ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 90. С. 57–68
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 90. P. 57–68
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.90.057-068

УДК 512.546

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЗА МАРКОВИМ ПАР НЕВІДОКРЕМЛЮВАНИХ ПРОСТОРІВ

Назар ПИРЧ

Українська академія друкарства,
вул. Підголоско, 19, 79020, м. Львів
e-mail: pnazar@ukr.net

Запропоновано метод зведення ізоморфної класифікації вільних топологічних груп над цілком регулярними просторами та підгруп, породжених їхніми підпросторами, до аналогічної класифікації над тихоновськими просторами.

Ключові слова: вільна топологічна група, М-еквівалентність, узагальнений ретракт, відносна топологічна властивість.

1. Вступ

Стаття є продовженням [5], усі позначення та означення взято з цієї роботи. Концепцію вільних топологічних груп над просторами з різними аксіомами відокремленості взято з [8] і [11]. Зокрема, будемо розглядати також негаусдорфові топологічні групи. *Цілком регулярним* будемо називати простір, у якому кожна замкнена множина F і кожна точка $a \notin F$ відокремлюються неперервними дійснозначними функціями. Цілком регулярний T_0-простір будемо називати *тихоновським.*

Означення 1. Нехай X — топологічний простір. Вільною топологічною групою (в сенсі Маркова) простору X називається пара, що складається з топологічної групи $F(X)$ та неперервного відображення $\eta_X\colon X \to F(X)$ такого, що для довільного неперервного відображення $f\colon X \to G$ з топологічного простору X у топологічну групу G існує неперервний гомоморфізм $f^*\colon F(X) \to G$ такий, що $f = f^* \circ \eta_X$.

Відображення η_X є вкладенням тоді і тільки тоді, коли простір X цілком регулярний [8]. Відображення η_X є замкненим вкладенням тоді і тільки тоді, коли простір X є тихоновським [8].

2020 Mathematics Subject Classification: 22A05

Як і у випадку M-класифікації топологічних просторів, M-класифікація пар (X, A) топологічних просторів та їхніх підпросторів зводиться до проблеми ізоморфної класифікації пар цілком регулярних просторів $(\eta_X(X), \eta_X(A))$. Ми пропонуємо методи, які у певних випадках дають змогу звести цю проблему до аналогічної задачі тихоновських просторів, що допоможе застосувати методи та результати з праць [2] та [3]. Основними результатами є теореми 3, 4 і 6. У монографії [7] міститься найдетальніше викладення теорії вільних топологічних груп.

Означення 2. Нехай X — топологічний простір з відміченою точкою p. *Вільною топологічною групою* (*в сенсі Граєва*) простору X називається пара, що складається з топологічної групи $FG(X,p)$ та неперервного відображення $\mu_X : X \to FG(X,p)$ такого, що $\mu_X(p) = e$, де e_G — одиниця групи $FG(X,p)$, і для довільного неперервного відображення $f\colon X \to G$ з топологічного простору X у топологічну групу G такого, що $\mu_X(p) = e_G$, де e_G — одиниця групи G, існує неперервний гомоморфізм $f^*\colon FG(X,p) \to G$ такий, що $f = f^* \circ \mu_X$.

Міняючи в цих означеннях словосполучення "топологічна група" на словосполучення "абелева топологічна група" отримаємо означення вільної абелевої топологічної групи. Оскільки вільна топологічна група $FG(X,p)$ з точністю до топологічного ізоморфізму не залежить від точки $p \in X$ [8], іноді вживатимемо скорочене позначення $FG(X)$. Для топологічного простору X через X^+ позначимо простір, отриманий з простору X додаванням однієї ізольованої точки. Для топологічних груп G_1 та G_2 будемо вживати позначення $G_1 \simeq G_2$ для означення факту ізоморфності цих груп. Для топологічного простору X та його підпростору Y позначатимемо через $G(Y)$ підгрупу вільної групи простору X, породжену множиною твірних $\eta_X(Y)$ або, відповідно, $\mu_X(Y)$. Для топологічної групи G через e_G позначатимемо одиницю групи G. Для топологічних просторів (X, x_0) та (Y, y_0) з відміченими точками позначатимемо через $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ букет цих просторів. Оскільки цей букет з точністю до M-еквівалентності не залежить від відмічених точок, то іноді вживатимемо скорочене позначення $X \vee Y$ [5]. Для топологічного простору X через T_0X буде позначати T_0-рефлексію простору X [5].

2. Узагальнені ретракти та вільні групи в сенсі Граєва

Підпростір Y топологічного простору X називається *G-ретрактом* (*G_A-ретрактом*) простору X, якщо довільне неперервне відображення з простору Y у топологічну групу (абелеву топологічну групу) H допускає неперервне продовження на X.

Теорема 1. *Нехай Y — підпростір топологічного простору X, $a \in Y$. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *Y є G-ретрактом простору X;*
(2) *для довільного неперервного відображення $f\colon Y \to H$ з простору Y у довільну топологічну групу H такого, що $f(a) = e_H$, де e_H — одиниця групи H, існує неперервне відображення $h\colon X \to H$ таке, що $h|_Y = f$.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2) Очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (1) Нехай $s\colon Y \to H$ — довільне неперервне відображення з топологічного простору Y у топологічну групу H, $s(a) = b$. Розглянемо відображення $s_1\colon Y \to H$ означене як $s_1(x) = s(x) \cdot b^{-1}$. Оскільки відображення s_1 є неперервним, то існує неперервне відображення $S_1\colon X \to H$ таке, що $S_1|_Y = s_1$. Тоді відображення $S(x) = S_1(x) \cdot b$ є неперервним і $S|_Y = s$. □

Наслідок 1. *Наступні умови еквівалентні для топологічного простору X та його непорожнього цілком регулярного підпростору Y:*

(1) *підпростір Y є G-ретрактом простору X;*
(2) *для довільного $p \in Y$ існує неперервне відображення $h\colon X \to FG(Y,p)$ таке, що $h(y) = \mu_Y(y)$ для всіх $y \in Y$;*
(3) *для деякого $p \in Y$ існує неперервне відображення $h\colon X \to FG(Y,p)$ таке, що $h(y) = \mu_Y(y)$ для всіх $y \in Y$.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2) Нехай $f\colon Y \to FG(Y,p)$ — вкладення цілком регулярного простору Y у вільну групу $FG(Y,p)$. За означенням G-ретракту існує неперервне відображення $h\colon X \to FG(Y,p)$ таке, що $h(y) = \mu_Y(y)$ для всіх $y \in Y$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (1) Нехай $f\colon Y \to H$ — неперервне відображення, таке, що $f(p) = e_H$, $f^*\colon FG(Y,p) \to H$ — гомоморфне продовження відображення f. Розглянемо відображення $f_1 = f \circ h\colon X \to H$. Якщо $y \in Y$, то $f_1(y) = f \circ h(y) = f(y) = \mu_Y(y)$. □

Наслідок 2. *Наступні умови еквівалентні для цілком регулярного простору X та його непорожнього підпростору Y:*

(1) *підпростір Y є G-ретрактом простору X;*
(2) *для довільного $p \in Y$ існує неперервний гомоморфізм $g\colon FG(X,p) \to FG(Y,p)$ такий, що $g(y) = \mu_Y(y)$ для всіх $y \in Y$;*
(3) *для деякого $p \in Y$ існує неперервний гомоморфізм $g\colon FG(X,p) \to FG(Y,p)$ такий, що $g(y) = \mu_Y(y)$ для всіх $y \in Y$.*

Доведення. Встановимо еквівалентність пункту (2) з уього наслідку та пункту (2) з наслідку 1. Справді, гомоморфізм g можна отримати як продовження відображення h відповідно до означення вільної топологічної групи у сенсі Граєва. З іншого боку, відображення h отримуємо як звуження $g|_X$. Аналогічно встановлюється еквівалентність пункту (3) з цього наслідку та пункту (3) з наслідку 1. □

Наслідок 3. *Для довільного цілком регулярного простору X, для довільного $p \in X$ підпростір X є G -ретрактом в $FG(X,p)$.*

Доведення. Оскільки кожне неперервне відображення з топологічного простору X у топологічну групу H таке, що $f(p) = e_H$ неперервно продовжується на $FG(X,p)$, то відповідно до теореми 1 підпростір X є G -ретрактом в $FG(X,p)$. □

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *ретральним*, якщо X є ретрактом деякої топологічної групи.

Твердження 1. *Наступні умови еквівалентні для непорожнього топологічного простору X:*

(1) *простір X є ретральним;*

(2) *простір X є ретрактом простору $FG(X,p)$ для довільного $p \in X$;*
(3) *простір X є ретрактом простору $FG(X,p)$ для деякого $p \in X$.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2) З наслідку 3 випливає, що підпростір X є G-ретрактом простору $FG(X,p)$. Доведемо, що з умови ретральності простору X і того факту, що X є G-ретрактом цілком регулярного простору Y випливає той факт, що X є ретрактом в Y.

Як було доведено у [9], з ретральності простору X випливає те, що X є ретрактом простору $F(X)$. Нехай $r\colon F(X) \to X$ — відповідна ретракція. Тоді існує гомоморфізм $h\colon F(Y) \to F(X)$ такий, що $h(x) = x$ для всіх $x \in X$. Композиція $r \circ h$ буде ретракцією з $F(Y)$ на X, а її звуження на Y буде ретракцією з Y на X.

(2) $\Rightarrow$ (3) Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (1) За означенням. □

Твердження 2. *Нехай підпростір Y є G-ретрактом цілком регулярного простору X, $p \in Y$. Тоді підгрупа в $FG(X,p)$, породжена множиною $\mu_X(Y)$, є топологічно ізоморфною $FG(Y,p)$.*

Доведення. Нехай $f\colon Y \to H$ неперервне відображення з топологічного простору Y у топологічну групу H таке, що $f(p) = e_H$. Тоді існує неперервне відображення $h\colon X \to H$ таке, що $h|_Y = f$. Нехай $h^*\colon FG(X,p) \to H$ продовження відображення h до неперервного гомоморфізму. ПРиймемо $f^* = h^*|_{G(\mu_X(Y))}$. Для підгрупи $G(\mu_X(Y))$ виконуються всі умови вільної топологічної групи $FG(Y,p)$. За єдиністю вільної топологічної групи отримаємо, що $G(\mu_X(Y))$ є вільною топологічною групою в сенсі Граєва над простором Y. □

Теорема 2. *Нехай Y — підпростір цілком регулярного простору X, $a \in Y$. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *Y є G-ретрактом простору X;*
(2) *для довільного неперервного відображення $f\colon Y \to H$, з топологічного простору Y у топологічну групу H існує неперервне відображення $h\colon X \to H$ таке, що $f \cdot h|_Y = const$.*

Доведення. Якщо $f\colon Y \to H$ неперервне відображення, з топологічного простору Y у топологічну групу H, тоді відображення $f^{-1}\colon Y \to H$ означене як $f^{-1}(y) = f(y)^{-1}$ є неперервним. Тоді існує неперервне відображення $h\colon X \to H$ таке, що $h|_Y = f^{-1}$. Отже, $f \cdot h|_Y = f \cdot f^{-1}|_Y = e_H = const$. □

3. T_0-РЕФЛЕКСІЯ ТА M-ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ПАР

Під *парою топологічних просторів* (X,Y) розумітимемо топологічний простір X і його підпростір Y. Пару топологічних просторів (X,X_1) назвемо M-*еквівалентною* парі топологічних просторів (Y,Y_1), якщо існує топологічний ізоморфізм $j\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $f(G(\eta_X(X_1))) = G(\eta_Y(Y_1))$. Для цілком регулярного простору X відображення η_X є вкладенням, тому для підпростору $Y \subseteq X$ будемо інколи писати Y замість $\eta_X(Y)$.

Твердження 3. *Нехай X, Y, X_1, Y_1 — цілком регулярні простори, $(X,A) \overset{M}{\sim} (Y,B)$ і нехай $i\colon F(X) \to F(Y)$ — топологічний ізоморфізм такий, що $i(G(A)) = G(B)$.*

Припустимо, що існують неперервні відображення $f\colon X \to X_1$, $g\colon Y \to Y_1$ і топологічний ізоморфізм $j\colon F(X_1) \to F(Y_1)$ такий, що $j \circ f^* = f^* \circ i$, де $f^*\colon F(X) \to F(X_1)$ і $g^*\colon F(Y) \to F(Y_1)$ — гомоморфізми, що продовжують відображення f і g. Тоді $(X_1, A_1) \overset{M}{\sim} (Y_1, B_1)$, де $A_1 = f(A)$ і $B_1 = g(B)$.

Доведення. Щоб довести лему, достатньо довестити, що $j(A_1) \subseteq G(B_1)$. Нехай $x \in A_1$, $v \in f^{-1}(x)$. Тоді $j(x) = g^* \circ i(v)$. Оскільки $v \in A$, то $i(v) \in G(B)$, а отже, $j(x) = g^* \circ i(v) \in G(B_1)$. Аналогічно доводиться, що $j^{-1}(B_1) \in G(A_1)$. □

Теорема 3. *Нехай підпростір A є G-ретрактом цілком регулярного простору X, підпростір B є G-ретрактом цілком регулярного простору Y, причому $FG(X/A) \simeq FG(Y/B)$. Тоді довільний топологічний ізоморфізм $i\colon F(A) \to F(B)$ може бути продовжений до топологічного ізоморфізму $j\colon F(X) \to F(Y)$.*

Доведення. В цій теоремі і надалі на множині X/A будемо розглядати R-факторну топологію [10]. Для топологічних груп G та H позначимо через $G * H$ вільний топологічний добуток груп G та H. Доведемо, що існує топологічний ізоморфізм $i_X\colon F(X) \to F(A) * FG(X/A)$ такий, що $i_X(G(A)) = F(A)$. Нехай $p \in A$, $h\colon A \to A_1$ — деякий гомеоморфізм, $h_1\colon A_1 \to A$ — відображення, оберене до h. Розглянемо простір $Z = (X, p) \vee (A_1, h(p))$. За наслідком 2 існує гомоморфна ретракція $r\colon FG(X, p) \to FG(A, p)$. За твердженням 2 підгрупа $G(A) \subseteq FG(X, p)$ є топологічно ізоморфною вільній топологічній групі $FG(A, p)$. Оскільки простір Z цілком регулярний, то відображення μ_Z є вкладенням, отже, будемо писати Z, A та A_1 замість $\mu_Z(Z)$, $\mu_Z(A)$ та $\mu_Z(A_1)$, відповідно. Оскільки підпростори A та A_1 є G-ретрактами в Z, то підгрупа $G(A) \subseteq FG(Z)$ топологічно ізоморфна $FG(A)$, підгрупа $G(A_1) \subseteq FG(Z)$ є топологічно ізоморфною $FG(A_1)$. Гомоморфне продовження $h^*\colon FG(A) \to FG(A_1)$ гомеоморфізму h є топологічним ізоморфізмом. Його можемо розглядати як гомоморфізм з $G(A) \subseteq FG(Z)$ у $G(A_1) \subseteq FG(Z)$. Означимо відображення $r_1\colon Z \to FG(A, p)$, прийнявши $r_1(x) = r(x)$, якщо $x \in X$ і $r_1(x) = h_1(x)$, якщо $x \in A_1$. Означимо відображення $r_2\colon Z \to FG(A_1, h(p))$, прийнявши $r_2(x) = h \circ r_1(X)$. Продовжимо відображення $r_1(x)$ та $r_2(x)$ до неперервних гомоморфізмів $R_1\colon FG(Z, p) \to FG(A, p)$, $R_2\colon FG(Z, p) \to FG(A_1, h(p))$. За побудовою, якщо $x \in A$, то $R_1(x) = x$, а якщо $x \in A_1$, то $R_2(x) = x$. Якщо ж $x \in Z$, то виконуються рівності $R_1 \circ R_2 = R_1$, $R_2 \circ R_1 = R_2$. Нехай $f_1\colon Z \to Z/A_1$, $f_2\colon Z \to Z/A$ —- R-факторні відображення, $f_1^*\colon FG(Z, p) \to FG(Z/A_1, f_1(p))$, $f_2^*\colon FG(Z, p) \to FG(Z/A, f_2(p))$ — їхні гомоморфні продовження. Відображення $i\colon Z \to F(Z)$ означене як $i(x) = R_1(x)^{-1} \cdot x \cdot R_2(x)^{-1}$ є неперервним. Нехай $I\colon FG(Z, p) \to FG(Z, h(p))$ — гомоморфне продовження відображення i. Доведемо, що $I \circ I = 1_{FG(Z,p)}$, тобто гомоморфізм I є топологічним ізоморфізмом. Для цього достатньо довести, що $I \circ i(x) = x$ для всіх $x \in Z$. Справді,

$$I \circ i(x) = R_1(R_1(x)^{-1} \cdot x \cdot R_2(x)^{-1})^{-1} \cdot (R_1(x)^{-1} \cdot x \cdot R_2(x)^{-1}) \cdot R_2(R_1(x)^{-1} \cdot x \cdot R_2(x)^{-1})^{-1} =$$

$$= R_1 \circ R_2(x) \cdot R_1(x)^{-1} \cdot R_1 \circ R_1(x) \cdot R_1(x)^{-1} \cdot x \cdot R_2(x)^{-1} \cdot R_2 \circ R_2(x) \cdot R_2(x)^{-1} \cdot R_2 \circ R_1(x) = x.$$

За побудовою $I(A) \subseteq G(A_1)$, $I(A_1) \subseteq G(A)$.

Доведемо, що існує топологічний ізоморфізм

$$u\colon FG(Z/A_1, f_1(p)) \to FG(Z/A, f_2(p)),$$

який робить діаграму

$$\begin{tikzcd} FG(Z,p) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_1^*"'] & FG(Z,p) \arrow[d, "f_2^*"] \\ FG(Z/A_1, f_1(p)) \arrow[r, "u"'] & FG(Z/A, f_2(p)) \end{tikzcd}$$

комутативною.

Нехай $x \in Z/A_1$, $y \in f_1^{-1}(x)$. Приймемо $u_1(x) = f_2^* \circ i(x)$. Доведемо, що відображення u_1 означене коректно. Справді, нехай $y_1, y_2 \in Z$ такі, що $f(y_1) = f(y_2)$ і $y_1 \neq y_2$. Тоді $y_1, y_2 \in A_1$, а тому $i(y_1), i(y_2) \in A$ і $f_2(y_1) = f_2(y_2)$, $u_1(y_1) = u_1(y_2)$. Продовжимо відображення u_1 до гомоморфізму $u\colon FG(Z/A_1, f_1(p)) \to FG(Z/A, f_2(p))$. З того, що відображення f_1 та f_2 є R-факторними, випливає, що гомоморфізми f_1^* та f_2^* відкриті відображення [10] (результат Окунєва і його доведення, доведені для тихоновських просторів, без жодних модифікацій переносяться на випадок цілком регулярних просторів), а тому ізоморфізм u є топологічним. Оскільки $I(A) \subseteq G(A_1)$, то $u(f_1(A)) \subseteq G(f_2(A)))$. Отже, існує топологічний ізоморфізм $u\colon FG(X) \to FG(X/A \vee A)$, такий, що $u(G(A)) = G(A)$. З означення вільної групи та вільного добутку топологічних груп випливає, що для довільних топологічних просторів X та Y існує топологічний ізоморфізм $w\colon FG(X \vee Y) \to FG(X) * FG(Y)$ такий, що $w(G(X)) = FG(X)$. Зокрема, існує топологічний ізоморфізм $w_1\colon FG(X/A \vee A) \to FG(X/A) * FG(A)$ такий, що $w_1(G(A)) = FG(A)$. Тоді композиція $u_1 = w_1 \circ w\colon FG(X) \to FG(X/A) * FG(A)$ має ту властивість, що $u_1(G(A)) = FG(A)$. Нехай $w_2\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ — тотожний автоморфізм дискретної групи цілих чисел $\mathbb{Z}$. Розглянемо вільний добуток ізоморфізмів u_1 та w_2: $w_3 = u_1 * w_2\colon FG(X) * \mathbb{Z} \to FG(X/A) * FG(A) * \mathbb{Z}$. Оскільки $F(X) \simeq FG(X) * \mathbb{Z}$, то ізоморфізм w_3 можна розглядати як ізоморфізм $w_3\colon F(X) \simeq FG(X/A) * F(A)$. За побудовою $w_3(G(A)) = G(A)$. Аналогічно доводиться, що існує топологічний ізоморфізм $i_Y\colon F(Y) \to F(B) * FG(Y/B)$ такий, що $i_Y(G(B)) = F(B)$. Нехай тепер $s_1\colon F(A) \to F(B)$, $s_2\colon FG(X/A) \to FG(Y/B)$ — топологічні ізоморфізми, тоді гомоморфізм $s_1 * s_2\colon F(A) * FG(X/A) \to F(B) * FG(Y/B)$ є топологічним ізоморфізмом. Гомоморфізм $j = i_Y^{-1} \circ (s_1 * s_2) \circ i_X$ є композицією топологічних ізоморфізмів, а отже, є топологічним ізоморфізмом. Іншими словами, ізоморфізм j отримаємо, як композицію послідовності ізоморфізмів

$$F(X) \xrightarrow{i_X} F(A) * FG(X/A) \xrightarrow{s_1 * s_2} F(Y) * FG(Y/B) \xrightarrow{i_Y^{-1}} F(Y).$$

Крім того,

$$j(G(A)) = i_Y^{-1} \circ (s_1 * s_2) \circ i_X(G(A)) = i_Y^{-1} \circ (s_1 * s_2)(F(A)) = i_Y^{-1}(F(B)) = G(B).$$

□

Теорема 4 доводиться аналогічно до теореми 3, якщо врахувати, що для вільних абелевих груп умови $A(X) \simeq A(Y)$ і $AG(X) \simeq AG(Y)$ збігаються [4].

Теорема 4. *Нехай підпростір A є G_A-ретрактом цілком регулярного простору X, підпростір B є G_A-ретрактом цілком регулярного простору Y, причому $(X/A) \overset{A}{\sim} (Y/B)$. Тоді довільний топологічний ізоморфізм $i\colon A(A) \to A(B)$ може бути продовжений до топологічного ізоморфізму $j\colon A(X) \to A(Y)$.*

Теорема 5. *Для просторів X і Y такі умови еквівалентні:*

(1) *для довільних точок $a \in X$, $b \in Y$ існує топологічний ізоморфізм $h\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $h(a) = b$;*
(2) *вільні топологічні групи в сенсі Граєва просторів $FG(X, a)$ та $FG(Y, b)$ топологічно ізоморфні.*

Доведення. Доведемо імплікацію (1) $\Rightarrow$ (2). Нехай $i\colon F(X) \to F(Y)$ — топологічний ізоморфізм такий, що $i(a) = b$. Тотожне відображення $X \to X$ продовжується до неперервного гомоморфізму $f_x\colon F(X) \to FG(X, a)$ у вільну абелеву граєвську топологічну групу простору X з одиницею в точці a. Так само, тотожне відображення $f_y\colon F(Y) \to FG(Y, b)$ продовжується до неперервного гомоморфізму у вільну абелеву граєвську топологічну групу простору Y з одиницею в точці b. Неперервне відображення $s_x\colon X \to FG(Y, b)$, означене як $s_x = f_y \circ i|_X$, має таку властивість, що $s_x(a) = b$, отже, продовжується до неперервного гомоморфізму $i_x\colon FG(X, a) \to FG(Y, b)$. Так само неперервне відображення $s_y\colon Y \to FG(X, b)$, означене як $s_y = f_x \circ i_Y^{-1}$, має таку властивість, що $s_y(b) = a$, отже, продовжується до неперервного гомоморфізму $i_y\colon FG(Y, b) \to FG(X, a)$. Маємо, що

$$j_y \circ j_x = f_x \circ i \circ i^{-1}(x) = x$$

для всіх $x \in X$. Аналогічно

$$j_x \circ j_y = f_y \circ i^{-1} \circ i(y) = y$$

для всіх $y \in Y$. Отже, j — топологічний ізоморфізм вільних граєвських груп $FG(X, a)$ і $FG(Y, b)$.

Доведення імплікації (2) $\Rightarrow$ (1) можна отримати, застосувавши теорему 3 для підпросторів $A = \{a\} \subseteq X$ та $B = \{b\} \subseteq Y$. □

Топологічні простори простори X та Y, які задовольняють умови теореми 5 будемо називати M^*-еквівалентними.

Твердження 4. *Нехай X_1, X_2 — цілком регулярні простори, $K_1 \subseteq X_1$, $K_2 \subseteq X_2$ — їхні G-ретракти. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *пари (X_1, K_1) і (X_2, K_2) є M-еквівалентними;*
(2) *$K_1 \overset{M}{\sim} K_2$ і $FG(X_1/K_1) \simeq FG(X_2/K_2)$.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2). Враховуючи твердження 2, матимемо

$$F(K_1) \simeq G(K_1) \simeq G(K_2) \simeq F(K_2).$$

Якщо $(X_1/K_1) \overset{M}{\sim} (X_2/K_2)$, то R-факторні відображення $p_1\colon X_1 \to X_1/K_1$, $p_2\colon X_2 \to X_2/K_2$, є M-еквівалентними, а тому за твердженням 3 пари $((X_1/K_1), p_1(K_1))$ та $((X_2/K_2), p_2(K_2))$ є M-еквівалентними, звідки за теоремою 5 отримаємо, що $FG(X_1/K_1) \simeq FG(X_2/K_2)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Випливає з теореми 3. □

Аналогічно доводиться таке твердження.

Твердження 5. *Нехай X_1, X_2 — цілком регулярні простори, $K_1 \subseteq X_1$, $K_2 \subseteq X_2$ — їхні G-ретракти. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *пари* (X_1, K_1) *і* (X_2, K_2) *є* A*-еквівалентними;*
(2) $K_1 \overset{A}{\sim} K_2$ *і* $(X_1/K_1) \overset{A}{\sim} (X_2/K_2)$.

Нехай X — топологічний простір. Означимо на X відношення еквівалентності, прийнявши, $a \sim b$, якщо a і b не відокремлюються відкритими в X множинами. Фактор-простір $X/\sim$ позначимо через T_0X. Через $T_X\colon X \to T_0X$ позначимо відповідне фактор-відображення. Відображення T_X має праве обернене, а простір T_0X вкладається в X як ретракт. Вибравши в кожному класі еквівалентності по одній точці, отримаємо підпростір Y в X, який є гомеоморфним T_0X. Фактор-простір X/Y антидискретний, його потужність не залежить від вибраних точок. Цю потужність позначатимемо $|X/T_0X|$. Для цілком регулярного простору X продовження $T_X^*\colon F(X) \to F(T_0X)$ відображення T_X до гомоморфізму вільних топологічних груп є відкритим гомоморфізмом, а його ядро збігається з нормальною підгрупою, яка є сукупністю всіх точок, котрі не відокремлюються від одиниці групи $F(X)$ відкритими множинами.

Твердження 6. *Якщо* $i\colon F(T_0X) \to F(T_0Y)$ *— ізоморфізм вільних топологічних груп,* $|X/T_0X| = |Y/T_0Y|$. *Тоді існує топологічний ізоморфізм* $i\colon F(X) \to F(Y)$ *такий, що* $j|_{F(T_0(X)} = i$.

Доведення. Випливає з теореми 3, якщо врахувати, що простори X/T_0X та Y/T_0Y є антидискретними просторами однакової потужності, тобто гомеоморфними, а отже, M^*-еквівалентними. □

Твердження 7 доведене для тихоновських просторів у [2] легко переноситься на випадок цілком регулярних просторів.

Твердження 7. *З того, що* $(X, A) \overset{M}{\sim} (Y, B)$ *випливає* $(X, A) \overset{A}{\sim} (Y, B)$.

4. Простори з топологією розбиття та еквівалентність наборів

Нагадаємо, що топологічний простір X має *топологію розбиття*, якщо X є прямою (дискретною) сумою своїх антидискретних просторів. На підставі того, що для просторів з топологією розбиття та пар просторів з топологіями розбиття відношення M-еквівалентності та A-еквівалентності збігаються, то будемо скорочено позначати еквівалентні простори $X \overset{f}{\sim} Y$, а еквівалентні пари $(X, A) \overset{f}{\sim} (Y, B)$.

Теорема 6. *Нехай* X *та* Y *— простори з топологією розбиття,* $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. *Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, A) \overset{M}{\sim} (Y, B)$;
(2) $(X, A) \overset{A}{\sim} (Y, B)$;
(3) $(X/A) \overset{f}{\sim} (Y/B)$ *і* $A \overset{f}{\sim} B$.

Доведення. Випливає з тверджень 4 і 5 та ізоморфної класифікації топологічних просторів з топологією розбиття, яка визначена у [5], якщо врахувати, що кожен підпростір топологічного простору з топологією розбиття є його ретрактом. □

Наслідок 4. *Нехай X та Y — топологічні простори з топологіями розбиття, $X_1 \subseteq X$, $Y_1 \subseteq Y$ — їхні скінченні підпростори такі, що простори X/X_1 та Y/Y_1 є скінченними. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, X_1) \overset{f}{\sim} (Y, Y_1)$;
(2) $X \overset{f}{\sim} Y$ *і* $X_1 \overset{f}{\sim} Y_1$.

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2) Очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (1) Оскільки $X \overset{f}{\sim} X_1 \vee (X/X_1)$, $Y \overset{f}{\sim} Y_1 \vee (Y/Y_1)$, то

$$X_1 \vee (X/X_1) \overset{f}{\sim} Y_1 \vee (Y/Y_1).$$

За наслідком 7 з [5] отримаємо, що $(X/X_1) \overset{f}{\sim} (Y/Y_1)$. Звідси за теоремою 6 випливає, що $(X, X_1) \overset{f}{\sim} (Y, Y_1)$. □

Наслідок 5. *Нехай X та Y — топологічні простори з топологіями розбиття, $X_1 \subseteq X$, $Y_1 \subseteq Y$ — їхні підпростори такі, що простори X/X_1 і Y/Y_1 є скінченними. Тоді макі умови еквівалентні:*

(1) $(X, X_1) \overset{f}{\sim} (Y, Y_1)$;
(2) $X \overset{f}{\sim} Y$ *і* $(X/X_1) \overset{f}{\sim} (Y/Y_1)$.

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2) Очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (1) Оскільки $X \overset{f}{\sim} X_1 \vee (X/X_1)$, $Y \overset{f}{\sim} Y_1 \vee (Y/Y_1)$, то

$$X_1 \vee (X/X_1) \overset{f}{\sim} Y_1 \vee (Y/Y_1).$$

За наслідком 7 з [5] отримаємо, що $(X/X_1) \overset{f}{\sim} (Y/Y_1)$. Звідси за теоремою 6 випливає, що $(X, X_1) \overset{f}{\sim} (Y, Y_1)$. □

З наслідків 4 і 5 випливає наслідок 6.

Наслідок 6. *Нехай X та Y — скінченні топологічні простори з топологіями розбиття, $X_1 \subseteq X$, $Y_1 \subseteq Y$. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) $(X, X_1) \overset{f}{\sim} (Y, Y_1)$;
(2) $X \overset{f}{\sim} Y$ *і* $(X/X_1) \overset{f}{\sim} (Y/Y_1)$;
(3) $X \overset{f}{\sim} Y$ *і* $X_1 \overset{f}{\sim} Y_1$;
(4) $X_1 \overset{f}{\sim} Y_1$ *і* $(X/X_1) \overset{f}{\sim} (Y/Y_1)$.

5. Про деякі функтори та еквівалентність наборів

Твердження 8. *Нехай $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ — пари цілком регулярних просторів, причому $(X, A) \overset{M}{\sim} (Y, B)$. Тоді $(T_0X, T_0A) \overset{M}{\sim} (T_0Y, T_0B)$.*

Доведення. Для M-еквівалентних просторів фактор-відображення $f_X : X \to T_0X$ і $f_Y : Y \to T_0Y$ M-еквівалентні, а тому залишається застосувати твердження 3. □

Під відносною топологічною властивістю будемо розуміти властивість, яка характеризує розміщення підпростору Y топологічного простору X у цьому просторі.

З твердження 8 випливає таке твердження.

Твердження 9. *Нехай* P *— відносна топологічна властивість така, що підпростір* A *цілком регулярного простору* X *володіє властивістю* P *в* X *тоді і тільки тоді, коли підпростір* T_0A *володіє властивістю* P *в* T_0X. *Якщо властивість* P *зберігається відношенням* M*-еквівалентності пар у класі тихоновських просторів, то* P *зберігається відношенням* M*-еквівалентності пар у класі цілком регулярних просторів.*

Твердження 10. *Нехай* X *— цілком регулярний простір. Підпростір* A *є всюди щільним в* X *тоді і тільки тоді, коли підпростір* T_0A *є всюди щільним у* T_0X.

Доведення. **Необхідність.** Нехай підпростір A є всюди щільним в X. За неперервністю факторного відображення $f\colon X \to T_0X$ підпростір $T_0A = f(A)$ є всюди щільним в T_0X.

Достатність. Нехай підпростір T_0A є всюди щільним у T_0X. За наслідком 2.4.10 з [6] факторне відображення $f\colon X \to T_0X$ буде замкненим. Для кожного замкненого відображення $f\colon X \to Y$ і довільного $A \subseteq X$ виконується рівність $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$. Отже, $f(\overline{A}) = T_0X$. На підставі того, що всі класи еквівалентності факторного відображення $f\colon X \to T_0X$ складаються лише з точок, які не відокремлюються відкритими та замкненими множинами, то цяя рівність можлива лише у випадку, коли $\overline{A} = X$. □

Як доведено у [2], властивість бути всюди щільним підпростором зберігається відношенням M-еквівалентності пар у класі тихоновських просторів.

Наслідок 7. *Властивість бути всюди щільним простором зберігається відношенням* M*-еквівалентності пар у класі цілком регулярних просторів.*

Твердження 11. *Нехай* X *— цілком регулярний простір. Підпростір* A *функціонально обмежений в* X *тоді і тільки тоді, коли підпростір* T_0A *є функціонально обмеженим у* T_0X.

Доведення. **Необхідність.** Нехай $q\colon X \to T_0X$ — факторне відображення. Оскільки множина дійсних чисел з топологією, породженою евклідовою метрикою є T_0-простором, то для довільної неперервної функції $f\colon X \to \mathbb{R}$ існує неперервне відображення $f_1\colon T_0X \to \mathbb{R}$ таке, що $f = f_1 \circ q$. Нехай A — функціонально обмежена в X. Оскільки множина $T_0(A) = q(A)$ є функціонально обмеженою в T_0X, то множина $f(a) = f_1(T_0A)$ є обмеженою.

Достатність. Нехай множина A функціонально обмежена в X. Тоді для довільної неперервної дійснозначної функції $f_1\colon T_0X \to \mathbb{R}$ множина $f_1(T_0A) = f(A)$ є обмеженою. □

Наслідок 8. *Властивість бути функціонально обмеженим підпростором зберігається відношенням* M*-еквівалентності пар у класі цілком регулярних просторів.*

Доведення. У [3] доведено, що властивість бути функціонально обмеженим простором зберігається відношенням M-еквівалентності пар у класі тихоновських просторів, тому з тверджень 8 і 11 випливає, що властивість бути функціонально обмеженим простором зберігається відношенням M-еквівалентності пар у класі цілком регулярних просторів. □

Оскільки для довільного топологічного простору X вільна топологічна група $F(X)$ природно ізоморфна вільній групі $F(\eta_X(X))$ цілком регулярного простору $\eta_X(X)$, то результати цієї праці дають змогу звести класифікацію пар топологічних просторів (X, Y) до класифікації пар $(\eta_X(X), \eta_X(Y))$ цілком регулярних просторів, а потім і пар $(T_0(\eta_X(X)), T_0(\eta_X(Y)))$ тихоновських просторів.

Автор висловлює щиру подяку рецензенту за цінні поради.

Список використаної літератури

1. О. Г. Окунев, *М-эквивалентность произведений*, Тр. Моск. Мат. общ. **56** (1995), 192–205.
2. Н. М. Пирч, *М-еквівалентність пар*, Прикладні проблеми математики і механіки **2** (2004), 74–79.
3. Н. М. Пирч, *М-еквівалентність пар і відображень*, Мат. методи фіз.-мех. поля **49** (2006), no. 2, 21–26.
4. Н. М. Пирч, *Конструкції, що зберігають М-еквівалентність*, Вісник НУ "Львівська Політехніка", фіз.-мат. науки **625** (2008), 48–53.
5. Н. М. Пирч, *Про ізоморфну класифікацію вільних топологічних групп нетихоновських просторів*, Прикладні проблеми математики і механіки **17** (2019), 27–37.
6. Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Москва, Мир, 1986, 751 с.
7. A. V. Arhangel'skii and M. G. Tkachenko, *Topological groups and related structures*, Atlantis Press, Amsterdam-Paris, 2008, 781 p.
8. T. H. Fay, E. T. Ordman, B. V. Smith Thomas, *The free topological groups over rationals*, General Topology Appl. **10** (1979), no. 1, 33–47. DOI: 10.1016/0016-660X(79)90027-8
9. P. M. Gartside, E. A. Reznichenko, and O. V. Sipacheva, *Mal'tsev and retral spaces*, Topology Appl. **80** (1997), no. 1–2, 115–129. DOI: 10.1016/S0166-8641(96)00166-6
10. O. G. Okunev, *A method for constructing examples of M-equivalent spaces*, Topology Appl. **36** (1990), no. 2, 157–171. DOI: 10.1016/0166-8641(90)90006-N
11. B. V. Smith Thomas, *The free topological groups*, General Topology Appl. **4** (1974), no. 1, 51–72. DOI: 10.1016/0016-660X(74)90005-1

Стаття: надійшла до редколегії 07.12.2020
доопрацьована 31.12.2020
прийнята до друку 17.11.2021

ON MARKOV EQUIVALENCE OF THE PAIRS OF NONTYCHONOFF SPACES

Nazar PYRCH

Ukrainian Academy of Printing,
Pidgolosko Str., 19, 79020, Lviv, Ukraine
e-mail: pnazar@ukr.net

In the paper we proposed the method for reducing the problem of isomorphic classification free topological groups on completely regular spaces and subgroups generated by their subspaces to same problem on Tychonoff spaces

Key words: free topological group, M-equivalence, generalized retracts, hereditary topological property.