ω-замкненої сім'ї $\mathscr{F}$ підмножин в ω.

У [14, 17] досліджено алгебричну структуру напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ у випадку, коли ω-замкнена сім'я $\mathscr{F}$ складається з атомарних підмножин (одноточкових підмножин і порожньої множини) в ω. Зокрема доведено, що за виконання таких умов на сім'ю $\mathscr{F}$ напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна піднапівгрупі ω-розширення Брандта напівґратки $(\omega, \min)$. Також у [14, 17] досліджували топологізацію напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, близькі до компактних трансляційно неперервні топології на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ та замикання напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ у напівтопологічних напівгрупах.

Із зауваження 1(3) випливає таке: якщо сім'я $\mathscr{F}_0$ складається з індуктивних в ω підмножин і містить порожню множину $\varnothing$ як елемент, то для сім'ї $\mathscr{F} = \mathscr{F}_0 \setminus \{\varnothing\}$ множина $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ з індукованою напівгруповою операцією з $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_0}$ є піднапівгрупою в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_0}$.

Ми вивчаємо алгебричну структуру напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ у випадку, коли ω-замкнена сім'я $\mathscr{F}$ складається з індуктивних непорожніх підмножин у ω, а саме групові конгруенції на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ та її гомоморфні ретракти. Доведено, що конгруенція $\mathfrak{C}$ на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є груповою, тоді і лише тоді, коли звуження конгруенції $\mathfrak{C}$ на піднапівгрупу в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі, не є відношенням рівності. Також описуємо всі нетривіальні гомоморфні ретракти та ізоморфізми напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Надалі скрізь у тексті ми вважаємо, що ω-замкнена сім'я $\mathscr{F}$ складається лише з індуктивних непорожніх підмножин у ω.

2. Алгебричні властивості напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$

Твердження 1. *Нехай $\mathscr{F}$ — довільна ω-замкнена сім'я підмножин у ω і $n_0 = \min\left\{\bigcup \mathscr{F}\right\}$. Тоді:*

(1) *$\mathscr{F}_0 = \{-n_0 + F \colon F \in \mathscr{F}\}$ — ω-замкнена сім'я підмножин у ω;*
(2) *напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_0}$ ізоморфні.*

Доведення. Спочатку зауважимо, оскільки множина ω зі звичайним порядком $\leqslant$ цілком впорядкована, то невід'ємне ціле число n_0 визначено коректно.

Твердження (1) очевидне.

(2) Очевидно, що відображення $\mathfrak{h} \colon (\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}, \cdot) \to (\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}_0, \cdot)$, означене за формулою

$$\mathfrak{h}(i, j, F) = (i, j, -n_0 + F),$$

бієктивне. Врахувавши, що $-n_0 + \varnothing = \varnothing$, отримуємо

$$\mathfrak{h}((i_1, j_1, F_1) \cdot (i_2, j_2, F_2)) = \begin{cases} \mathfrak{h}(i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + F_1) \cap F_2), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ \mathfrak{h}(i_1, j_2, F_1 \cap F_2), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ \mathfrak{h}(i_1, j_1 - i_2 + j_2, F_1 \cap (i_2 - j_1 + F_2)), & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, -n_0 + ((j_1 - i_2 + F_1) \cap F_2)), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, -n_0 + (F_1 \cap F_2)), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, -n_0 + (F_1 \cap (i_2 - j_1 + F_2))), & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases}$$

і

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{h}(i_1, j_1, F_1) \cdot \mathfrak{h}(i_2, j_2, F_2) &= (i_1, j_1, -n_0 + F_1) \cdot (i_2, j_2, -n_0 + F_2) = \\
&= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (-n_0 + j_1 - i_2 + F_1) \cap (-n_0 + F_2)), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, (-n_0 + F_1) \cap (-n_0 + F_2)), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, (-n_0 + F_1) \cap (-n_0 + i_2 - j_1 + F_2)), & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, -n_0 + ((j_1 - i_2 + F_1) \cap F_2)), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, -n_0 + (F_1 \cap F_2)), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, -n_0 + (F_1 \cap (i_2 - j_1 + F_2))), & \text{якщо } j_1 > i_2, \end{cases}
\end{aligned}
$$

отримуємо, що так означене відображення $\mathfrak{h}\colon (\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}, \cdot) \to (\boldsymbol{B}_{\omega} \times \mathscr{F}_0, \cdot)$ — гомоморфізм, а отже, воно є ізоморфізмом. Звідки випливає, що напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_0}$ ізоморфні. □

Врахувавши зауваження 1(2) і 1(3), надалі для кожної непорожньої множини $F \in \mathscr{F}$ приймемо $n_F = \min F$.

Лема 1. *Нехай $\mathscr{F}$ — ω-замкнена сім'я індуктивних підмножин у ω та F_1 і F_2 — такі елементи сім'ї $\mathscr{F}$, що $n_{F_1} < n_{F_2}$. Тоді для кожного натурального числа $k \in \{n_{F_1} + 1, \ldots, n_{F_2} - 1\}$ існує множина $F \in \mathscr{F}$ така, що $F = [k)$.*

Доведення. З припущення леми випливає, що $F_1 \supsetneqq F_2$. Тоді для довільного натурального числа $k \in \{n_{F_1} + 1, \ldots, n_{F_2} - 1\}$ ціле число $i = n_{F_1} + n_{F_2} - k$ задовольняє умову

$$n_{F_1} + 1 \leqslant i \leqslant n_{F_2} - 1,$$

а отже,

$$(i, i, F_1) \cdot (n_{F_1}, n_{F_1}, F_2) = (i, i, F_1 \cap (n_{F_1} - i + F_2)).$$

Позаяк $F_2 \subsetneqq F_1$ і $n_{F_1} + 1 \leqslant i \leqslant n_{F_2} - 1$, то

$$
\begin{aligned}
\min\{F_1 \cap (n_{F_1} - i + F_2)\} &= \min\{n_{F_1} - i + F_2\} = \\
&= n_{F_1} - i + n_{F_2} = \\
&= k.
\end{aligned}
$$

Отож виконується рівність

$$(i, i, F_1) \cdot (n_{F_1}, n_{F_1}, F_2) = (i, i, [k)),$$

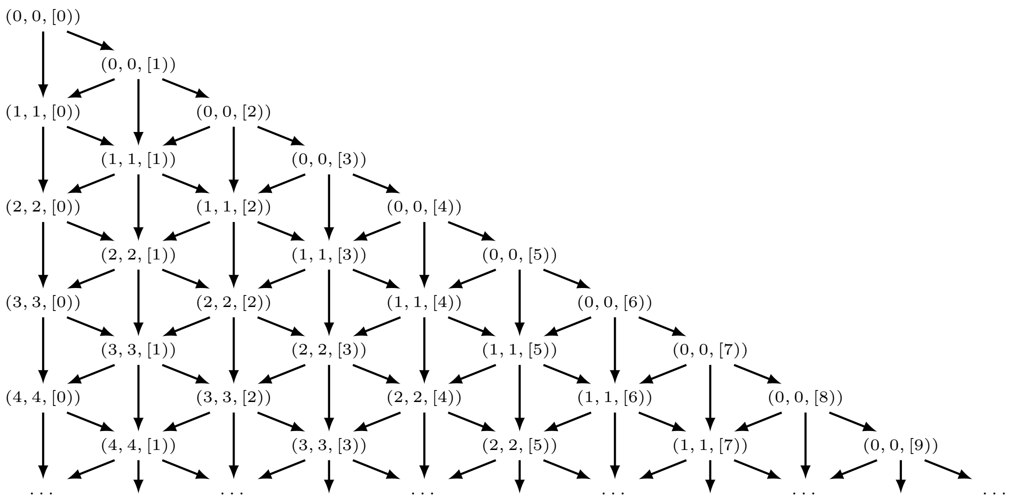
з якої випливає твердження леми. □

Зауваження 3. З твердження 1 і леми 1 випливає, якщо $\mathscr{F}$ — ω-замкнена сім'я індуктивних підмножин у ω, то надалі для спрощення викладу будемо вважати, що:

(1) $\mathscr{F} = \{[k)\colon k \in \omega\}$, у випадку нескінченної сім'ї $\mathscr{F}$;
(2) $\mathscr{F} = \{[k)\colon k = 0, 1, \ldots, n\}$ для деякого $n \in \omega$, у випадку скінченної сім'ї $\mathscr{F}$.

З леми 5 [2], врахувавши зауваження 3(1), отримуємо таке твердження.

Твердження 2. *Якщо $\mathscr{F}$ — нескінченна ω-замкнена сім'я індуктивних підмножин у ω, то діаграма*



описує природний частковий порядок на в'язці напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

З леми 5 [2], врахувавши зауваження 3(2), отримуємо

Твердження 3. *Якщо* $\mathscr{F} = \{[0), \ldots [k)\}$ *— скінченна* ω*-замкнена сім'я індуктивних підмножин у* ω*, то частина діаграми з твердження 2, що складається з ідемпотентів*

$$\{(i, i, [n)) \colon i, j \in \omega,\ n = 0, 1, \ldots, k\}$$

напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ *та відповідних стрілок, що їх з'єднують, описує природний частковий порядок на в'язці напівгрупи* $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

З означення напівгрупової операції на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ випливає, що у випадку, коли $\mathscr{F}$ — ω-замкнена сім'я підмножин у ω та $F \in \mathscr{F}$ — непорожня індуктивна підмножина в ω, то множина

$$\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{F\}} = \{(i, j, F) \colon i, j \in \omega\}$$

з індукованою напівгруповою операцією з $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є піднапівгрупою в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, яка за твердженням 3 з [2] ізоморфна біциклічній напівгрупі.

Твердження 4. *Нехай* $\mathscr{F}$ *— довільна* ω*-замкнена сім'я індуктивних підмножин у* ω *та* S *— піднапівгрупа в* $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$*, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі* $\boldsymbol{B}_{\omega}$*. Тоді існує така підмножина* $F \in \mathscr{F}$*, що* S *— піднапівгрупа в* $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{F\}}$.

Доведення. Нехай $\mathfrak{h} \colon \boldsymbol{B}_{\omega} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ — ізоморфізм вкладення. Тоді за твердженням 1.4.21(2) [16], $\mathfrak{h}(0,0)$ і $\mathfrak{h}(1,1)$ — ідемпотенти напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, а отже, за лемою 2 [2], $\mathfrak{h}(0,0) = (i_1, i_1, F_1)$ і $\mathfrak{h}(1,1) = (i_2, i_2, F_2)$ для деяких $i_1, i_2 \in \omega$ і $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$. Також з нерівності $(1,1) \preccurlyeq (0,0)$ у біциклічній напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}$ випливає, що $(i_2, i_2, F_2) \preccurlyeq (i_1, i_1, F_1)$ у напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. З леми 5 [2] випливає, що $i_1 \leqslant i_2$ і $F_2 \subseteq i_2 - i_1 + F_1$. Оскільки $\mathscr{F}$ — сім'я індуктивних підмножин у ω, то існують такі числа $k_1, k_2 \in \omega$, що $F_1 = [k_1)$ і $F_2 = [k_2)$.

Аналогічно отримуємо, що $\mathfrak{h}(0,1) = (i, j, [a))$ для деяких $i, j, a \in \omega$. Позаяк $(1,0)$ — інверсний елемент до $(0,1)$ в напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}$, то за твердженням 1.4.21 [16] і лемою 4 [2] матимемо

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}(1,0) &= \mathfrak{h}\left((0,1)^{-1}\right) = \\ &= (\mathfrak{h}(0,1))^{-1} = \\ &= ((i,j,[a]))^{-1} = \\ &= (j,i,[a]),\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}(i_1,i_1,[k_1]) &= \mathfrak{h}(0,0) = \\ &= \mathfrak{h}((0,1)\cdot(1,0)) = \\ &= \mathfrak{h}(0,1)\cdot\mathfrak{h}(1,0) = \\ &= (i,j,[a])\cdot(j,i,[a]) = \\ &= (i,i,[a])\end{aligned}$$

і аналогічно

$$\begin{aligned}(i_2,i_2,[k_2]) &= \mathfrak{h}(1,1) = \\ &= \mathfrak{h}((1,0)\cdot(0,1)) = \\ &= \mathfrak{h}(1,0)\cdot\mathfrak{h}(0,1) = \\ &= (j,i,[a])\cdot(i,j,[a]) = \\ &= (j,j,[a]).\end{aligned}$$

З однозначності зображення елементів напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ випливає, що $i = i_1$, $j = i_2$ й $a = k_1 = k_2$, а отже, $\mathfrak{h}(0,1) = (i_1,i_2,[k_1])$ і $\mathfrak{h}(1,0) = (i_2,i_1,[k_1])$. З означення напівгрупової операції в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ випливає, що піднапівгрупа $S = \langle (i_1,i_2,[k_1]),(i_2,i_1,[k_1])\rangle$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, породжена елементами $(i_1,i_2,[k_1])$ і $(i_2,i_1,[k_1])$, є інверсною піднапівгрупою в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k_1)\}}$. Напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k_1)\}}$ шукана. □

Теорема 1 описує групові конгруенції на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Теорема 1. *Нехай $\mathscr{F}$ — довільна ω-замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у ω та $\mathfrak{C}$ — конгруенція на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *$\mathfrak{C}$ — групова конгруенція на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$;*
(2) *існує піднапівгрупа S в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі та два різні елементи напівгрупи S є $\mathfrak{C}$-еквівалентними;*
(3) *для довільної піднапівгрупи T в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі, два різні елементи напівгрупи T є $\mathfrak{C}$-еквівалентними.*

Доведення. Імплікації (1)⇒(3) і (3)⇒(2) очевидні.

Доведемо імплікацію (2)⇒(1). Нехай S — піднапівгрупа в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі та два різні елементи в S є $\mathfrak{C}$-еквівалентними.

Припустимо, що відображення $\mathfrak{i}\colon \boldsymbol{B}_{\omega} \to S$ визначає ізоморфізм біциклічної напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}$ на напівгрупу S. Оскільки конгруенція $\mathfrak{C}$ на S не є рівністю, то існують різні елементи $x,y \in S$ такі, що $x\mathfrak{C}y$. Припустимо, що $x = \mathfrak{i}(n_1,n_2)$ і $y = \mathfrak{i}(m_1,m_2)$ для деяких $n_1,n_2,m_1,m_2 \in \omega$. Тоді $n_1 \neq m_1$ або $n_1 \neq m_2$.

З ізоморфності напівгруп $\boldsymbol{B}_\omega$ і S випливає, що S — інверсна напівгрупа. Тоді за твердженням 1.3.21 [16] отримуємо, що

$$\begin{aligned}
xx^{-1} &= \mathfrak{i}(n_1,n_2)\cdot(\mathfrak{i}(n_1,n_2))^{-1} =\\
&= \mathfrak{i}(n_1,n_2)\cdot(\mathfrak{i}(n_1,n_2)^{-1}) =\\
&= \mathfrak{i}(n_1,n_2)\cdot\mathfrak{i}(n_2,n_1) =\\
&= \mathfrak{i}((n_1,n_2)\cdot(n_2,n_1)) =\\
&= \mathfrak{i}(n_1,n_1),\\
x^{-1}x &= (\mathfrak{i}(n_1,n_2))^{-1}\cdot\mathfrak{i}(n_1,n_1) =\\
&= (\mathfrak{i}(n_1,n_2)^{-1})\cdot\mathfrak{i}(n_1,n_1) =\\
&= \mathfrak{i}(n_2,n_1)\cdot\mathfrak{i}(n_1,n_1) =\\
&= \mathfrak{i}((n_2,n_1)\cdot(n_1,n_2)) =\\
&= \mathfrak{i}(n_2,n_2),
\end{aligned}$$

і аналогічно

$$\begin{aligned}
yy^{-1} &= \mathfrak{i}((m_1,m_1)),\\
y^{-1}y &= \mathfrak{i}((m_2,m_2)).
\end{aligned}$$

З твердження 2.3.4(1) [16] випливає, що $xx^{-1}\mathfrak{C}yy^{-1}$ і $x^{-1}x\mathfrak{C}y^{-1}y$. Якщо $n_1\neq m_1$, то з ізоморфності напівгруп $\boldsymbol{B}_\omega$ і S випливає, що $xx^{-1}\neq yy^{-1}$, і аналогічно, якщо $n_2\neq m_2$, то $x^{-1}x\neq y^{-1}y$.

За твердженням 4 існує множина $F_0\in\mathscr{F}$ така, що S — піднапівгрупа в $\boldsymbol{B}_\omega^{\{F_0\}}$. Оскільки за твердженням 3 з [2] напівгрупа $\boldsymbol{B}_\omega^{\{F_0\}}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі, то за наслідком 1.32 з [8] усі ідемпотенти напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\{F_0\}}$ $\mathfrak{C}$-еквівалентні. Тоді з описання природного часткового порядку на напівґратці ідемпотентів напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ в твердженні 2 випливає, що для довільної множини $F\in\mathscr{F}$ існують різні ідемпотенти $(i,i,F),(j,j,F)$ піднапівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\{F\}}$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ такі, що

$$(i_0,i_0,F_0)\preccurlyeq(i,i,F)\preccurlyeq(j,j,F)\preccurlyeq(j_0,j_0,F_0) \tag{2}$$

для деяких $i_0,j_0\in\omega$.

Знову, скориставшись тим, що за твердженням 3 [2] напівгрупа $\boldsymbol{B}_\omega^{\{F\}}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі, отримуємо, що для довільної множини $F_1\in\mathscr{F}$ усі ідемпотенти напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\{F_1\}}$ $\mathfrak{C}$-еквівалентні, а з нерівності (2) випливає, що всі ідемпотенти напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ $\mathfrak{C}$-еквівалентні. □

Зауважимо, що аналогічне твердження до теореми 1 справджується і для напівгрупи часткових коскінченних ізометрій натуральних чисел $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ (див. [4, теорема 9]).

З прикладу 1 випливає, що на напівгрупі $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ існують негрупові конгруенції.

Приклад 1. Нехай $\mathscr{F}$ — довільна ω-замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у ω. Означимо відображення $\mathfrak{h}\colon\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}\to\boldsymbol{B}_\omega$ за формулою

$$\mathfrak{h}(i,j,F)=(i,j),\qquad i,j\in\omega,\quad F\in\mathscr{F}.$$

З означення напівгрупових операцій на напівгрупах $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}$ випливає, що так означене відображення $\mathfrak{h}$ є сюр'єктивним гомоморфізмом. Отож конгруенція $\mathfrak{h}^{\sharp}$ на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, породжена гомоморфізмом $\mathfrak{h}$, не є груповою.

3. Гомоморфні ретракти та ізоморфізми напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$

Приклад 2. Нехай $\mathscr{F}$ — довільна ω-замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у ω. Зафіксуємо довільну множину $F \in \mathscr{F}$. Означимо відображення $\mathfrak{h}_F \colon \boldsymbol{B}_{\omega} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ за формулою

$$\mathfrak{h}_F(i,j) = (i,j,F), \qquad i,j \in \omega.$$

З означення напівгрупових операцій на напівгрупах $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}$ випливає, що так означене відображення $\mathfrak{h}_F$ є гомоморфізмом.

Оскільки композиція гомоморфізмів напівгруп є гомоморфізмом, то з визначення гомоморфізмів $\mathfrak{h} \colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}$ і $\mathfrak{h}_F \colon \boldsymbol{B}_{\omega} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ (див. приклади 1 і 2, відповідно), випливає, що їхня композиція $\mathfrak{h}_F \circ \mathfrak{h}$ є гомоморфною ретракцією напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, тобто виконується таке твердження:

Твердження 5. *Нехай $\mathscr{F}$ — довільна ω-замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у ω та $F \in \mathscr{F}$. Тоді піднапівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{F\}}$ є гомоморфним ретрактом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.*

Приклад 3. Нехай $\mathscr{F}$ — довільна ω-замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у ω. Зафіксуємо довільну множину $[k) \in \mathscr{F}$. Означимо відображення $\mathfrak{h}_k \colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ за формулою

$$\mathfrak{h}_k(i,j,[a)) = \begin{cases} (i,j,[k)), & \text{якщо } a \leqslant k; \\ (i,j,[a)), & \text{якщо } a > k, \end{cases} \qquad i,j \in \omega, \quad [a) \in \mathscr{F}.$$

Лема 2. *Якщо $\mathscr{F}$ — довільна ω-замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у ω та $[k) \in \mathscr{F}$, то $\mathfrak{h}_k \colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ — гомоморфізм.*

Доведення. Нехай $(i_1,j_1,[a_1))$ і $(i_2,j_2,[a_2))$ — довільні елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. Розглянемо можливі випадки.

(1) Нехай $a_1, a_2 \leqslant k$. Тоді

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{h}_k((i_1,j_1,[a_1)) \cdot (i_2,j_2,[a_2))) = \\
&\qquad = \begin{cases} \mathfrak{h}_k(i_1-j_1+i_2, j_2, (j_1-i_2+[a_1)) \cap [a_2)), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ \mathfrak{h}_k(i_1, j_2, [a_1) \cap [a_2)), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ \mathfrak{h}_k(i_1, j_1-i_2+j_2, [a_1) \cap (i_2-j_1+[a_2))), & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} \\
&\qquad = \begin{cases} (i_1-j_1+i_2, j_2, [k)), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, [k)), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1-i_2+j_2, [k)), & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

і

$$\mathfrak{h}_k(i_1,j_1,[a_1))\cdot\mathfrak{h}_k(i_2,j_2,[a_2))=(i_1,j_1,[k))\cdot(i_2,j_2,[k))=$$
$$=\begin{cases}(i_1-j_1+i_2,j_2,(j_1-i_2+[k))\cap[k)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ (i_1,j_2,[k)\cap[k)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[k)\cap(i_2-j_1+[k))), & \text{якщо } j_1>i_2\end{cases}=$$
$$=\begin{cases}(i_1-j_1+i_2,j_2,[k)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ (i_1,j_2,[k)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[k))), & \text{якщо } j_1>i_2\end{cases}$$

(2) Припустимо, що $a_1>k$ і $a_2\leqslant k$. Тоді маємо, що

$$\mathfrak{h}_k((i_1,j_1,[a_1))\cdot(i_2,j_2,[a_2)))=$$
$$=\begin{cases}\mathfrak{h}_k(i_1-j_1+i_2,j_2,(j_1-i_2+[a_1))\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ \mathfrak{h}_k(i_1,j_2,[a_1)\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ \mathfrak{h}_k(i_1,j_1-i_2+j_2,[a_1)\cap(i_2-j_1+[a_2))), & \text{якщо } j_1>i_2\end{cases}=$$
$$=\begin{cases}(i_1-j_1+i_2,j_2,[k)), & \text{якщо } j_1<i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1\leqslant k;\\ (i_1-j_1+i_2,j_2,j_1-i_2+[a_1)), & \text{якщо } j_1<i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1>k;\\ (i_1,j_2,[a_1)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[a_1)), & \text{якщо } j_1>i_2\end{cases}$$

і

$$\mathfrak{h}_k(i_1,j_1,[a_1))\cdot\mathfrak{h}_k(i_2,j_2,[a_2))=(i_1,j_1,[a_1))\cdot(i_2,j_2,[k))=$$
$$=\begin{cases}(i_1-j_1+i_2,j_2,(j_1-i_2+[a_1))\cap[k)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ (i_1,j_2,[a_1)\cap[k)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[a_1)\cap(i_2-j_1+[k))), & \text{якщо } j_1>i_2\end{cases}=$$
$$=\begin{cases}(i_1-j_1+i_2,j_2,[k)), & \text{якщо } j_1<i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1\leqslant k;\\ (i_1-j_1+i_2,j_2,j_1-i_2+[a_1)), & \text{якщо } j_1<i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1>k;\\ (i_1,j_2,[a_1)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[a_1)), & \text{якщо } j_1>i_2.\end{cases}$$

(3) Якщо $a_1\leqslant k$ і $a_2>k$, то

$$\mathfrak{h}_k((i_1,j_1,[a_1))\cdot(i_2,j_2,[a_2)))=$$
$$=\begin{cases}\mathfrak{h}_k(i_1-j_1+i_2,j_2,(j_1-i_2+[a_1))\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ \mathfrak{h}_k(i_1,j_2,[a_1)\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ \mathfrak{h}_k(i_1,j_1-i_2+j_2,[a_1)\cap(i_2-j_1+[a_2))), & \text{якщо } j_1>i_2\end{cases}=$$
$$=\begin{cases}(i_1-j_1+i_2,j_2,[a_2)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ (i_1,j_2,[a_2)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[k)), & \text{якщо } j_1>i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1\leqslant k;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,i_2-j_1+[a_2)), & \text{якщо } j_1>i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1>k\end{cases}$$

і

$$\mathfrak{h}_k(i_1,j_1,[a_1))\cdot\mathfrak{h}_k(i_2,j_2,[a_2))=(i_1,j_1,[k))\cdot(i_2,j_2,[a_2))=$$
$$=\begin{cases}(i_1-j_1+i_2,j_2,(j_1-i_2+[k))\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ (i_1,j_2,[k)\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[k)\cap(i_2-j_1+[a_2))), & \text{якщо } j_1>i_2\end{cases}=$$
$$=\begin{cases}(i_1-j_1+i_2,j_2,[a_2)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ (i_1,j_2,[a_2)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[k)), & \text{якщо } j_1>i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1\leqslant k;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,i_2-j_1+[a_2)), & \text{якщо } j_1>i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1>k.\end{cases}$$

(4) Припустимо, що $a_1,a_2>k$. Тоді маємо, що

$$\mathfrak{h}_k((i_1,j_1,[a_1))\cdot(i_2,j_2,[a_2)))=$$
$$=\begin{cases}\mathfrak{h}_k(i_1-j_1+i_2,j_2,(j_1-i_2+[a_1))\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ \mathfrak{h}_k(i_1,j_2,[a_1)\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ \mathfrak{h}_k(i_1,j_1-i_2+j_2,[a_1)\cap(i_2-j_1+[a_2))), & \text{якщо } j_1>i_2\end{cases}=$$
$$=\begin{cases}(i_1-j_1+i_2,j_2,[a_2)), & \text{якщо } j_1<i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1\leqslant a_2;\\ (i_1-j_1+i_2,j_2,j_1-i_2+[a_1)), & \text{якщо } j_1<i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1>a_2;\\ (i_1,j_2,[a_2)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,i_2-j_1+[a_2)), & \text{якщо } j_1>i_2 \text{ і } i_2-j_1+a_2\geqslant a_1;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[a_1)), & \text{якщо } j_1>i_2 \text{ і } i_2-j_1+a_2<a_1\end{cases}$$

і

$$\mathfrak{h}_k(i_1,j_1,[a_1))\cdot\mathfrak{h}_k(i_2,j_2,[a_2))=(i_1,j_1,[a_1))\cdot(i_2,j_2,[a_2))=$$
$$=\begin{cases}(i_1-j_1+i_2,j_2,(j_1-i_2+[a_1))\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1<i_2;\\ (i_1,j_2,[a_1)\cap[a_2)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[a_1)\cap(i_2-j_1+[a_2))), & \text{якщо } j_1>i_2\end{cases}=$$
$$=\begin{cases}(i_1-j_1+i_2,j_2,[a_2)), & \text{якщо } j_1<i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1\leqslant a_2;\\ (i_1-j_1+i_2,j_2,j_1-i_2+[a_1)), & \text{якщо } j_1<i_2 \text{ і } j_1-i_2+a_1>a_2;\\ (i_1,j_2,[a_2)), & \text{якщо } j_1=i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,i_2-j_1+[a_2)), & \text{якщо } j_1>i_2 \text{ і } i_2-j_1+a_2\geqslant a_1;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2,[a_1)), & \text{якщо } j_1>i_2 \text{ і } i_2-j_1+a_2<a_1.\end{cases}$$

Отож відображення $\mathfrak{h}_k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}\to\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є гомоморфізмом. □

Позаяк

$$\mathfrak{h}_k(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}})=\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\geqslant k}}=\Big\{(i,j,[a))\in\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}\colon [a)\in\mathscr{F} \ \text{ і } \ a\geqslant k\Big\}$$

— інверсна піднапівгрупа в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, яка є множиною нерухомих точок гомоморфізму $\mathfrak{h}_k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}\to\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, то справджується таке твердження.

Твердження 6. *Нехай $\mathscr{F}$ — довільна ω-замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у ω та $[k)\in\mathscr{F}$ для деякого числа $k\in\omega$. Тоді піднапівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\geqslant k}}$ є гомоморфним ретрактом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.*

Нехай $\mathscr{F} = \{[0), [1), \ldots, [k)\}$ — сім'я підмножин у ω, де $k \geqslant 1$. Для довільного натурального числа $n < k$ означимо

$$\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant n}} = \Big\{(i, j, [a)) \in \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} : [a) \in \mathscr{F} \ \text{ i } \ a \leqslant n\Big\}.$$

Очевидно, що $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant n}}$ — інверсна піднапівгрупа в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

З твердження 5 випливає, що для сім'ї $\mathscr{F} = \{[0), [1)\}$ піднапівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[0)\}}$ є гомоморфним ретрактом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. Однак з подальших тверджень випливає, що для довільного натурального числа $k \geqslant 2$ піднапівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant n}}$ не є гомоморфним ретрактом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ для довільного натурального числа $n < k$.

Теорема 2. *Нехай $\mathscr{F}$ — довільна ω-замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у ω та $\omega \in \mathscr{F}$. Тоді:*

(1) *якщо сім'я $\mathscr{F}$ — нескінченна, то для довільного натурального числа k напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ не є гомоморфним ретрактом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$;*

(2) *якщо сім'я $\mathscr{F}$ — скінченна та $\bigcap \mathscr{F} = [t)$ для деякого натурального числа $t \geqslant 2$, то для довільного натурального числа $k < t$ напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ не є гомоморфним ретрактом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.*

Доведення. Припустимо протилежне: хоча б в одному з випадків (1), чи (2) напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant n}}$ є гомоморфним ретрактом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Позаяк звуження напівгрупового гомоморфізму $h\colon S \to S$ на піднапівгрупу $T \subseteq S$ є знову гомоморфізмом, то, припустивши, що $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ є гомоморфним ретрактом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, який породжується деяким гомоморфізмом $\mathfrak{h}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, отримуємо, що піднапівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ є гомоморфним ретрактом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}}$, який породжується деякою гомоморфною ретракцією $\mathfrak{h}^k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$.

З визначення природного часткового порядку на в'язці $E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}})$ (див. твердження 2 і 3) випливає, що

$$(1, 1, [k)) \preccurlyeq (0, 0, [k+1)) \preccurlyeq (0, 0, [k)).$$

Позаяк гомоморфізм інверсних напівгруп зберігає природний частковий порядок на їх в'язках у бік образу (див. [16, твердження 1.4.21(6)]), то

$$(1, 1, [k)) \preccurlyeq \mathfrak{h}^k(0, 0, [k+1)) \preccurlyeq (0, 0, [k)). \tag{3}$$

З нерівностей (3) і визначення природного часткового порядку на $E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}})$ (див. твердження 2 і 3) випливає, що виконується лише один з випадків:

(1) $\mathfrak{h}^k(0, 0, [k+1)) = (0, 0, [k))$;
(2) $\mathfrak{h}^k(0, 0, [k+1)) = (1, 1, [k))$;
(3) $\mathfrak{h}^k(0, 0, [k+1)) = (1, 1, [k-1))$.

Припустимо, що виконується випадок (1): $\mathfrak{h}^k(0, 0, [k+1)) = (0, 0, [k))$. З твердження 4 випливає, що $\mathfrak{h}^k(i, j, [k+1)) \in \boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k)\}}$ для всіх $i, j \in \omega$, оскільки за твердженням 3 з [2] напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k+1)\}}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі. Також з тверджень 2 і 3 випливає, що $\mathfrak{h}^k(1, 1, [k+1)) \preccurlyeq (1, 1, [k))$.

За твердженням 1.4.21(2) з [16], $\mathfrak{h}^k(1,1,[k+1])$ — ідемпотент напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, як гомоморфний образ ідемпотента $(1,1,[k+1])$. Позаяк

$$(0,0,[k+1]) = (0,1,[k+1]) \cdot (1,0,[k+1]),$$

то за твердженням 1.4.21(1) [16] маємо, що

$$\begin{aligned}
(0,0,[k]) = \mathfrak{h}^k(0,0,[k+1]) = \\
&= \mathfrak{h}^k((0,1,[k+1]) \cdot (1,0,[k+1])) = \\
&= \mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) \cdot \mathfrak{h}^k(1,0,[k+1]) = \\
&= \mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) \cdot \mathfrak{h}^k((0,1,[k+1])^{-1}) = \\
&= \mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) \cdot (\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]))^{-1},
\end{aligned}$$

і, прийнявши $\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) = (m,n,[k])$ для деяких $m,n \in \omega$, за лемою 4 з [2] отримуємо, що

$$\begin{aligned}
(m,n,[k]) \cdot (m,n,[k])^{-1} &= (m,n,[k]) \cdot (n,m,[k]) = \\
&= (m,m,[k]) = \\
&= (0,0,[k]),
\end{aligned}$$

а отже, $\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) = (0,n,[k])$ для деякого натурального числа n. Аналогічно

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}^k(1,1,[k+1]) &= \mathfrak{h}^k((1,0,[k+1]) \cdot (0,1,[k+1])) = \\
&= \mathfrak{h}^k(1,0,[k+1])) \cdot \mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) = \\
&= \mathfrak{h}^k((0,1,[k+1])^{-1}) \cdot \mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) = \\
&= (\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]))^{-1} \cdot \mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]) = \\
&= (0,n,[k])^{-1} \cdot (0,n,[k]) = \\
&= (n,0,[k]) \cdot (0,n,[k]) = \\
&= (n,n,[k]).
\end{aligned}$$

Припустимо, що $n \geqslant 2$. Тоді з

$$\begin{aligned}
(3,3,[k]) \preccurlyeq (2,2,[k+1]) = \\
&= (2,0,[k+1]) \cdot (0,2,[k+1]) = \\
&= (1,0,[k+1])^2 \cdot (0,1,[k+1])^2
\end{aligned}$$

випливає, що

$$\begin{aligned}
(3,3,[k]) = \mathfrak{h}^k(3,3,[k]) \preccurlyeq \\
&\preccurlyeq \mathfrak{h}^k(2,2,[k+1]) = \\
&= \mathfrak{h}^k((1,0,[k+1])^2 \cdot (0,1,[k+1])^2) = \\
&= (\mathfrak{h}^k(1,0,[k+1]))^2 \cdot (\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]))^2 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (n,0,[k))^2\cdot(0,n,[k))^2 =\\
&= (2n,0,[k))\cdot(0,2n,[k)) =\\
&= (2n,2n,[k)),
\end{aligned}$$

а це суперечить визначенню природного часткового порядку на напівґратці $E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}})$ (див. твердження 2 і 3). Отож отримуємо, що $\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1)) = (0,1,[k))$ і за твердженням 1.4.21(1) з [16], $\mathfrak{h}^k(1,0,[k+1)) = (1,0,[k))$. Тоді з означення напівгрупової операції на $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ випливає, що

$$\mathfrak{h}^k(p,q,[k+1)) = (p,q,[k)),$$

для всіх $p,q\in\omega$.

Припустимо, що $i>j$. Тоді для $a=0,1,\ldots,k$ матимемо

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}^k((i,i,[a))\cdot(j,j,[k+1))) &= \mathfrak{h}^k(i,i,[a)\cap(j-i+[k+1))) =\\
&= \begin{cases} \mathfrak{h}^k(i,i,j-i+[k+1)), & \text{якщо } 0\leqslant a<j-i+k+1;\\ \mathfrak{h}^k(i,i,[a)), & \text{якщо } a\geqslant j-i+k+1 \end{cases} =\\
&= \begin{cases} (i,i,j-i+[k+1)), & \text{якщо } 0\leqslant a<j-i+k+1;\\ (i,i,[a)), & \text{якщо } a\geqslant j-i+k+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}^k(i,i,[a))\cdot\mathfrak{h}^k(j,j,[k+1)) &= (i,i,[a))\cdot(j,j,[k)) =\\
&= (i,i,[a)\cap(j-i+[k))) =\\
&= \begin{cases} (i,i,j-i+[k)), & \text{якщо } 0\leqslant a<j-i+k;\\ (i,i,[a)), & \text{якщо } a\geqslant j-i+k. \end{cases}
\end{aligned}$$

Отож, якщо $a=j-i+k$ (а такий випадок завжди можливий, зокрема коли $a=-1+k$, тобто $i=j+1$), то отримуємо, що

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}^k((i,i,[a))\cdot(j,j,[k+1))) &= (i,i,j-i+[k+1)) =\\
&= (i,i,a-k+[k+1)) =\\
&= (i,i,[a+1))
\end{aligned}$$

і

$$\mathfrak{h}^k(i,i,[a))\cdot\mathfrak{h}^k(j,j,[k+1)) = (i,i,[a)),$$

а це суперечить тому, що відображення $\mathfrak{h}^k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}}\to\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ є гомоморфізмом. З отриманого протиріччя випливає, що умова $\mathfrak{h}^k(0,0,[k+1)) = (0,0,[k))$ не виконується.

Припустимо, що виконується випадок (2)

$$\mathfrak{h}^k(0,0,[k+1)) = (1,1,[k)).$$

З твердження 4 випливає, що $\mathfrak{h}^k(i,j,[k+1))\in\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k)\}}$ для всіх $i,j\in\omega$, оскільки за твердженням 3 з [2] напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k+1)\}}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі. Також з тверджень 2 і 3 випливає, що $\mathfrak{h}^k(1,1,[k+1))\preccurlyeq(2,2,[k))$.

За твердженням 1.4.21(2) з [16] маємо, що $\mathfrak{h}^k(1,1,[k+1])$ — ідемпотент напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, а отже, $\mathfrak{h}^k(1,1,[k+1])=(i,i,[k])$ для деякого натурального числа $i\geqslant 2$. Позаяк

$$(0,0,[k+1])=(0,1,[k+1])\cdot(1,0,[k+1]),$$

то за твердженням 1.4.21(1) [16] отримуємо, що

$$\begin{aligned}
(1,1,[k])=\mathfrak{h}^k(0,0,[k+1])&=\\
&=\mathfrak{h}^k((0,1,[k+1])\cdot(1,0,[k+1]))=\\
&=\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1])\cdot\mathfrak{h}^k(1,0,[k+1])=\\
&=\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1])\cdot\mathfrak{h}^k((0,1,[k+1])^{-1})=\\
&=\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1])\cdot(\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]))^{-1},
\end{aligned}$$

і, прийнявши $\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1])=(m,n,[k])$, з леми 4 [2] випливає, що

$$\begin{aligned}
(m,n,[k])\cdot(m,n,[k])^{-1}&=(m,n,[k])\cdot(n,m,[k])=\\
&=(m,m,[k])=\\
&=(1,1,[k]),
\end{aligned}$$

звідки отримуємо, що

$$\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1])=(1,n,[k]),$$

для деякого натурального числа $n\geqslant 2$. Справді, $n\neq 1$, бо в цьому випадку за теоремою 1 гомоморфізм $\mathfrak{h}^k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}}\to\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ був би груповим. Також з нерівності $(1,1,[k+1])\preccurlyeq(0,0,[k+1])$ в $E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}})$ випливає, що не існує такого ідемпотента вигляду $(p,p,[k+1])$, де $p\geqslant 2$, що

$$\mathfrak{h}^k(p,p,[k+1])=(0,0,[k]))),$$

а отже, за твердженням 1.4.21(3) з [16] не існує елемента $(s,t,[k+1])$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}}$ такого, що

$$\mathfrak{h}^k(s,t,[k+1])=(0,0,[k]).$$

Аналогічно, з рівностей

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}^k(1,1,[k+1])&=\mathfrak{h}^k((1,0,[k+1])\cdot(0,1,[k+1]))=\\
&=\mathfrak{h}^k(1,0,[k+1]))\cdot\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1])=\\
&=\mathfrak{h}^k((0,1,[k+1])^{-1})\cdot\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1])=\\
&=(\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1]))^{-1}\cdot\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1])=\\
&=(1,n,[k])^{-1}\cdot(1,n,[k])=\\
&=(n,1,[k])\cdot(1,n,[k])=\\
&=(n,n,[k])
\end{aligned}$$

отримуємо, що $n\geqslant 2$.

Припустимо, що $n \geqslant 3$. Тоді з

$$\begin{aligned}(3,3,[k)) \preccurlyeq (2,2,[k+1)) &= \\ &= (2,0,[k+1)) \cdot (0,2,[k+1)) = \\ &= (1,0,[k+1))^2 \cdot (0,1,[k+1))^2\end{aligned}$$

випливає, що

$$\begin{aligned}(3,3,[k)) = \mathfrak{h}^k(3,3,[k)) &\preccurlyeq \\ &\preccurlyeq \mathfrak{h}^k(2,2,[k+1)) = \\ &= \mathfrak{h}^k((1,0,[k+1))^2 \cdot (0,1,[k+1))^2) = \\ &= (\mathfrak{h}^k(1,0,[k+1)))^2 \cdot (\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1)))^2 = \\ &= (n,1,[k))^2 \cdot (1,n,[k))^2 = \\ &= (2n-1,1,[k)) \cdot (1,2n-1,[k)) = \\ &= (2n-1,2n-1,[k)),\end{aligned}$$

однак це суперечить твердженням 2 і 3, оскільки $(3,3,[k)) \not\preccurlyeq (2n-1,2n-1,[k))$ у випадку $n \geqslant 3$. Отож $n = 2$, а отже, отримуємо, що $\mathfrak{h}^k(1,0,[k+1)) = (1,2,[k))$ і $\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1)) = (1,2,[k))$. Позаяк за твердженням 3 з [2] напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k+1)\}}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі, то з того, що звуження гомоморфізму $\mathfrak{h}^k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ на піднапівгрупу $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k+1)\}}$ є ін'єктивним відображенням, з означення напівгрупової операції в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ і з попередніх міркувань випливає, що

$$\mathfrak{h}^k(p,q,[k+1)) = (p+1,q+1,[k)),$$

для довільних $p,q \in \omega$.

Припустимо, що $i > j$. Тоді для $a = 0,1,\ldots,k$ маємо

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}^k((i,i,[a)) \cdot (j,j,[k+1))) &= \mathfrak{h}^k(i,i,[a) \cap (j-i+[k+1))) = \\ &= \begin{cases} \mathfrak{h}^k(i,i,j-i+[k+1)), & \text{якщо } 0 \leqslant a < j-i+k+1; \\ \mathfrak{h}^k(i,i,[a)), & \text{якщо } a \geqslant j-i+k+1 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (i+1,i+1,j-i+[k+1)), & \text{якщо } 0 \leqslant a < j-i+k+1; \\ (i+1,i+1,[a)), & \text{якщо } a \geqslant j-i+k+1 \end{cases}\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}^k(i,i,[a)) \cdot \mathfrak{h}^k(j,j,[k+1)) &= (i+1,i+1,[a)) \cdot (j+1,j+1,[k)) = \\ &= (i+1,i+1,[a) \cap (j-i+[k))) = \\ &= \begin{cases} (i+1,i+1,j-i+[k)), & \text{якщо } 0 \leqslant a < j-i+k; \\ (i+1,i+1,[a)), & \text{якщо } a \geqslant j-i+k. \end{cases}\end{aligned}$$

Отож, якщо $a = j-i+k$ (а такий випадок завжди можливий, зокрема, коли $a = -1+k$, тобто $i = j+1$), то отримуємо, що

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}^k((i,i,[a)) \cdot (j,j,[k+1))) &= (i+1,i+1,j-i+[k+1)) = \\ &= (i+1,i+1,a-k+[k+1)) = \\ &= (i+1,i+1,[a+1))\end{aligned}$$

і

$$\mathfrak{h}^k(i,i,[a])\cdot\mathfrak{h}^k(j,j,[k+1])=(i+1,i+1,[a]),$$

а це суперечить тому, що відображення $\mathfrak{h}^k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}}\to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ є гомоморфізмом. З отриманого протиріччя випливає, що умова $\mathfrak{h}^k(0,0,[k+1])=(1,1,[k])$ не може виконуватися.

Припустимо, що виконується випадок (3):

$$\mathfrak{h}^k(0,0,[k+1])=(1,1,[k-1]).$$

З твердження 4 випливає, що $\mathfrak{h}^k(i,j,[k+1])\in \boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k-1)\}}$ для всіх $i,j\in\omega$, оскільки за твердженням 3 з [2] напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k+1)\}}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі. Також з тверджень 2 і 3 випливає, що виконується нерівність $\mathfrak{h}^k(1,1,[k+1))\preccurlyeq(2,2,[k-1))$.

За твердженням 1.4.21(2) з [16] маємо, що $\mathfrak{h}^k(1,1,[k+1))$ — ідемпотент напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, а отже, $\mathfrak{h}^k(1,1,[k+1))=(i,i,[k-1))$ для деякого натурального числа $i\geqslant 2$. Позаяк

$$(0,0,[k+1))=(0,1,[k+1))\cdot(1,0,[k+1)),$$

то за твердженням 1.4.21(1) [16] отримаємо, що

$$\begin{aligned}(1,1,[k-1))=\mathfrak{h}^k(0,0,[k+1))&=\\ &=\mathfrak{h}^k((0,1,[k+1))\cdot(1,0,[k+1)))=\\ &=\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1))\cdot\mathfrak{h}^k(1,0,[k+1))=\\ &=\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1))\cdot\mathfrak{h}^k((0,1,[k+1))^{-1})=\\ &=\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1))\cdot(\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1)))^{-1},\end{aligned}$$

і, прийнявши

$$\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1))=(m,n,[k-1)),$$

з леми 4 [2] випливає, що

$$\begin{aligned}(m,n,[k-1))\cdot(m,n,[k-1))^{-1}&=(m,n,[k-1))\cdot(n,m,[k-1))=\\ &=(m,m,[k))=\\ &=(1,1,[k-1)),\end{aligned}$$

а отже,

$$\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1))=(1,n,[k-1)),$$

для деякого натурального числа $n\geqslant 2$. Справді, $n\neq 1$, оскільки в цьому випадку за теоремою 1 гомоморфізм $\mathfrak{h}^k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}}\to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ був би груповим. Також з нерівності $(1,1,[k+1))\preccurlyeq(0,0,[k+1))$ в $E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}})$ випливає, що не існує такого ідемпотента вигляду $(p,p,[k+1))$, де $p\geqslant 2$, що

$$\mathfrak{h}^k(p,p,[k+1))=(0,0,[k-1))),$$

а отже, за твердженням 1.4.21(3) з [16] не існує елемента $(s,t,[k+1))$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}}$ такого, що

$$\mathfrak{h}^k(s,t,[k+1))=(0,0,[k-1)).$$

Аналогічно, з рівностей

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}^k(1,1,[k+1)) &= \mathfrak{h}^k((1,0,[k+1))\cdot(0,1,[k+1))) =\\ &= \mathfrak{h}^k(1,0,[k+1)))\cdot\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1)) =\\ &= \mathfrak{h}^k((0,1,[k+1))^{-1})\cdot\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1)) =\\ &= (\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1)))^{-1}\cdot\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1)) =\\ &= (1,n,[k-1))^{-1}\cdot(1,n,[k-1)) =\\ &= (n,1,[k-1))\cdot(1,n,[k-1)) =\\ &= (n,n,[k-1))\end{aligned}$$

отримуємо, що $n\geqslant 2$.

Припустимо, що $n\geqslant 3$. Тоді з

$$\begin{aligned}(6,6,[k-1)) \preccurlyeq (4,4,[k+1)) &=\\ &= (4,0,[k+1))\cdot(0,4,[k+1)) =\\ &= (1,0,[k+1))^4\cdot(0,1,[k+1))^4\end{aligned}$$

випливає, що

$$\begin{aligned}(6,6,[k-1)) &= \mathfrak{h}^k(6,6,[k-1)) \preccurlyeq\\ &\preccurlyeq \mathfrak{h}^k(4,4,[k+1)) =\\ &= \mathfrak{h}^k((1,0,[k+1))^4\cdot(0,1,[k+1))^4) =\\ &= (\mathfrak{h}^k(1,0,[k+1)))^4\cdot(\mathfrak{h}^k(0,1,[k+1)))^4 =\\ &= (n,1,[k-1))^4\cdot(1,n,[k-1))^4 =\\ &= (4n-3,1,[k-1))\cdot(1,4n-3,[k-1)) =\\ &= (4n-3,4n-3,[k-1)),\end{aligned}$$

однак це суперечить твердженням 2 і 3, оскільки

$$(6,6,[k-1)) \not\preccurlyeq (4n-3,4n-3,[k-1))$$

у випадку $n\geqslant 3$. Отож $i=2$, а отже, отримуємо, що

$$\mathfrak{h}^k(1,0,[k+1)) = (1,2,[k-1)) \qquad \text{і} \qquad \mathfrak{h}^k(0,1,[k+1)) = (2,1,[k-1)).$$

Позаяк за твердженням 3 з [2] напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k+1)\}}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі, то з того, що звуження гомоморфізму $\mathfrak{h}^k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ на піднапівгрупу $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[k+1)\}}$ є ін'єктивним відображенням, з означення напівгрупової операції в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ і з попередніх міркувань випливає, що

$$\mathfrak{h}^k(p,q,[k+1)) = (p+1,q+1,[k-1)),$$

для довільних $p,q\in\omega$.

Припустимо, що $i > j$. Тоді для $a = 0, 1, \ldots, k$ маємо

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}^k((i,i,[a))\cdot(j,j,[k+1))) &= \mathfrak{h}^k(i,i,[a)\cap(j-i+[k+1))) = \\
&= \begin{cases} \mathfrak{h}^k(i,i,j-i+[k+1)), & \text{якщо } 0 \leqslant a < j-i+k+1; \\ \mathfrak{h}^k(i,i,[a)), & \text{якщо } a \geqslant j-i+k+1 \end{cases} = \\
&= \begin{cases} (i+1,i+1,j-i+[k+1)), & \text{якщо } 0 \leqslant a < j-i+k+1; \\ (i+1,i+1,[a)), & \text{якщо } a \geqslant j-i+k+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}^k(i,i,[a))\cdot\mathfrak{h}^k(j,j,[k+1)) &= (i+1,i+1,[a))\cdot(j+1,j+1,[k-1)) = \\
&= (i+1,i+1,[a)\cap(j-i+[k-1))) = \\
&= \begin{cases} (i+1,i+1,j-i+[k-1)), & \text{якщо } 0 \leqslant a < j-i+k-1; \\ (i+1,i+1,[a)), & \text{якщо } a \geqslant j-i+k-1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Отож, якщо $a = j-i+k$ (а такий випадок завжди можливий, зокрема, коли $a = -1+k$, тобто $i = j+1$), то отримуємо, що

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}^k((i,i,[a))\cdot(j,j,[k+1))) &= (i+1,i+1,j-i+[k+1)) = \\
&= (i+1,i+1,a-k+[k+1)) = \\
&= (i+1,i+1,[a+1))
\end{aligned}$$

і

$$\mathfrak{h}^k(i,i,[a))\cdot\mathfrak{h}^k(j,j,[k+1)) = (i+1,i+1,[a)),$$

а це суперечить тому, що відображення $\mathfrak{h}^k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$ є гомоморфізмом. З отриманого протиріччя випливає, що умова $\mathfrak{h}^k(0,0,[k+1)) = (1,1,[k-1))$ не може виконуватися.

Таким чином, жоден з випадків (1), (2), чи (3) не виконується, а отже не існує гомоморфної ретракції $\mathfrak{h}^k\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k+1}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\leqslant k}}$, звідки і випливають твердження теореми. $\square$

З тверджень 5, 6 і теореми 2 випливає теорема 3, яка описує всі нетривіальні гомоморфні ретракти напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Теорема 3. *Нехай $\mathscr{F}$ — довільна ω-замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у ω. Якщо сім'я $\mathscr{F}$ — нескінченна, то для довільного натурального числа i та для довільного $j \in \omega$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\geqslant i}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[j)\}}$ і лише вони є нетривіальними гомоморфними ретрактами напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. Якщо ж сім'я $\mathscr{F}$ — скінченна та $\bigcap\mathscr{F} = [k)$ для деякого натурального числа $k \geqslant 2$, то для довільного натурального числа $i \leqslant k$ та для довільного $j = 0, 1, \ldots, k$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{\geqslant i}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[j)\}}$ і лише вони є нетривіальними гомоморфними ретрактами напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, а у випадку $\bigcap\mathscr{F} = [1)$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[0)\}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[1)\}}$ і лише вони є нетривіальними гомоморфними ретрактами напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.*

Зауваження 4. За твердженням 1 для довільної ω-замкненої сім'ї $\mathscr{F}$ індуктивних непорожніх підмножин у ω напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_0}$, де $\mathscr{F}_0$ — ω-замкнена сім'я індуктивних непорожніх підмножин у ω та $\omega \in \mathscr{F}_0$. Отож теорема 3 описує всі нетривіальні гомоморфні ретракти напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ за модулем ізоморфізму напівгруп $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_0}$, який описаний у доведенні твердження 1.

Завершимо цю працю твердженнями, які описують ізоморфізм між напівгрупами $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$ у випадку, коли $\mathscr{F}_1$ і $\mathscr{F}_2$ — ω-замкнені сім'ї індуктивних непорожніх підмножин у ω.

Теорема 4. *Нехай $\mathscr{F}_1$ і $\mathscr{F}_2$ — ω-замкнені сім'ї індуктивних непорожніх підмножин у ω. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$ ізоморфні;*
(2) *сім'ї $\mathscr{F}_1$ і $\mathscr{F}_2$ рівнопотужні;*
(3) *існує ціле число n таке, що $\mathscr{F}_1 = \{n+F \colon F \in \mathscr{F}_2\}$.*

Доведення. Імплікація (3)⇒(2) очевидна, а імплікація (3)⇒(1) випливає з твердження 1.

(2)⇒(3). Припустимо, що сім'ї $\mathscr{F}_1$ і $\mathscr{F}_2$ рівнопотужні. Приймемо $n_1 = \min\bigcup\mathscr{F}_1$ і $n_2 = \min\bigcup\mathscr{F}_2$. Тоді $[n_1) \in \mathscr{F}_1$ і $[n_2) \in \mathscr{F}_2$. Якщо сім'ї $\mathscr{F}_1$ і $\mathscr{F}_2$ — скінченні, то існують максимальні цілі числа n_1^0 і n_2^0 такі, що $[n_1^0) \in \mathscr{F}_1$ і $[n_2^0) \in \mathscr{F}_2$, але $[n_1^0{+}1) \notin \mathscr{F}_1$ і $[n_2^0+1) \notin \mathscr{F}_2$. З леми 1 випливає, що $[i) \in \mathscr{F}_1$ і $[j) \in \mathscr{F}_2$ для довільних цілих чисел $i = n_1, \ldots, n_1^0$ і $j = n_2, \ldots, n_2^0$. Тоді з рівнопотужності сімей $\mathscr{F}_1$ і $\mathscr{F}_2$ отримуємо, що

$$|\mathscr{F}_1| = n_1^0 - n_1 + 1 = n_2^0 - n_2 + 1 = |\mathscr{F}_2|,$$

і прийнявши $n = n_1 - n_2 = n_1^0 - n_2^0$, отримуємо, що $\mathscr{F}_1 = \{n+F \colon F \in \mathscr{F}_2\}$.

Якщо сім'ї $\mathscr{F}_1$ і $\mathscr{F}_2$ — нескінченні, то з леми 1 випливає, що $[i) \in \mathscr{F}_1$ і $[j) \in \mathscr{F}_2$ для довільних цілих чисел $i \geqslant n_1$ і $j \geqslant n_2$, а отже, $\mathscr{F}_1 = \{n+F \colon F \in \mathscr{F}_2\}$ для $n = n_1 - n_2$.

(1)⇒(2). Припустимо, що відображення $\mathfrak{h}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$ є ізоморфізмом. Приймемо $n_1 = \min\bigcup\mathscr{F}_1$ і $n_2 = \min\bigcup\mathscr{F}_2$. За теоремою 4 з [2] елементи $(0,0,[n_1))$ і $(0,0,[n_2))$ є одиницями напівгруп $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$, відповідно. З твердження 4 випливає, що гомоморфний образ $\mathfrak{h}(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}})$ міститься в піднапівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_2)\}}$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$. Аналогічно, гомоморфний образ $\mathfrak{h}^{-1}(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_2)\}})$ стосовно оберненого відображення $\mathfrak{h}^{-1}$ до ізоморфізму $\mathfrak{h}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$, міститься в піднапівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}}$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$. Оскільки композиції $\mathfrak{h}^{-1}\circ\mathfrak{h}$ і $\mathfrak{h}\circ\mathfrak{h}^{-1}$ є тотожними відображеннями напівгруп $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$, відповідно, то їхні звуження $\big(\mathfrak{h}^{-1}\circ\mathfrak{h}\big)|_{\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}}}$ і $\big(\mathfrak{h}\circ\mathfrak{h}^{-1}\big)|_{\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_2)\}}}$ тотожні відображення напівгруп $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_2)\}}$, відповідно, а отже, звуження $\mathfrak{h}|_{\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}}}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_2)\}}$ і $\mathfrak{h}^{-1}|_{\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_2)\}}}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}}$ ізоморфізму $\mathfrak{h}$ і до нього оберненого $\mathfrak{h}^{-1}$ на напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_2)\}}$, відповідно, є ізоморфізмами цих напівгруп.

Очевидно, що при ізоморфізмі $h\colon S \to T$ напівгруп S і T твірні елементи напівгрупи S відображаються у твірні елементи напівгрупи T. Тоді з того, що $(0,1)$ і $(1,0)$ — твірні елементи біциклічного моноїда $\boldsymbol{B}_{\omega}$ і $(0,1)\cdot(1,0) = (0,0)$ — одиниця в $\boldsymbol{B}_{\omega}$ та $(1,0)\cdot(0,1) = (1,1)$ — ідемпотент біциклічного моноїда, який відмінний від одиниці, випливає, що тотожне відображення біциклічного моноїда та лише воно є ізоморфізмом з $\boldsymbol{B}_{\omega}$ на $\boldsymbol{B}_{\omega}$. З аналогічних міркувань і теореми 4 [2] випливає, що для довільного числа $n \in \omega$ єдиний ізоморфізм $\mathfrak{f}\colon \boldsymbol{B}_{\omega} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n)\}}$ визначається за формулою

$$\mathfrak{f}(i,j) = (i,j,[n)), \qquad i,j \in \omega,$$

а отже, звуження $\mathfrak{h}|_{\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}}} \colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_2)\}}$ ізоморфізму $\mathfrak{h}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$ визначається за формулою

$$\mathfrak{h}|_{\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1)\}}}(i,j,[n_1)) = (i,j,[n_2)), \qquad i,j \in \omega.$$

Позаяк відображення $\mathfrak{h}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$ є ізоморфізмом, то з вище сказаного випливає, що його звуження $\mathfrak{h}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{1\geqslant n_1+1}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_{2\geqslant n_2+1}}$ є ізоморфізмом. Далі аналогічно, як викладено вище, індукцією доводимо, що для довільного натурального числа k такого, що $[n_1+k) \in \mathscr{F}_1$ звуження $\mathfrak{h}|_{\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1+k)\}}} \colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1+k)\}} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_2+k)\}}$ ізоморфізму $\mathfrak{h}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$ визначається за формулою

$$\mathfrak{h}|_{\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1+k)\}}}(i,j,[n_1+k)) = (i,j,[n_2+k)), \qquad i,j \in \omega.$$

Звідси випливає, що сім'ї $\mathscr{F}_1$ і $\mathscr{F}_2$ рівнопотужні. □

З доведення імплікації (1)⇒(2) теореми 4 випливає наслідок 1, який описує структуру ізоморфізмів з напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ у напівгрупу $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$.

Наслідок 1. *Нехай $\mathscr{F}_1$ і $\mathscr{F}_2$ — ω-замкнені сім'ї індуктивних непорожніх підмножин у ω, $n_1 = \min\bigcup\mathscr{F}_1$ і $n_2 = \min\bigcup\mathscr{F}_2$. Якщо напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$ ізоморфні, то ізоморфізм $\mathfrak{h}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_2}$ визначається за формулою*

$$\mathfrak{h}|_{\boldsymbol{B}_{\omega}^{\{[n_1+k)\}}}(i,j,[n_1+k)) = (i,j,[n_2+k)), \qquad i,j \in \omega,$$

для кожного цілого числа k такого, що $[n_1+k) \in \mathscr{F}_1$.

Нагадаємо [8], що *автоморфізмом* напівгрупи S називається довільний ізоморфізм з S на S.

Оскільки автоморфізми тривіальної напівгрупи тривіальні, тобто є тотожними відображеннями, то з наслідку 1 випливає наслідок 2.

Наслідок 2. *Для довільної ω-замкненої сім'ї $\mathscr{F}$ індуктивних підмножин у ω кожен автоморфізм напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є тривіальним відображенням, а отже, група авторморфізмів напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тривіальна.*

Подяка

Автори висловлюють щиру подяку рецензентові за цінні поради та зауваження.

Список використаної літератури

1. В. В. Вагнер, *Обощенные группы*, ДАН СССР **84** (1952), 1119–1122.
2. О. Гутік, М. Михаленич, *Про одне узагальнення біциклічного моноїда*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **90** (2020), 5–19. DOI: 10.30970/vmm.2020.90.005-019
3. О. В. Гутік, І. В. Позднякова, *Про напівгрупу, породжену розширеною біциклічною напівгрупою та ω-замкненою сім'єю*, Мат. методи фіз.-мех. поля **64** (2021), no. 1, 21–34.

4. О. Гутік, А. Савчук, *Напівгрупа часткових коскінченних ізометрій натуральних чисел*, Буковинський мат. журнал **6** (2018), no. 1–2, 42–51. DOI:10.31861/bmj2018.01.042
5. O. Andersen, *Ein Bericht uber die Struktur abstrakter Halbgruppen*, PhD Thesis. Hamburg, 1952.
6. D. R. Brown, *Topological semilattices on the two-cell*, Pacific J. Math. 15 (1965), no. 1, 35–46. DOI: 10.2140/pjm.1965.15.35
7. R. H. Bruck, *A survey of binary systems*, (Erg. Math. Grenzgebiete. Neue Folge. Heft 20) Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958. DOI: 10.1007/978-3-662-43119-1
8. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Vol. I, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1961.
9. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Vol. II, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1967.
10. V. A. Fortunatov, *Congruences on simple extensions of semigroups*, Semigroup Forum **13** (1976), 283–295. DOI: 10.1007/BF02194949
11. G. L. Fotedar, *On a semigroup associated with an ordered group*, Math. Nachr. **60** (1974), no. 1–6, 297–302. DOI: 10.1002/mana.19740600128
12. G. L. Fotedar, *On a class of bisimple inverse semigroups*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **4** (1978), 49–53.
13. O. Gutik, *On locally compact semitopological* 0*-bisimple inverse ω-semigroups,* Topol. Algebra Appl. **6** (2018), 77–101. DOI: 10.1515/taa-2018-0008
14. O. Gutik and O. Lysetska, *On the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ which is generated by the family $\mathscr{F}$ of atomic subsets of ω*, arXiv:2108.11354, 2021, preprint.
15. O. Gutik, D. Pagon, and K. Pavlyk, *Congruences on bicyclic extensions of a linearly ordered group*, Acta Comment. Univ. Tartu. Math. **15** (2011), no. 2, 61–80. DOI: 10.12697/ACUTM.2011.15.10
16. M. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, World Scientific, Singapore, 1998.
17. O. Lysetska, *On feebly compact topologies on the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}_1}$*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **90** (2020), 48–56. DOI: 10.30970/vmm.2020.90.048-056
18. M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
19. N. R. Reilly, *Bisimple ω-semigroups,* Proc. Glasgow Math. Assoc. **7** (1966), no. 3, 160–167. DOI: 10.1017/S2040618500035346
20. R. J. Warne, A class of bisimple inverse semigroups, Pacif. J. Math. **18** (1966), no. 3, 563–577. DOI: 10.2140/pjm.1966.18.563
21. R. J. Warne, *Bisimple inverse semigroups mod groups*, Duke Math. J. **34** (1967), no. 4, 787–812. DOI: 10.1215/S0012-7094-67-03481-3

Стаття: надійшла до редколегії 07.12.2020
доопрацьована 31.12.2020
прийнята до друку 18.05.2021

ON GROUP CONGRUENCES ON THE SEMIGROUP $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ AND ITS HOMOMORPHIC RETRACTS IN THE CASE WHEN THE FAMILY $\mathscr{F}$ CONSISTS OF INDUCTIVE NON-EMPTY SUBSETS OF ω

Oleg GUTIK, Mykola MYKHALENYCH

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,
myhalenychmc@gmail.com

We study group congruences on the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ and its homomorphic retracts in the case when an ω-closed family $\mathscr{F}$ consists of inductive non-empty subsets of ω. It is proven that a congruence $\mathfrak{C}$ on $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ is a group congruence if and only if its restriction on a subsemigroup of $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, which is isomorphic to the bicyclic semigroup, is not the identity relation. Also, all non-trivial homomorphic retracts and isomorphisms of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ are described.

Key words: inverse semigroup, bicyclic monoid, inductive set, group congruence, homomorphic retract, isomorphism, automorphism.