ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 90. С. 20–47
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 90. P. 20–47
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.90.020-047

УДК 512.53

ПОЛІЦИКЛІЧНІ РОЗШИРЕННЯ НАПІВГРУП

Олег ГУТІК, Павло ХИЛИНСЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua,
pavlo.khylynskyi@lnu.edu.ua

Вводимо поняття λ-поліциклічного розширення Брука-Рейлі моноїда S із визначеним гомоморфізмом θ, яке є аналогом розширення Брука-Рейлі моноїда S. Описуємо ідемпотенти напівгрупи $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$ та відношення Ґріна на $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$. Доводимо, що $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$ — 0-проста напівгрупа для довільної напівгрупи S. Знайдено необхідні та достатні умови на моноїд S і гомоморфізм θ, за виконання яких напівгрупа $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$ є регулярною, інверсною, 0-біпростою, комбінаторною, конгруенц-простою, чи інверсною 0-E-унітарною. Також вивчаємо топологізації напівгрупи $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$.

Ключові слова: напівгрупа, поліциклічний моноїд, розширення, напівтопологічна напівгрупа, топологічна напівгрупа.

1. Вступ. Термінологія та позначення

Ми користуватимемося термінологією з [6, 7, 8, 9, 11, 17, 20, 22]. Якщо $f\colon X \to Y$ – відображення, то для довільної точки $y \in Y$ через $f^{-1}(y)$ будемо позначати повний прообраз точки y стосовно відображення f.

Напівгрупа – це непорожня множина з визначеною на ній бінарною асоціативною операцією.

Якщо S — напівгрупа, то через S^1 позначатимемо S з приєднаною одиницею та відношення Ґріна $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{D}$ і $\mathscr{H}$ на S визначаються так:

$$a\mathscr{R}b \text{ тоді і лише тоді, коли } aS^1 = bS^1;$$

$$a\mathscr{L}b \text{ тоді і лише тоді, коли } S^1a = S^1b;$$

$$a\mathscr{J}b \text{ тоді і лише тоді, коли } S^1aS^1 = S^1bS^1;$$

2020 Mathematics Subject Classification: 20M15, 20M50, 18B40, 22A15

$$\mathscr{D} = \mathscr{L} \circ \mathscr{R} = \mathscr{R} \circ \mathscr{L};$$
$$\mathscr{H} = \mathscr{L} \cap \mathscr{R}$$

(див. [8, §2.1] або [12]). Також, через $H_S(1_S)$ будемо позначати *групу одиниць* моноїда S, і в цьому випадку, очевидно, що $H_S(1_S)$ є $\mathscr{H}$-класом одиниці 1_S моноїда S.

Нехай S — напівгрупа. Через $E(S)$ позначатимемо *множину ідемпотентів* в S. Напівгрупова операція визначає частковий порядок $\leqslant$ на $E(S)$

$$e \leqslant f \quad \Leftrightarrow \quad ef = fe = e.$$

Цей порядок називається *природним частковим порядком* на $E(S)$. Напівґратка — це комутативна напівгрупа ідемпотентів. Через $Z(S)$ будемо позначати центр напівгрупи S, тобто $Z(S) = \{s \in S \colon sx = xs \text{ для всіх } x \in S\}$.

Якщо $\mathfrak{C}$ — конгруенція на напівгрупі S, то через $[s]_{\mathfrak{C}}$ позначатимемо клас еквівалентності $\mathfrak{C}$, який містить елемент $s \in S$.

Напівгрупа S називається:

- *простою*, якщо S не має власних двобічних ідеалів;
- 0-*простою*, якщо S містить нуль і S не має власних двобічних ідеалів відмінних від $\{0\}$;
- *біпростою*, якщо S містить єдиний $\mathscr{D}$-клас;
- 0-*біпростою*, якщо S має нуль і S містить два $\mathscr{D}$-класи: $\{0\}$ і $S \setminus \{0\}$;
- *комбінаторною*, якщо усі $\mathscr{H}$-класи в S є одноелементними;
- *конгруенц-простою*, якщо S має лише одиничну й універсальну конгруенції.

Нагадаємо, що на інверсній напівгрупі S напівгрупова операція визначає частковий порядок $\leqslant$ на S

$$x \leqslant y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{існує} \quad e \in E(S) \quad \text{такий, що} \quad x = ey.$$

Цей порядок називається *природним частковим порядком* на S.

Інверсна напівгрупа S називається:

- E-*унітарною*, якщо з $es \in E(S)$ випливає, що $s \in E(S)$ для довільних $e \in E(S)$ і $s \in S$ [23];
- 0-E-*унітарною*, якщо S містить нуль 0_S і з $es \in E(S)$ випливає, що $s \in E(S)$ для довільних $e \in E(S) \setminus \{0_S\}$ і $s \in S$ [18, 27].

Напівтопологічною (*топологічною*) напівгрупою називається топологічний простір з нарізно неперервною (неперервною) напівгруповою операцією. Інверсна топологічна напівгрупа з неперервною інверсією називається *топологічною інверсною напівгрупою.*

Топологія τ на напівгрупі S називається:

- *трансляційно неперервною*, якщо (S, τ) — напівтопологічна напівгрупа;
- *напівгруповою*, якщо (S, τ) — топологічна напівгрупа.

Біциклічний моноїд $\mathscr{C}(p, q)$ – це напівгрупа з одиницею 1 породжена двома елементами p і q, що задовольняє умову $pq = 1$. На $\mathscr{C}(p, q)$ напівгрупова операція визначається так:

$$q^k p^l \cdot q^m p^n = q^{k+m-\min\{l,m\}} p^{l+n-\min\{l,m\}}.$$

Біциклічний моноїд $\mathscr{C}(p,q)$ є комбінаторною, біпростою, F-інверсною напівгрупою [17] і відіграє важливу роль в алгебричній теорії напівгруп і в теорії топологічних напівгруп. Зокрема, добре відомий результат Андерсона [3] стверджує, що (0-)проста напівгрупа є цілком (0-)простою тоді і тільки тоді, коли вона не містить ізоморфної копії біциклічного моноїда.

У 1970 році Ніва та Перро запропонували таке узагальнення біциклічного моноїда ([17], [19]). Для будь-якого ненульового кардинала λ *поліциклічний моноїд* P_λ — це напівгрупа з нулем така, що

$$P_\lambda = \left\langle \{p_i\}_{i\in\lambda}, \{p_i^{-1}\}_{i\in\lambda} \mid p_i p_i^{-1} = 1 \text{ і } p_i p_j^{-1} = 0 \text{ для } i \neq j \right\rangle.$$

Очевидно, що у випадку $\lambda = 1$ напівгрупа P_1 ізоморфна біциклічному моноїду з приєднаним нулем.

Рональд Брук у монографії [5], використовуючи біциклічний моноїд, побудував конструкцію алгебричного занурення довільної напівгрупи S у простий моноїд $\boldsymbol{B}(S)$ (див. [9, §8.3]). Рейлі [21] та Уорн [28] узагальнили конструкцію Брука, побудувавши розширення Брука–Рейлі $\boldsymbol{BR}(S,\theta)$, для описання структури біпростих регулярних ω-напівгруп (див. [20, розділ II]). Топологізації напівгруп Бука та Брука–Рейлі вивчалися в працях [1, 2, 14, 15]. Структуру топологічних інверсних локально компактних біпростих ω-напівгруп вивчали в працях [24, 25, 26]. Ми будуємо та досліджуємо аналог розширення Брука–Рейлі напівгруп для λ-поліциклічного моноїда та досліджуємо його властивості.

Нехай λ – довільний ненульовий кардинал. Надалі, через λ^* будемо позначати вільний моноїд над алфавітом λ, а через ε – порожнє слово в λ^*. Для будь-якого слова $a \in \lambda^*$ позначимо:

$|a|$ – довжину слова a;
$\operatorname{suff}(a) = \{b \in \lambda^* \colon$ існує слово $c \in \lambda^*$ таке, що $cb = a\}$ – множину всіх суфіксів слова a;
$\operatorname{suff}^{\circ}(a) = \{b \in \lambda^* \colon$ існує слово $c \in \lambda^* \setminus \{\varepsilon\}$ таке, що $cb = a\}$ – множину всіх власних суфіксів слова a.

Нехай S – моноїд і $\theta\colon S \to H_S(1)$ – гомоморфізм з S у його групу одиниць $H_S(1)$. Множина $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S) = (S \times (P_\lambda \setminus \{0\})) \sqcup \{\mathbf{0}\}$ з бінарною операцією

$$(1)\qquad (s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) = \begin{cases} \left(\theta^{|u|}(s)t, (ua_1)^{-1}b_2\right), & \text{якщо існує слово } u \in \lambda^* \\ & \qquad \text{таке, що } b_1 = ua_2; \\ \left(s\theta^{|v|}(t), a_1^{-1}vb_2\right), & \text{якщо існує слово } v \in \lambda^* \\ & \qquad \text{таке, що } a_2 = vb_1; \\ \mathbf{0}, & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

і

$$(s, a_1^{-1}a_2) * \mathbf{0} = \mathbf{0} * (s, a_1^{-1}a_2) = \mathbf{0} * \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

де $\theta^n(s) = \underbrace{\theta \circ \cdots \circ \theta}_{n}(s)$ для будь-якого натурального числа n і $\theta^0(s) = s$ називається *λ-поліциклічним розширенням Брука-Рейлі* моноїда S з визначеним гомоморфізмом θ.

Ми доводимо, що так визначена бінарна операція $*$ на $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ є асоціативною, а також описуємо ідемпотенти напівгрупи $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$ та відношення Ґріна на $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$. Доведено, що $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$ — 0-проста напівгрупа для довільної напівгрупи S. Знайдено необхідні та достатні умови на моноїд S гомоморфізм θ, за виконання яких напівгрупа $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$ є регулярною, інверсною, 0-біпростою, комбінаторною, конгруенц-простою, чи інверсною 0-E-унітарною. Також вивчається топологізація напівгрупи $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$. Отримані результати анонсовано в [16].

2. Алгебричні властивості напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$

Твердження 1. *$(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$ є напівгрупою.*

Доведення. Нехай $(s,a_1^{-1}a_2)$, $(t,b_1^{-1}b_2)$ і $(r,c_1^{-1}c_2)$ – довільні ненульові елементи множини $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$. Розглянемо можливі випадки.

1. Існують слова $u,v\in\lambda^*$ такі, що $b_1=ua_2$ і $c_1=vb_2$. Тоді:

$$\begin{aligned}
((s,a_1^{-1}a_2)*(t,b_1^{-1}b_2))*(r,c_1^{-1}c_2) &= (\theta^{|u|}(s)t,(ua_1)^{-1}b_2)*(r,c_1^{-1}c_2)=\\
&=(\theta^{|v|}(\theta^{|u|}(s)t)r,(vua_1)^{-1}c_2)=\\
&=(\theta^{|v|+|u|}(s)\theta^{|v|}(t)r,(vua_1)^{-1}c_2)=\\
&=(\theta^{|vu|}(s)\theta^{|v|}(t)r,(vua_1)^{-1}c_2)=\\
&=(s,a_1^{-1}a_2)*(\theta^{|v|}(t)r,(vb_1)^{-1}c_2)=\\
&=(s,a_1^{-1}a_2)*((t,b_1^{-1}b_2)*(r,c_1^{-1}c_2)).
\end{aligned}$$

2. Існують слова $u,v\in\lambda^*$ такі, що $a_2=ub_1$ і $c_1=vb_2$. Тоді розглянемо можливі підвипадки.

a) Існує слово $w\in\lambda^*$ таке, що $u=wv$. Тоді:

$$\begin{aligned}
((s,a_1^{-1}a_2)*(t,b_1^{-1}b_2))*(r,c_1^{-1}c_2) &= (s\theta^{|u|}(t),a_1^{-1}ub_2)*(r,c_1^{-1}c_2)=\\
&=(s\theta^{|wv|}(t),a_1^{-1}wvb_2)*(r,c_1^{-1}c_2)=\\
&=(s\theta^{|wv|}(t),a_1^{-1}wc_1)*(r,c_1^{-1}c_2)=\\
&=(s\theta^{|wv|}(t)\theta^{|w|}(r),a_1^{-1}wc_2)=\\
&=(s\theta^{|w|+|v|}(t)\theta^{|w|}(r),a_1^{-1}wc_2))=\\
&=(s\theta^{|w|}(\theta^{|v|}(t)r),a_1^{-1}wc_2))=\\
&=(s,a_1^{-1}a_2)*(\theta^{|v|}(t)r,(vb_1)^{-1}c_2))=\\
&=(s,a_1^{-1}a_2)*((t,b_1^{-1}b_2)*(r,c_1^{-1}c_2)).
\end{aligned}$$

b) Існує слово $w\in\lambda^*$ таке, що $v=wu$. Тоді:

$$\begin{aligned}
((s,a_1^{-1}a_2)*(s,b_1^{-1}b_2))*(r,c_1^{-1}c_2) &= (s\theta^{|u|}(t),a_1^{-1}ub_2)*(r,c_1^{-1}c_2)=\\
&=(\theta^{|w|}(s\theta^{|u|}(t))r,(wa_1)^{-1}c_2)=\\
&=(\theta^{|w|}(s)\theta^{|w|+|u|}(t)r,(wa_1)^{-1}c_2)=
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\theta^{|w|}(s)\theta^{|wv|}(t)r, (wa_1)^{-1}c_2) = \\
&= (\theta^{|w|}(s)\theta^{|v|}(t)r, (wa_1)^{-1}c_2) = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * (\theta^{|v|}(t)r, (wa_2)^{-1}c_2) = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * (\theta^{|v|}(t)r, (wub_1)^{-1}c_2) = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * (\theta^{|v|}(t)r, (vb_1)^{-1}c_2) = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * ((t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2)).
\end{aligned}
$$

c) У випадку $u \notin \mathrm{suff}(v)$ і $v \notin \mathrm{suff}(u)$ отримуємо, що

$$
\begin{aligned}
((s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2)) * (r, c_1^{-1}c_2) &= (s\theta^{|u|}(t), a_1^{-1}ub_2) * (r, c_1^{-1}c_2) = \\
&= \mathbf{0} = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * (\theta^{|v|}(t)r, (vb_1)^{-1}c_2) = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * ((t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2)).
\end{aligned}
$$

3. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $b_1 = ua_2$ і $b_2 = vc_1$. Тоді:

$$
\begin{aligned}
((s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2)) * (r, c_1^{-1}c_2) &= (\theta^{|u|}(s)t, (ua_1)^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2) = \\
&= (\theta^{|u|}(s)t\theta^{|v|}(r), (ua_1)^{-1}vc_2) = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * (t\theta^{|v|}(r), b_1^{-1}vc_2) = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * ((t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2)).
\end{aligned}
$$

4. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $a_2 = ub_1$ і $b_2 = vc_1$. Тоді:

$$
\begin{aligned}
((s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2)) * (r, c_1^{-1}c_2) &= (s\theta^{|u|}(t), a_1^{-1}ub_2) * (r, c_1^{-1}c_2) = \\
&= (s\theta^{|u|}(t)\theta^{|uv|}(r), a_1^{-1}uvc_2) = \\
&= (s\theta^{|u|}(t)\theta^{|u|+|v|}(r), a_1^{-1}uvc_2) = \\
&= (s\theta^{|u|}(t\theta^{|v|}(r)), a_1^{-1}uvc_2) = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * (t\theta^{|v|}(r), b_1^{-1}vc_2) = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * ((t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2)).
\end{aligned}
$$

5. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $b_1 = ua_2$, $b_2 \notin \mathrm{suff}(c_1)$ і $c_1 \notin \mathrm{suff}(b_2)$. Тоді:

$$
\begin{aligned}
((s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2)) * (r, c_1^{-1}c_2) &= (\theta^{|u|}(s)t, (ua_1)^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2) = \\
&= \mathbf{0} = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * ((t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2)).
\end{aligned}
$$

6. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $c_1 = ub_2$, $a_2 \notin \mathrm{suff}(b_1)$ і $b_1 \notin \mathrm{suff}(a_2)$. Тоді:

$$
\begin{aligned}
((s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2)) * (r, c_1^{-1}c_2) &= \mathbf{0} = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * (\theta^{|u|}(t)r, (ub_1)^{-1}c_2) = \\
&= (s, a_1^{-1}a_2) * ((t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2)).
\end{aligned}
$$

7. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_2 = ub_1$, $b_2 \notin \mathrm{suff}(c_1)$ і $c_1 \notin \mathrm{suff}(b_2)$. Тоді:

$$\begin{aligned}((s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2)) * (r, c_1^{-1}c_2) &= (s\theta^{|u|}(t), a_1^{-1}ub_2) * (r, c_1^{-1}c_2) = \\ &= \mathbf{0} = \\ &= (s, a_1^{-1}a_2) * ((t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2)).\end{aligned}$$

8. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $b_2 = uc_1$ і $a_2 \notin \mathrm{suff}(b_1)$ і $b_1 \notin \mathrm{suff}(a_2)$. Тоді

$$\begin{aligned}((s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2)) * (r, c_1^{-1}c_2) &= \mathbf{0} = \\ &= (s, a_1^{-1}a_2) * (t\theta^{|u|}(r), b_1^{-1}uc_2) = \\ &= (s, a_1^{-1}a_2) * ((t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2)).\end{aligned}$$

9. У випадку $a_2 \notin \mathrm{suff}(b_1)$, $b_1 \notin \mathrm{suff}(a_2)$, $b_2 \notin \mathrm{suff}(c_1)$ і $c_1 \notin \mathrm{suff}(b_2)$ маємо, що

$$((s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2)) * (r, c_1^{-1}c_2) = \mathbf{0} = (s, a_1^{-1}a_2) * ((t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2)).$$

Отож, бінарна операція $*$ на $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ асоціативна. □

Надалі, якщо не зазначено інше, то будемо вважати, що S — моноїд з одиницею 1_S і групою одиниць $H_S(1_S)$. Також через 1_{P_λ} і 0_{P_λ} позначатимемо одиницю та нуль поліциклічного моноїда P_λ, а через $\mathbf{0}$ — нуль напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$.

Твердження 2. *Ненульовий елемент $(s, a_1^{-1}a_2)$ напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ є ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли $s \in E(S)$ і $a_1 = a_2$.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $(e, a_1^{-1}a_2)$ – ненульовий ідемпотент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Розглянемо можливі випадки.

1. Якщо існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_1 = ua_2$, то

$$(e, a_1^{-1}a_2) = (e, a_1^{-1}a_2) * (e, a_1^{-1}a_2) = (\theta^{|u|}(e) \cdot e, (ua_1)^{-1}a_2).$$

З цієї рівності випливає, що $a_1 = ua_1$. Тому $u = \varepsilon$, а отже,

$$e = \theta^{|u|}(e) \cdot e = \theta^0(e) \cdot e = e \cdot e$$

і $a_1 = a_2$.

2. Якщо існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_2 = ua_1$, то

$$(e, a_1^{-1}a_2) = (e, a_1^{-1}a_2) * (e, a_1^{-1}a_2) = (e \cdot \theta^{|u|}(e), a_1^{-1}ua_2).$$

З цієї рівності випливає, що $a_2 = ua_2$. Тому $u = \varepsilon$, а отже,

$$e = e \cdot \theta^{|u|}(e) = e \cdot \theta^0(e) = e \cdot e$$

і $a_1 = a_2$.

($\Leftarrow$) Нехай e – довільний ідемпотент напівгрупи S і a – довільне слово з λ^*. Тоді $(e, a^{-1}a) * (e, a^{-1}a) = (e^2, a^{-1}a) = (e, a^{-1}a)$. □

Твердження 3. *Ідемпотенти комутують у $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ тоді і тільки тоді, коли ідемпотенти комутують у напівгрупі S.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай e, f – довільні ідемпотенти напівгрупи S. Тоді елементи $(e, 1_{P_\lambda})$ і $(f, 1_{P_\lambda})$ є ідемпотентами напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Оскільки індемпотенти в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ комутують, то

$$(e \cdot f, 1_{P_\lambda}) = (e, 1_{P_\lambda}) * (f, 1_{P_\lambda}) = (f, 1_{P_\lambda}) * (e, 1_{P_\lambda}) = (f \cdot e, 1_{P_\lambda}),$$

а отже, $e \cdot f = f \cdot e$.

($\Leftarrow$) Нехай $(e, a^{-1}a)$ і $(f, b^{-1}b)$ – довільні ненульові ідемпотенти напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Розглянемо можливі випадки.

1. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a = ub$. Тоді

$$\begin{aligned}(e, a^{-1}a) * (f, b^{-1}b) &= (e \cdot \theta^{|u|}(f), a^{-1}ub) = \\ &= (e \cdot 1_S, a^{-1}ub) = \\ &= (1_S \cdot e, a^{-1}ub) = \\ &= (\theta^{|u|}(f) \cdot e, (ub)^{-1}a) = \\ &= (f, b^{-1}b) * (e, a^{-1}a).\end{aligned}$$

2. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $b = ua$. Тоді

$$\begin{aligned}(e, a^{-1}a) * (f, b^{-1}b) &= (\theta^{|u|}(e) \cdot f, (ua)^{-1}b) = \\ &= (1_S \cdot f, a^{-1}ub) = \\ &= (f \cdot 1_S, a^{-1}ub) = \\ &= (f \cdot \theta^{|u|}(e), b^{-1}ua) = \\ &= (f, b^{-1}b) * (e, a^{-1}a).\end{aligned}$$

3. Якщо $a \notin \operatorname{suff}(b)$ і $b \notin \operatorname{suff}(a)$, то

$$(e, a^{-1}a) * (f, b^{-1}b) = \mathbf{0} = (f, b^{-1}b) * (e, a^{-1}a).$$

Очевидно, що кожен елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ комутує з її нулем. □

Нехай S – напівгрупа. Для довільних $a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda$, $A \subseteq S$ і $s \in S$ позначимо

$$\begin{aligned}S_{a_1^{-1}a_2} &= \left\{(t, a_1^{-1}a_2) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \colon t \in S\right\}, \\ A_{a_1^{-1}a_2} &= \left\{(t, a_1^{-1}a_2) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \colon t \in A \subseteq S\right\}, \\ P_\lambda^s &= \left\{(s, b_1^{-1}b_2) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \colon b_1^{-1}b_2 \in P_\lambda \setminus \{0_{P_\lambda}\}\right\} \cup \{\mathbf{0}\}.\end{aligned}$$

Твердження 4. 1. *Множина $S_{a_1^{-1}a_2}$ з індукованою з $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ операцією ізоморфна напівгрупі S тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$.*

2. *Множина P_λ^s з індукованою з $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ операцією ізоморфна поліциклічному моноїду P_λ тоді і тільки тоді, коли s – ідемпотент напівгрупи S.*

Доведення. 1. Якщо $a_1 \neq a_2$, то з твердження 2 випливає, що $S_{a_1^{-1}a_2}$ не є піднапівгрупою напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$.

У випадку $a_1 = a_2$ визначимо відображення $f \colon S_{a_1^{-1}a_2} \to S$ за формулою $f((s, a_1^{-1}a_2)) = s$. Очевидно, що відображення f є бієктивним. Доведемо, що воно зберігає операцію. Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)$ і $(t, a_1^{-1}a_2)$ – довільні елементи з $S_{a_1^{-1}a_2}$. Тоді

$$f((s, a_1^{-1}a_2) * (t, a_1^{-1}a_2)) = f((st, a_1^{-1}a_2)) = st = f((s, a_1^{-1}a_2)) \cdot f((t, a_1^{-1}a_2)).$$

Отже, f є ізоморфізмом.

2. Якщо s не є ідемпотентом напівгрупи S, то

$$(s, 1_{P_\lambda}) * (s, 1_{P_\lambda}) = (ss, 1_{P_\lambda}) \notin P_\lambda^s,$$

а отже, P_λ^s не є піднапівгрупою напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$.

У випадку, коли s – ідемпотент напівгрупи S, то визначимо відображення $f\colon P_\lambda^s \to P_\lambda$ за формулами $f((s, a_1^{-1}a_2)) = a_1^{-1}a_2$ і $f(\mathbf{0}) = 0_{P_\lambda}$. Очевидно, що так означене відображення f є бієктивним. Доведемо, що воно зберігає операцію. Нехай $(s, a_1^{-1}a_2), (s, b_1^{-1}b_2) \in P_\lambda^s$. Розглянемо можливі випадки.

a) Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $b_1 = ua_2$. Тоді:

$$\begin{aligned} f((s, a_1^{-1}a_2) * (s, b_1^{-1}b_2)) &= f((\theta^{|u|}(s)s, a_1^{-1}u^{-1}b_2)) = \\ &= f((1_S s, a_1^{-1}u^{-1}b_2)) = \\ &= f((s, a_1^{-1}u^{-1}b_2)) = \\ &= a_1^{-1}u^{-1}b_2 = \\ &= a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2 = \\ &= f((s, a_1^{-1}a_2)) * f((s, b_1^{-1}b_2)). \end{aligned}$$

b) Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_2 = ub_1$. Тоді:

$$\begin{aligned} f((s, a_1^{-1}a_2) * (s, b_1^{-1}b_2)) &= f((s\theta^{|u|}(s), a_1^{-1}ub_2)) = \\ &= f((s1_S, a_1^{-1}ub_2)) = \\ &= f((s, a_1^{-1}ub_2)) = \\ &= a_1^{-1}ub_2 = \\ &= a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2 = \\ &= f((s, a_1^{-1}a_2)) * f((s, b_1^{-1}b_2)). \end{aligned}$$

c) Якщо $(s, a_1^{-1}a_2) * (s, b_1^{-1}b_2) = \mathbf{0}$, то

$$f((s, a_1^{-1}a_2) * (s, b_1^{-1}b_2)) = \mathbf{0} = a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2 = f((s, a_1^{-1}a_2)) * f((s, b_1^{-1}b_2)).$$

□

Твердження 5. *Елемент $(t, b_1^{-1}b_2)$ є інверсним до елемента $(s, a_1^{-1}a_2)$ в напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ тоді і тільки тоді, коли $b_1 = a_2, b_2 = a_1$ і t — інверсний елемент до s в напівгрупі S.*

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай елемент $(t, b_1^{-1}b_2)$ є інверсним до елемента $(s, a_1^{-1}a_2)$ в напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Розглянемо можливі випадки.

1. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $b_1 = ua_2$ і $a_1 = vb_2$. Тоді

$$\begin{aligned}(s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) * (s, a_1^{-1}a_2) &= (\theta^{|u|}(s)t, (ua_1)^{-1}b_2) * (s, a_1^{-1}a_2) = \\ &= (\theta^{|v|}(\theta^{|u|}(s)t)s, (vua_1)^{-1}a_2) = \\ &= (s, a_1^{-1}a_2).\end{aligned}$$

З цієї рівності випливає, що $a_1 = vua_1$. Тому $u = \varepsilon$ і $v = \varepsilon$, а отже, $b_1 = a_2$ і $b_2 = a_1$.

2. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $a_1 = ub_2$ і $a_2 = vb_1$. Тоді

$$\begin{aligned}(t, b_1^{-1}b_2) * (s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) &= (\theta^{|u|}(t)s, (ub_1)^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) = \\ &= (\theta^{|u|}(t)s\theta^{|v|}(t), (ub_1)^{-1}vb_2) = \\ &= (t, b_1^{-1}b_2).\end{aligned}$$

З цієї рівності випливає, що $b_1 = ub_1$ і $b_2 = vb_2$. Тому $u = \varepsilon$ і $v = \varepsilon$, а отже, $b_1 = a_2$ і $b_2 = a_1$.

3. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $b_1 = ua_2$ і $b_2 = va_1$. Тоді

$$\begin{aligned}(s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) * (s, a_1^{-1}a_2) &= (\theta^{|u|}(s)t, (ua_1)^{-1}b_2) * (s, a_1^{-1}a_2) = \\ &= (\theta^{|u|}(s)t\theta^{|v|}(s), (ua_1)^{-1}va_2) = \\ &= (s, a_1^{-1}a_2).\end{aligned}$$

З цієї рівності випливає, що $a_1 = ua_1$ і $a_2 = va_2$. Тому $u = \varepsilon$ і $v = \varepsilon$, а отже, $b_1 = a_2$ і $b_2 = a_1$.

4. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $a_2 = ub_1$ і $b_2 = va_1$. Тоді

$$\begin{aligned}(s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) * (s, a_1^{-1}a_2) &= (s\theta^{|u|}(t), a_1^{-1}ub_2) * (s, a_1^{-1}a_2) = \\ &= (s\theta^{|u|}(t)\theta^{|v|}(s), a_1^{-1}uva_2) = \\ &= (s, a_1^{-1}a_2).\end{aligned}$$

З цієї рівності випливає, що $a_2 = vua_2$. Тому $u = \varepsilon$ і $v = \varepsilon$, а отже, $b_1 = a_2$ і $b_2 = a_1$.

Отже, якщо елемент $(t, b_1^{-1}b_2)$ є інверсним до елемента $(s, a_1^{-1}a_2)$ в напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$, то $b_1 = a_2$ і $b_2 = a_1$. Тому

$$\begin{aligned}(s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) * (s, a_1^{-1}a_2) &= (s, a_1^{-1}a_2) * (t, a_2^{-1}a_1) * (s, a_1^{-1}a_2) = \\ &= (sts, a_1^{-1}a_2) = \\ &= (s, a_1^{-1}a_2)\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}(t, b_1^{-1}b_2) * (s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) &= (t, a_2^{-1}a_1) * (s, a_1^{-1}a_2) * (t, a_2^{-1}a_1) = \\ &= (tst, a_2^{-1}a_1) = \\ &= (t, a_2^{-1}a_1).\end{aligned}$$

З першої рівності випливає, що $s = sts$, а з другої випливає, що $t = tst$. Отжн, елемент t є інверсним до елемента s у напівгрупі S.

($\Leftarrow$) Нехай s – довільний елемент напівгрупи S і s^{-1} — інверсний елемент до s у напівгрупі S. Тоді

$$(s, a_1^{-1}a_2) * (s^{-1}, a_2^{-1}a_1) * (s, a_1^{-1}a_2) = (ss^{-1}s, a_1^{-1}a_2) = (s, a_1^{-1}a_2)$$

і

$$(s^{-1}, a_2^{-1}a_1) * (s, a_1^{-1}a_2) * (s^{-1}, a_2^{-1}a_1) = (s^{-1}ss^{-1}, a_1^{-1}a_2) = (s^{-1}, a_2^{-1}a_1).$$

□

З твердження 5 випливають такі два наслідки.

Наслідок 1. *Напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ – регулярна тоді і тільки тоді, коли напівгрупа S – регулярна.*

Наслідок 2. *Напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ – інверсна тоді і тільки тоді, коли напівгрупа S – інверсна.*

Лема 1. *Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)$ і $(t, b_1^{-1}b_2)$ – довільні ненульові елементи напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Якщо $(s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) = (r, c_1^{-1}c_2) \neq \mathbf{0}$, то $a_1 \in \operatorname{suff}(c_1)$ і $b_2 \in \operatorname{suff}(c_2)$.*

Доведення. Розглянемо можливі випадки, коли $(r, c_1^{-1}c_2) \neq \mathbf{0}$.

1. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_2 = ub_1$. Тоді

$$(s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) = (s, a_1^{-1}ub_1) * (t, b_1^{-1}b_2) = (s \cdot \theta^{|u|}(t), a_1^{-1}ub_2).$$

2. Існує слово $v \in \lambda^*$ таке, що $b_1 = va_2$. Тоді

$$(s, a_1^{-1}a_2) * (t, b_1^{-1}b_2) = (s, a_1^{-1}a_2) * (t, (va_2)^{-1}b_2) = (\theta^{|v|}(s) \cdot t, (va_1)^{-1}b_2).$$

Отже, $a_1 \in \operatorname{suff}(c_1)$ і $b_2 \in \operatorname{suff}(c_2)$. □

Теорема 1. *Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)$ і $(t, b_1^{-1}b_2)$ – довільні ненульові елементи напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Тоді:*

1) *$(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{L}(t, b_1^{-1}b_2)$ в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ тоді і тільки тоді, коли $s\mathscr{L}t$ в S і $a_2 = b_2$;*
2) *$(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{R}(t, b_1^{-1}b_2)$ в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ тоді і тільки тоді, коли $s\mathscr{R}t$ в S і $a_1 = b_1$;*
3) *$(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{H}(t, b_1^{-1}b_2)$ в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ тоді і тільки тоді, коли $s\mathscr{H}t$ в S і $a_1^{-1}a_2 = b_1^{-1}b_2$;*
4) *$(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{D}(t, b_1^{-1}b_2)$ в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ тоді і тільки тоді, коли $s\mathscr{D}t$ в S.*

Доведення. 1. ($\Rightarrow$) Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{L}(t, b_1^{-1}b_2)$ в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Тоді існують елементи $(r, c_1^{-1}c_2)$ і $(q, d_1^{-1}d_2)$ напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такі, що

$$(s, a_1^{-1}a_2) = (r, c_1^{-1}c_2) * (t, b_1^{-1}b_2) \qquad \text{і} \qquad (t, b_1^{-1}b_2) = (q, d_1^{-1}d_2) * (s, a_1^{-1}a_2).$$

З першої рівності та леми 1 випливає, що $b_2 \in \operatorname{suff}(a_2)$, а з другої рівності та леми 1 випливає, що $a_2 \in \operatorname{suff}(b_2)$. Тому $a_2 = b_2$, а це означає, що існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $a_1 = ud_2$ і $b_1 = vc_2$. Отже,

$$(s, a_1^{-1}a_2) = (r, c_1^{-1}c_2) * (t, b_1^{-1}b_2) = (\theta^{|v|}(r)t, (vc_1)^{-1}b_2)$$

і

$$(t, b_1^{-1}b_2) = (q, d_1^{-1}d_2) * (s, a_1^{-1}a_2) = (\theta^{|u|}(q)s, (ud_1)^{-1}a_2).$$

З першої рівності випливає, що $s = \theta^{|v|}(r)t$, а з другої рівності випливає, що $t = \theta^{|u|}(q)s$. Отже, $s\mathscr{L}t$ в напівгрупі S.

($\Leftarrow$) Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)$ і $(t, b_1^{-1}b_2)$ – ненульові елементи напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такі, що $s\mathscr{L}t$ в S і $a_2 = b_2$. Тоді існують елементи r і q напівгрупи S такі, що $s = rt$ і $t = qs$. Тому

$$(s, a_1^{-1}a_2) = (r, a_1^{-1}b_1) * (t, b_1^{-1}b_2) \qquad \text{і} \qquad (t, b_1^{-1}b_2) = (q, b_1^{-1}a_1) * (s, a_1^{-1}a_2).$$

Отже, $(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{L}(t, b_1^{-1}b_2)$ в напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$.

2. ($\Rightarrow$) Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{R}(t, b_1^{-1}b_2)$ в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Тоді існують елементи $(r, c_1^{-1}c_2)$ і $(q, d_1^{-1}d_2)$ напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такі, що

$$(s, a_1^{-1}a_2) = (t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2) \qquad \text{і} \qquad (t, b_1^{-1}b_2) = (s, a_1^{-1}a_2) * (q, d_1^{-1}d_2).$$

З першої рівності та леми 1 випливає, що $b_1 \in \operatorname{suff}(a_1)$, а з другої рівності та леми 1 випливає, що $a_1 \in \operatorname{suff}(b_1)$. Тому $a_1 = b_1$, а це означає, що існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $a_2 = ud_1$ і $b_2 = vc_1$. Отож, отримуємо, що

$$(s, a_1^{-1}a_2) = (t, b_1^{-1}b_2) * (r, c_1^{-1}c_2) = (t\theta^{|v|}(r), b_1^{-1}vc_2)$$

і

$$(t, b_1^{-1}b_2) = (s, a_1^{-1}a_2) * (q, d_1^{-1}d_2) = (s\theta^{|u|}(q), a_1^{-1}ud_2).$$

З першої рівності випливає, що $s = t\theta^{|v|}(r)$, а з другої рівності випливає, що $t = s\theta^{|u|}(q)$. Отже, $s\mathscr{R}t$ в напівгрупі S.

($\Leftarrow$) Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)$ і $(t, b_1^{-1}b_2)$ – ненульові елементи напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такі, що $s\mathscr{L}t$ в S і $a_1 = b_1$. Тоді існують елементи r і q напівгрупи S такі, що $s = tr$ і $t = sq$. Тому

$$(s, a_1^{-1}a_2) = (t, b_1^{-1}b_2) * (r, b_2^{-1}b_2) \qquad \text{і} \qquad (t, b_1^{-1}b_2) = (s, a_1^{-1}a_2) * (q, a_2^{-1}a_2).$$

Отже, $(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{R}(t, b_1^{-1}b_2)$ в напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$.

3. Випливає з тверджень 1 і 2.

4. ($\Rightarrow$) Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{D}(t, b_1^{-1}b_2)$ у напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Тоді існує елемент $(r, c_1^{-1}c_2) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такий, що $(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{L}(r, c_1^{-1}c_2)$ і $(r, c_1^{-1}c_2)\mathscr{L}(t, b_1^{-1}b_2)$. За твердженнями 1 і 2 отримаємо, що $s\mathscr{L}r$ і $r\mathscr{R}t$ в S, а отже, $s\mathscr{D}t$ у напівгрупі S.

($\Leftarrow$) Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)$ і $(t, b_1^{-1}b_2)$ – ненульові елементи напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такі, що $s\mathscr{D}t$ в S. Тоді існує елемент r напівгрупи S такий, що $s\mathscr{L}r$ і $r\mathscr{R}t$. Тому $(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{L}(r, b_1^{-1}a_2)$ і $(r, b_1^{-1}a_2)\mathscr{R}(t, b_1^{-1}b_2)$. Отже, $(s, a_1^{-1}a_2)\mathscr{D}(t, b_1^{-1}b_2)$ у напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. $\square$

З теореми 1 і наслідку 2 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3. *Напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ – комбінаторна тоді і тільки тоді, коли напівгрупа S – комбінаторна.*

Наслідок 4. *Напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ – 0-біпроста тоді і тільки тоді, коли напівгрупа S – біпроста.*

Твердження 6. *Напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ є 0-простою для довільної напівгрупи S.*

Доведення. Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)$ і $(t, b_1^{-1}b_2)$ – довільні ненульові елементи напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ і u – непорожнє слово вільного моноїда λ^*. Тоді

$$\begin{aligned}((\theta^{|u|}(t))^{-1}, a_1^{-1}ub_1) * (t, b_1^{-1}b_2) * (s, (ub_2)^{-1}a_2) =&\\ &= ((\theta^{|u|}(t))^{-1} \cdot \theta^{|u|}(t), a_1^{-1}ub_2) * (s, (ub_2)^{-1}a_2) =\\ &= (1_S, a_1^{-1}ub_2) * (s, (ub_2)^{-1}a_2) =\\ &= (s, a_1^{-1}a_2),\end{aligned}$$

звідки випливає, що напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ є 0-простою. □

Твердження 7. *Напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ — конгруенц-проста тоді і тільки тоді, коли S – тривіальна напівгрупа.*

Доведення. Якщо S – одноелементна множина, то напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ ізоморфна λ-поліциклічному моноїду P_λ. Оскільки λ-поліциклічний моноїд є конгруенц-простою напівгрупою (див. наприклад [4, теорема 2.5]), то у цьому випадку напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ є конгруенц-простою.

Нехай напівгрупа S не є одноелементною множиною. Тоді відношення

$$\mathfrak{C} = \left\{((x, a_1^{-1}a_2), (y, a_1^{-1}a_2)) \colon x, y \in S, a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda\right\} \cup \{(\mathbf{0}, \mathbf{0})\}$$

є нетривіальною конгруенцією на $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$, причому, очевидно, що фактор-напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)/\mathfrak{C}$ ізоморфна λ-поліциклічному моноїду P_λ. □

Твердження 8. *Інверсна напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ є 0-E-унітарною тоді і тільки тоді, коли напівгрупа S є інверсною E-унітарною та $\theta^{-1}(1_S) = E(S)$.*

Доведення. $(\Rightarrow)$ Якщо напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ – інверсна, то з наслідку 2 випливає, що напівгрупа S є також інверсною. Нехай s – елемент напівгрупи S і e – ідемпотенти напівгрупи S такі, що $es \in E(S)$. Тоді $(e, 1_{P_\lambda}) * (s, 1_{P_\lambda}) = (es, 1_{P_\lambda})$. Оскільки $(e, 1_{P_\lambda})$ і $(ex, 1_{P_\lambda})$ – ідемпотенти напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ та інверсна напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ є 0-E-унітарною, то $(x, 1_{P_\lambda}) \in E(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S))$, а отже, s є ідемпотентом напівгрупи S. Тому інверсна напівгрупа S є E-унітарною.

Нехай s – елемент напівгрупи S такий, що $\theta(s) = 1_S$ і a – слово в λ^* таке, що $|a| = 1$. Тоді

$$(1_S, a^{-1}a) * (s, 1_{P_\lambda}) = (\theta(s), a^{-1}a) = (1_S, a^{-1}a).$$

Оскільки $(1_S, a^{-1}a)$ – ідемпотент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ й інверсна напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ є 0-E-унітарною, то елемент $(s, a^{-1}a)$ міститься в $E(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S))$, а отже, s – ідемпотент напівгрупи S.

$(\Leftarrow)$ Нехай $(e, a^{-1}a)$ – ненульовий ідемпотент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ і $(s, b_1^{-1}b_2)$ – елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такі, що

$$(e, a^{-1}a) * (s, b_1^{-1}b_2) \in E(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)) \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Розглянемо можливі випадки.

1. Якщо існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $b_1 = ua$, то

$$(e, a^{-1}a) * (s, b_1^{-1}b_2) = (\theta^{|u|}(e) \cdot s, (ua)^{-1}b_2) = (s, b_1^{-1}b_2).$$

Оскільки $(s, b_1^{-1}b_2)$ є ідемпотентом напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$, то з твердження 2 випливає, що $b_1 = b_2$ і s є ідемпотентом напівгрупи S. Отже, $(s, b_1^{-1}b_2) \in E(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S))$.

2. Якщо існує слово $v \in \lambda^*$ таке, що $a = vb_1$, то

$$(e, a^{-1}a) * (s, b_1^{-1}b_2) = (e \cdot \theta^{|v|}(s), a^{-1}vb_2).$$

Оскільки $(e \cdot \theta^{|v|}(s), a^{-1}vb_2)$ є ідемпотентом напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$, то $vb_1 = a = vb_2$ і $\theta^{|v|}(s)$ є ідемпотентом напівгрупи S. Враховуючи попереднє і те, що $\theta^{-1}(1_S) = E(S)$ отримуємо, що $b_1 = b_2$ і $s \in E(S)$. Отже, $(s, b_1^{-1}b_2)$ є ідемпотентом напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$.

Тому інверсна напівгрупа $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ – 0-E-унітарна. □

Твердження 9. *Ненульовий елемент $(s, a_1^{-1}a_2)$ напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ належить центру $Z(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S))$ тоді і тільки тоді, коли $s \in Z(S)$, $s = \theta(s)$ і $a_1^{-1}a_2 = 1_{P_\lambda}$.*

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай $(s, a_1^{-1}a_2)$ – ненульовий елемент з центру напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Тоді

$$(s, a_1^{-1}a_2a_1) = (s, a_1^{-1}a_2) * (1_S, a_1) = (1_S, a_1) * (s, a_1^{-1}a_2) = (s, a_2)$$

і

$$(s, a_1^{-1}) = (s, a_1^{-1}a_2) * (1_S, a_2^{-1}) = (1_S, a_2^{-1}) * (s, a_1^{-1}a_2) = (s, (a_1a_2)^{-1}a_2).$$

З першої рівності випливає, що $a_1 = \varepsilon$, а з другої випливає, що $b = \varepsilon$. Тому $a_1^{-1}a_2 = 1_{P_\lambda}$.

Нехай $(s, 1_{P_\lambda})$ – ненульовий елемент з центру напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ і t – довільний елемент напівгрупи S. Тоді

$$(s \cdot t, 1_{P_\lambda}) = (s, 1_{P_\lambda}) * (t, 1_{P_\lambda}) = (t, 1_{P_\lambda}) * (s, 1_{P_\lambda}) = (t \cdot s, 1_{P_\lambda}).$$

Тому $s \cdot t = t \cdot s$, а отже, s належить центру напівгрупи S.

Нехай $(s, 1_{P_\lambda})$ – ненульовий елемент з центру напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ і a – слово з λ^* таке, що $|a| = 1$. Тоді

$$(s, a) = (s, 1_{P_\lambda}) * (1_S, a) = (1_S, a) * (s, 1_{P_\lambda}) = (\theta(s), a).$$

Звідси випливає, що $s = \theta(s)$.

$(\Leftarrow)$ Нехай $(t, a_1^{-1}a_2)$ – довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ і s – елемент з центру напівгрупи S такий, що $s = \theta(s)$. Тоді

$$\begin{aligned}(s, 1_{P_\lambda}) * (t, a_1^{-1}a_2) &= (\theta^{|a_1|}(s) \cdot t, a_1^{-1}a_2) = \\ &= (s \cdot t, a_1^{-1}a_2) = \\ &= (t \cdot s, a_1^{-1}a_2) = \\ &= (t \cdot \theta^{|a_2|}(s), a_1^{-1}a_2) = \\ &= (t, a_1^{-1}a_2) * (s, 1_{P_\lambda}).\end{aligned}$$

Тому $(s, 1_{P_\lambda})$ належить центру напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. □

Твердження 10. *Елемент $(s, a_1^{-1}a_2)$ з напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ належить групі одиниць $H(1_{\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)})$ тоді і тільки тоді, коли $s \in H(1_S)$ і $a_1^{-1}a_2 = 1_{P_\lambda}$.*

Доведення. ($\Rightarrow$) З леми 1 випливає таке: якщо елемент $(s, a_1^{-1}a_2)$ належить групі одиниць $H(1_{\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)})$ напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$, то $a_1^{-1}a_2 = 1_{P_\lambda}$.

Нехай елемент $(s, 1_{P_\lambda})$ належить групі одиниць $H(1_{\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)})$. Тоді існує елемент $(t, 1_{P_\lambda})$ групи одиниць напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такий, що

$$(st, 1_{P_\lambda}) = (s, 1_{P_\lambda}) * (t, 1_{P_\lambda}) = (t, 1_{P_\lambda}) * (s, 1_{P_\lambda}) = (ts, 1_{P_\lambda}) = (1_S, 1_{P_\lambda}).$$

Тому s є елементом групи одиниць напівгрупи S.

($\Leftarrow$) Нехай s – елемент групи одиниць напівгрупи S. Тоді

$$\begin{aligned}(s, 1_{P_\lambda}) * (s^{-1}, 1_{P_\lambda}) &= (s \cdot s^{-1}, 1_{P_\lambda}) = \\ &= (s^{-1} \cdot s, 1_{P_\lambda}) = \\ &= (s^{-1}, 1_{P_\lambda}) * (s, 1_{P_\lambda}) = \\ &= (1_S, 1_{P_\lambda}).\end{aligned}$$

Отже, $(s, 1_{P_\lambda})$ є елементом групи одиниць напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. □

Твердження 11. *Множини $\{x \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \colon a * x = b\}$ і $\{x \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \colon x * a = b\}$ – скінченні для будь-яких ненульових елементів $a, b \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ тоді і тільки тоді, коли множини $\{x \in S \colon sx = t\}$, $\{x \in S \colon xs = t\}$ і $\theta^{-1}(s)$ – скінченні для будь-яких $s, t \in S$.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Якщо множина $\{x \in S \colon sx = t\}$ – нескінченна для деяких $s, t \in S$, то множина $\{x \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \colon (s, 1_{P_\lambda}) * x = (t, 1_{P_\lambda})\}$ – нескінченна. Якщо ж множина $\{x \in S \colon xs = t\}$ – нескінченна для деяких $s, t \in S$, то множина

$$\{x \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \colon x * (s, 1_{P_\lambda}) = (t, 1_{P_\lambda})\}$$

– нескінченна. Отже, множини $\{x \in S \colon sx = t\}$ і $\{x \in S \colon xs = t\}$ – скінченні для будь-яких $s, t \in S$.

Припустимо, що множина $\theta^{-1}(t)$ – нескінченна для деякого елемента $t \in S$. Тоді множина

$$\{(x, 1_{P_\lambda}) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \colon (1_S, a) * (x, 1_{P_\lambda}) = (t, a)\}$$

є нескінченною для довільного слова $a \in \lambda^*$.

($\Leftarrow$) Нехай $(s, a_1^{-1}a_2), (t, b_1^{-1}b_2)$ – довільні елементи напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Доведемо, що множина

$$\big\{(x, y_1^{-1}y_2) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \colon (s, a_1^{-1}a_2) * (x, y_1^{-1}y_2) = (t, b_1^{-1}b_2)\big\}$$

є скінченною. З твердження 2.7 [4] випливає, що існує скінченна кількість елементів $y_1^{-1}y_2$ λ-поліциклічного моноїда P_λ таких, що $a_1^{-1}a_2 \cdot y_1^{-1}y_2 = b_1^{-1}b_2$. Нехай $c_1^{-1}c_2$ – один з цих елементів. Розглянемо можливі випадки.

1. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $b_1 = ua_2$. Тоді

$$(s, a_1^{-1}a_2) * (x, y_1^{-1}y_2) = (\theta^{|u|}(s)x, a_1^{-1}u^{-1}y_2) = (t, b_1^{-1}b_2).$$

Оскільки множини $\{x \in S \colon sx = t\}$ і $\{x \in S \colon xs = t\}$ – скінченні для будь-яких $s, t \in S$, то існує скінченна кількість елементів x напівгрупи S таких, що $\theta^{|u|}(s)x = t$.

2. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_2 = ub_1$. Тоді

$$(s, a_1^{-1}a_2) * (x, y_1^{-1}y_2) = (s\theta^{|u|}(x), a_1^{-1}uy_2) = (t, b_1^{-1}b_2).$$

Оскільки множини $\{x \in S\colon sx = t\}$, $\{x \in S\colon xs = t\}$ і $\theta^{-1}(s)$ – скінченні для будь-яких $s, t \in S$, то існує скінченна кількість елементів x напівгрупи S таких, що $s\theta^{|u|}(x) = t$.

Позаяк скінченне об'єднання скінченних множин є скінченною множиною, то множина

$$\left\{(x, y_1^{-1}y_2) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S)\colon (s, a_1^{-1}a_2) * (x, y_1^{-1}y_2) = (t, b_1^{-1}b_2)\right\}$$

скінченна. Аналогічно доводиться, що множина

$$\left\{(x, y_1^{-1}y_2) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S)\colon (x, y_1^{-1}y_2) * (s, a_1^{-1}a_2) = (t, b_1^{-1}b_2)\right\}$$

скінченна. □

З означення напівгрупової операції на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ і твердження 2.7 [4] випливає такий наслідок

Наслідок 5. *Для довільних $a, a_1, b, b_1 \in \lambda^*$, $s, t \in S$ кожна з множин*

$$A = \left\{(t, u^{-1}v) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S)\colon (s, a^{-1}b) * (t, u^{-1}v) \in S_{a_1^{-1}b_1}\right\},$$

чи

$$B = \left\{(t, u^{-1}v) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S)\colon (t, u^{-1}v) * (s, a^{-1}b) \in S_{a_1^{-1}b_1}\right\}$$

перетинає не більше, ніж скінченну кількість підмножин вигляду $S_{c^{-1}d}$ напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$.

Твердження 12. *Нехай S, T – довільні напівгрупи та $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ – конгруенції на напівгрупах S і T, відповідно. Якщо $f\colon S \to T$ – ізоморфізм такий, що $s\mathfrak{C}_1 t$ тоді і тільки тоді, коли $f(s)\mathfrak{C}_1 f(t)$ для довільних $s, t \in S$, то відображення $\overline{f}\colon S/\mathfrak{C}_1 \to T/\mathfrak{C}_2$, означене $\overline{f}([s]_{\mathfrak{C}_1}) = [f(s)]_{\mathfrak{C}_2}$, є ізоморфізмом.*

Доведення. Очевидно, що відображення $\overline{f}$ визначено коректно та є бієктивним. Доведемо, що $\overline{f}$ зберігає операцію. Нехай $[a]_{\mathfrak{C}_1}, [b]_{\mathfrak{C}_1} \in S/\mathfrak{C}_1$. Оскільки $\mathfrak{C}_1$ – конгруенція на напівгрупі S, то

$$\overline{f}([a]_{\mathfrak{C}_1} \cdot [b]_{\mathfrak{C}_1}) = \overline{f}([ab]_{\mathfrak{C}_1}) = [f(ab)]_{\mathfrak{C}_2} = [f(a) \cdot f(b)]_{\mathfrak{C}_2} = [f(a)]_{\mathfrak{C}_2} \cdot [f(b)]_{\mathfrak{C}_2},$$

звідки випливає наше твердження. □

Твердження 13. *Нехай S і T — моноїди та $\theta\colon S \to H_S(1_T)$ і $\phi\colon T \to H_T(1_T)$ — гомоморфізми. Якщо $f\colon \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \to \mathscr{P}_\lambda(\phi, T)$ – ізоморфізм, то напівгрупа S ізоморфна напівгрупі T та існує автоморфізм f_p поліциклічного моноїда P_λ такий, що $f(S_{a_1^{-1}a_2}) = T_{f_p(a_1^{-1}a_2)}$.*

Доведення. Оскільки

$$S_{1_{P_\lambda}} = \{a \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S)\colon a * b \neq \mathbf{0} \text{ і } a * b \neq \mathbf{0} \text{ для довільного } b \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S)\}$$

і

$$T_{1_{P_\lambda}} = \{a \in \mathscr{P}_\lambda(\phi, T)\colon a * b \neq \mathbf{0} \text{ і } a * b \neq \mathbf{0} \text{ для довільного } b \in \mathscr{P}_\lambda(\phi, T)\},$$

то $f(S_{1_{P_\lambda}}) = T_{1_{P_\lambda}}$. Отже, за твердженням 4 напівгрупа S ізоморфна напівгрупі T.

Визначимо конгруенцію $\mathfrak{C}_1$ на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ так: $(s, a_1^{-1}a_2)\mathfrak{C}_1(t, b_1^{-1}b_2)$, якщо $a_1^{-1}a_2 = b_1^{-1}b_2$ і $\mathbf{0}\mathfrak{C}_1\mathbf{0}$, та аналогічно: $(s, a_1^{-1}a_2)\mathfrak{C}_1(t, b_1^{-1}b_2)$, якщо $a_1^{-1}a_2 = b_1^{-1}b_2$

і $\mathbf{0}\mathfrak{C}_1\mathbf{0}$ – конгруенцію $\mathfrak{C}_2$ на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\phi,T)$. Доведемо, що $(s,a_1^{-1}a_2)\mathfrak{C}_1(t,b_1^{-1}b_2)$ тоді і тільки тоді, коли $f((s,a_1^{-1}a_2))\mathfrak{C}_2 f((t,b_1^{-1}b_2))$. Зафіксуємо $(s,a^{-1}),(s,a) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$. Тоді $(1_S,a)*(s,a^{-1})=(s,1_{P_\lambda})$ і $(s,a)*(1_S,a^{-1})=(s,1_{P_\lambda})$. Оскільки $f((s,1_{P_\lambda}))=(t,1_{P_\lambda})$ для деякого елемента $t\in T$, то $f((s,a^{-1}))=(r,b^{-1})$ і $f((s,a))=(q,b)$ для деяких $r,q\in T$ і $b\in\lambda^*$. Зауважимо, що слово b не залежить від вибору елемента s. Тому $f(s,a^{-1})\in S_{b^{-1}}$ і $f(s,a)\in S_b$ для довільного елемента $s\in S$.

Нехай $(s,a_1^{-1}a_2),(t,a_1^{-1}a_2)$ – довільні елементи напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$. З теореми 1 випливає, що $(s,a_1^{-1})\mathscr{R}(s,a_1^{-1})$, $(s,a_2)\mathscr{L}(s,a_1^{-1}a_2)$, $(t,a_1^{-1})\mathscr{R}(t,a_1^{-1}a_2)$ і $(t,a_2)\mathscr{L}(t,a_1^{-1}a_2)$ в $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$. З вище доведеного та того, що ізоморфізм зберігає $\mathscr{R}$- і $\mathscr{L}$-класи випливає, що $(s,a_1^{-1}a_2)\mathfrak{C}_1(t,b_1^{-1}b_2)$ тоді і тільки тоді, коли $f((s,a_1^{-1}a_2))\mathfrak{C}_2 f((t,b_1^{-1}b_2))$. Отже, за твердженням 12 ізоморфізм f породжує ізоморфізм $\overline{f}\colon \mathscr{P}_\lambda(\theta,S)/\mathfrak{C}_1\to\mathscr{P}_\lambda(\phi,T)/\mathfrak{C}_1$. Оскільки кожна з напівгруп $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)/\mathfrak{C}_1$ і $\mathscr{P}_\lambda(\phi,T)/\mathfrak{C}_1$ ізоморфна λ-поліциклічному моноїдові, то існує автоморфізм f_p поліциклічного моноїда P_λ такий, що $\overline{f}([(s,a_1^{-1}a_2)]_{\mathfrak{C}_1})=\left[(s,f_p(a_1^{-1}a_2))\right]_{\mathfrak{C}_2}$. □

Якщо $f\colon\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)\to\mathscr{P}_\lambda(\phi,T)$ – ізоморфізм, то через f_S^T позначимо ізоморфізм між напівгрупами S і T, який породжується ізоморфізмом $f|_{S_{1_{P_\lambda}}}$, що є звуженням ізоморфізму f на підмоноїд $S_{1_{P_\lambda}}$, який ізоморфний поліциклічному моноїдові P_λ.

З твердження 13 випливає такий наслідок:

Наслідок 6. *Нехай групи одиниць напівгруп S і T є тривіальними. Тоді напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ і $\mathscr{P}_\lambda(\phi,T)$ є ізоморфними тоді і тільки тоді, коли напівгрупа S ізоморфна напівгрупі T.*

Теорема 2. *Нехай групи одиниць напівгруп S і T є тривіальними. Якщо $f\colon\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)\to\mathscr{P}_\lambda(\phi,T)$ – ізоморфізм, то $f((s,a_1^{-1}a_2))=(f_S^T(s),f_p(a_1^{-1}a_2))$.*

Доведення. Нехай $f((1_S,a))=(s,b)$ і $f((1_S,a^{-1}))=(t,b^{-1})$. Тоді з рівностей

$$(1_S,a)*(1_S,a^{-1})=(1_S,1_{P_\lambda}) \qquad \text{і} \qquad (1_S,a^{-1})*(1_S,a)=(1_S,a^{-1}a)$$

і твердження 4 випливає, що $s,t\in H(1_T)$, а отже, $s=t=1_T$. Розглянемо рівність

$$(1_S,a_1)*(s,a_1^{-1}a_2)*(1_S,a_2^{-1})=(s,1_{P_\lambda}).$$

Оскільки $f((1_S,a_1))=(1_T,f_p(a_1))$, $f((1_S,a_2^{-1}))=(1_T,f_p(a_2^{-1}))$, $f((s,a_1^{-1}a_2))=(t,f_p(a_1^{-1}a_2))$ і $f((s,1_{P_\lambda}))=(f_S^T(s),1_{P_\lambda})$, то $t=f_S^T(s)$. □

3. Топологізація напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$

Твердження 14. *Якщо (S,τ_S) – гаусдорфова напівтопологічна напівгрупа та $\theta\colon S\to H(1_S)$ – неперервний гомоморфізм, то $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau_{\mathsf{st}})$ – гаусдорфова напівтопологічна напівгрупа, де τ_{st} – топологія породжена базою*

$$\mathcal{B}_{\mathsf{st}}=\{U_{a^{-1}b}\colon U\in\mathcal{B},\ a,b\in\lambda^*\}\cup\{\mathbf{0}\}$$

і $\mathcal{B}$ – база топології τ_S.

Доведення. Сім'я підмножин $\mathcal{B}_{\mathsf{st}}$ задовольняє умови (B1)–(B2) [11], а отже, вона є базою топології τ_{st} на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$. Очевидно, що $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau_{\mathsf{st}})$ – гаусдорфовий простір.

Доведемо, що $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau_{\mathbf{st}})$ – напівтопологічна напівгрупа. Нехай s,t – довільні елементи напівгрупи S. З нарізної неперервності операції на (S,τ_S) випливає, що для довільного відкритого околу $U(st)$ елемента st в (S,τ_S) існують відкриті околи $U_1(s),U_2(t)$ елементів s,t в (S,τ_S). відповідно, такі, що $U_1(s)\cdot t\subseteq U(st)$ і $s\cdot U_2(t)\subseteq U(st)$.

Нехай $(s,a_1^{-1}a_2),(t,b_1^{-1}b_2)$ – довільні елементи напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$. Розглянемо можливі випадки.

1. Якщо існує слово $u\in\lambda^*$ таке, що $b_1=ua_2$, то
$$(s,a_1^{-1}a_2)*(t,b_1^{-1}b_2)=(\theta^{|u|}(s)t,a_1^{-1}u^{-1}b_2).$$
Нехай $W_{a_1^{-1}u^{-1}b_2}$ — довільний відкритий окіл точки $(\theta^{|u|}(s)t,a_1^{-1}u^{-1}b_2)$ у топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau_{\mathbf{st}})$, де W – відкритий окіл точки $\theta^{|u|}(s)t$ в (S,τ_S). Тоді з нарізної неперервності напівгрупової операції в (S,τ_S) і з неперервності гомоморфізму θ випливає, що існують відкриті околи $V(s)$ і $V(t)$ точок s і t у просторі (S,τ_S), відповідно, такі, що $\theta^{|u|}(V(s))\cdot t\subseteq W$ і $\theta^{|u|}(s)\cdot V(t)\subseteq W$. Тоді
$$V(s)_{a_1^{-1}a_2}*(t,b_1^{-1}b_2)\subseteq W_{a_1^{-1}u^{-1}b_2}\qquad\text{і}\qquad (s,a_1^{-1}a_2)*V(t)_{b_1^{-1}b_2}\subseteq W_{a_1^{-1}u^{-1}b_2}.$$

2. Якщо існує слово $v\in\lambda^*$ таке, що $a_2=vb_1$, то
$$(s,a_1^{-1}a_2)*(t,b_1^{-1}b_2)=(s\theta^{|v|}(t),a_1^{-1}vb_2).$$
Нехай $W_{a_1^{-1}vb_2}$ — довільний відкритий окіл точки $(s\theta^{|v|}(t),a_1^{-1}vb_2)$ у топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau_{\mathbf{st}})$, де W – відкритий окіл точки $s\theta^{|v|}(t)$ в (S,τ_S). Тоді з нарізної неперервності напівгрупової операції в (S,τ_S) і з неперервності гомоморфізму θ випливає, що існують відкриті околи $V(s)$ і $V(t)$ точок s і t в (S,τ_S), відповідно, такі, що $V(s)\cdot\theta^{|v|}(t)\subseteq W$ і $s\cdot\theta^{|v|}(V(t))\subseteq W$. Тоді
$$V(s)_{a_1^{-1}a_2}*(t,b_1^{-1}b_2)\subseteq W_{a_1^{-1}vb_2}\qquad\text{і}\qquad (s,a_1^{-1}a_2)*V(t)_{b_1^{-1}b_2}\subseteq W_{a_1^{-1}vb_2}.$$

3. Якщо $(s,a_1^{-1}a_2)*(t,b_1^{-1}b_2)=\mathbf{0}$, то
$$V(s)_{a_1^{-1}a_2}*(t,b_1^{-1}b_2)=\{\mathbf{0}\}\qquad\text{і}\qquad (s,a_1^{-1}a_2)*V(t)b_1^{-1}b_2=\{\mathbf{0}\}$$
для довільних відкритих околів $V(s)$ і $V(t)$ точок s і t, відповідно, в (S,τ_S).

Також, маємо, що $V(s)_{a_1^{-1}a_2}*\{\mathbf{0}\}=\{\mathbf{0}\}$, $\{\mathbf{0}\}*V(s)_{a_1^{-1}a_2}=\{\mathbf{0}\}$ і $\{\mathbf{0}\}*\{\mathbf{0}\}=\{\mathbf{0}\}$ для довільного відкритого околу $V(s)$ точки s в (S,τ_S). $\square$

Зауваження 1. (i) Оскільки топологічний простір $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau_{\mathbf{st}})$ є топологічною сумою $\omega\cdot\lambda$ копій простору (S,τ_S) та ізольованої точки $\{\mathbf{0}\}$, то напівтопологічна напівгрупа $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau_{\mathbf{st}})$ успадковує усі властивості простору (S,τ_S), що зберігаються нескінченною топологічною сумою топологічних просторів. Зокрема, метрику d_S з S на $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ можна продовжити так:
$$d_{\mathbf{st}}((s,a_1^{-1}a_2),(t,b_1^{-1}b_2))=\begin{cases} d(s,t), & \text{якщо } a_1^{-1}a_2=b_1^{-1}b_2;\\ 1, & \text{в іншому випадку.}\end{cases}$$
Очевидно, що топологія, породжена метрикою $d_{\mathbf{st}}$ на $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$, збігається з топологією $\tau_{\mathbf{st}}$.

(ii) Твердження 14 виконується для топологічних і топологічних інверсних напівгруп.

Твердження 15. *Нехай $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ – напівтопологічна напівгрупа. Тоді для довільних слів $a_1,a_2,b_1,b_2,\in\lambda^*$ топологічні підпростори $S_{a_1^{-1}a_2}$ і $S_{b_1^{-1}b_2}$ є гомеоморфними, а $S_{a_1^{-1}a_1}$ та $S_{b_1^{-1}b_1}$ – топологічно ізоморфні піднапівгрупи в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$.*

Доведення. Означимо відображення $\phi_{a_1^{-1}a_2}^{b_1^{-1}b_2}\colon\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)\to\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ та $\phi_{b_1^{-1}b_2}^{a_1^{-1}a_2}\colon\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)\to\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ формулами

$$\phi_{a_1^{-1}a_2}^{b_1^{-1}b_2}(s)=(1_S,b_1^{-1}a_1)*s*(1_S,a_2^{-1}b_2)\qquad\text{і}\qquad\phi_{b_1^{-1}b_2}^{a_1^{-1}a_2}(s)=(1_S,a_1^{-1}b_1)*s*(1_S,b_2^{-1}a_2).$$

Відображення $\phi_{a_1^{-1}a_2}^{b_1^{-1}b_2}$ та $\phi_{b_1^{-1}b_2}^{a_1^{-1}a_2}$ є неперервними як композиції зсувів у напівтопологічній напівгрупі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$, а також виконуються рівності $\phi_{b_1^{-1}b_2}^{a_1^{-1}a_2}(\phi_{a_1^{-1}a_2}^{b_1^{-1}b_2}(s))=s$ і $\phi_{a_1^{-1}a_2}^{b_1^{-1}b_2}(\phi_{b_1^{-1}b_2}^{a_1^{-1}a_2}(t))=t$ для довільних $s\in S_{a_1^{-1}a_2}$ і $t\in S_{b_1^{-1}b_2}$, а отже, їх звуження $\phi_{a_1^{-1}a_2}^{b_1^{-1}b_2}|_{S_{a_1^{-1}a_2}}$ і $(\phi_{b_1^{-1}b_2}^{a_1^{-1}a_2})|_{S_{a_1^{-1}a_2}}$ є гомеоморфізмами підпросторів $S_{a_1^{-1}a_2}$ і $S_{b_1^{-1}b_2}$ в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$. У випадку піднапівгруп $S_{a_1^{-1}a_1}$ та $S_{b_1^{-1}b_1}$, очевидно, що відображення $\phi_{a_1^{-1}a_1}^{b_1^{-1}b_1}|_{S_{a_1^{-1}a_1}}$ є ізоморфізмом. □

Лема 2. *Нехай τ — гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$. Тоді:*

(*i*) *для довільної точки (s,ε) існує її відкритий окіл $V\subseteq S_\varepsilon$;*

(*ii*) *для довільного елемента $s\in S$ та довільного слова $w\in\lambda^*$ існує відкритий окіл V точки (s,w) такий, що $V\subseteq S_w$;*

(*iii*) *для довільного елемента $s\in S$ і довільного слова $w\in\lambda^*$ існує відкритий окіл V точки (s,w^{-1}) такий, що $V\subseteq S_{w^{-1}}$;*

(*iv*) *для довільного елемента $s\in S$ і довільних непорожніх слів $u,v\in\lambda^*$ існує відкритий окіл V точки $(s,u^{-1}v)$, що містить лише точки вигляду $(t,x^{-1}y)$, де x — суфікс слова u, а y — суфікс слова v.*

Доведення. (*i*) Зафіксуємо довільну літеру $x\in\lambda$. Тоді

$$(s,\varepsilon)*(1_s,x^{-1}x)=(\theta(s),x^{-1}x)\qquad\text{і}\qquad(1_s,x^{-1}x)*(s,\varepsilon)=(\theta(s),x^{-1}x).$$

Нехай W — відкритий окіл точки $(\theta(s),x^{-1}x)$, що не містить нуля $\mathbf{0}$. З нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ випливає, що існує відкритий окіл V точки (s,ε) такий, що $V*(1_s,x^{-1}x)\subseteq W$ і $(1_s,x^{-1}x)*V\subseteq W$. Оскільки $(1_s,x^{-1}x)$ — ідемпотент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$, то з гаусдорфовості простору $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ випливає, що

$$A_x=(1_s,x^{-1}x)*\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)\cup\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)*(1_s,x^{-1}x)$$

— замкнена підмножина в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$. Звідси випливає, що, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $V\subseteq\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)\setminus A_x$.

Зафіксуємо довільний елемент $(t,c^{-1}d)\in V$. Зауважимо, що

$$(t,c^{-1}d)=(t,c^{-1}d)*(1_S,d^{-1}d)\qquad\text{і}\qquad(t,c^{-1}d)=(1_S,c^{-1}c)*(t,c^{-1}d).$$

З напівгрупової операції (1) визначеної на $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ випливає, що $x\notin\operatorname{suff}(d)$ і $x\notin\operatorname{suff}(c)$. Отож, якщо $c\neq\varepsilon$ і $d\neq\varepsilon$, і врахувавши, що x — літера алфавіту λ, то отримуємо рівності

$$(1_S, d^{-1}d) * (1_S, x^{-1}x) = \mathbf{0} \qquad \text{і} \qquad (1_S, c^{-1}c) * (1_S, x^{-1}x) = \mathbf{0},$$

з яких випливає, що

$$(t, c^{-1}d) * (1_S, x^{-1}x) = (t, c^{-1}d) * (1_S, d^{-1}d) * (1_S, x^{-1}x) = (t, c^{-1}d) * \mathbf{0} = \mathbf{0} \in W$$

і

$$(1_S, x^{-1}x) * (t, c^{-1}d) = (1_S, x^{-1}x) * (1_S, c^{-1}c) * (t, c^{-1}d) = \mathbf{0} * (t, c^{-1}d) = \mathbf{0} \in W.$$

Отримали протиріччя. Отож $c = d = \varepsilon$, а отже, $V \subseteq S_\varepsilon$.

(ii) За твердженням (i) для точки (s, ε) існує її відкритий окіл $W \subseteq S_\varepsilon$. Оскільки $(s, w) * (1_S, w^{-1}) = (s, \varepsilon)$ для довільного слова $w \in \lambda^*$, то з нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ випливає, що існує відкритий окіл V точки (s, w) такий, що $V * (1_S, w^{-1}) \subseteq W$. Якщо $(t, c^{-1}d) \in V$, то з рівності

$$(t, c^{-1}d) * (1_S, w^{-1}) = \begin{cases} (t, c^{-1}d_1), & \text{якщо } w \in \mathrm{suff}^{\circ}(d) \text{ і } d = d_1 w; \\ (t, c^{-1}), & \text{якщо } d = w; \\ (\theta^{|w_1|}(t), c^{-1}w_1^{-1}), & \text{якщо } d \in \mathrm{suff}^{\circ}(w) \text{ і } w = w_1 d; \\ \mathbf{0}, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

та включення $W \subseteq S_\varepsilon$ отримуємо, що $c = d_1 = w_1 = \varepsilon$, а отже, $d = w$. Звідки випливає, що $V \subseteq S_w$.

Доведення твердження (iii) аналогічне до (ii).

(iv) Зафіксуємо довільний елемент $(s, u^{-1}v)$ напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Очевидно, що виконуються рівності

$$(s, u^{-1}v) * (1_S, v^{-1}) = (s, u^{-1}) \qquad \text{і} \qquad (1_S, u) * (s, u^{-1}v) = (s, v).$$

З тверджень (ii) і (iii) випливає, що існують відкриті околи $W_{(s,u^{-1})}$ і $W_{(s,v)}$ точок (s, u^{-1}) і (s, v) в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$, відповідно, такі, що $W_{(s,u^{-1})} \subseteq S_{u^{-1}}$ і $W_{(s,v)} \subseteq S_v$. З нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ випливає, що існує відкритий окіл $V_{(s,u^{-1}v)}$ точки $(s, u^{-1}v)$ такий, що

$$V_{(s,u^{-1}v)} * (1_S, v^{-1}) \subseteq W_{(s,u^{-1})} \qquad \text{і} \qquad (1_S, u) * V_{(s,u^{-1}v)} \subseteq W_{(s,v)}.$$

Зафіксуємо довільну точку $(t, x^{-1}y) \in V_{(s,u^{-1}v)}$. Тоді

$$(t, x^{-1}y) * (1_S, v^{-1}) = (t_1, u^{-1}) \qquad \text{і} \qquad (1_S, u) * (t, x^{-1}y) = (t_2, v),$$

для деяких $t_1, t_2 \in S$. З кожної з цих рівностей випливає, що x є суфіксом слова u, а y є суфіксом слова v. $\square$

Для довільних слів $u, v \in \lambda^*$ позначимо

$$\mathscr{P}_\lambda^{[u^{-1}v]}(\theta, S) = \left\{(s, u^{-1}a^{-1}bv) \in \mathscr{P}_\lambda(\theta, S) \colon s \in S,\ a, b \in \lambda^*\right\}.$$

Лема 3. *Нехай τ — гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$. Тоді для довільних слів $u, v \in \lambda^*$ підпростір $\mathscr{P}_\lambda^{[u^{-1}v]}(\theta, S)$ в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ гомеоморфний простору $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$.*

Доведення. З нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ випливає, що відображення

$$f\colon \mathscr{P}_\lambda(\theta,S)\to \mathscr{P}_\lambda^{[u^{-1}v]}(\theta,S),\ x\mapsto (1_S,u^{-1})*x*(1_S,v)$$

і

$$h\colon \mathscr{P}_\lambda^{[u^{-1}v]}(\theta,S)\to \mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\ x\mapsto (1_S,u)*x*(1_S,v^{-1})$$

є неперервними. Очевидно, що $f\circ h$ і $h\circ f$ — тотожні відображення множин $\mathscr{P}_\lambda^{[u^{-1}v]}(\theta,S)$ і $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$, відповідно, звідки випливає твердження леми. □

З лем 2 і 3 випливає наслідок 7.

Наслідок 7. *Нехай $u,v\in\lambda^*$ і τ — гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$. Тоді:*

- (i) *для довільної точки $(s,u^{-1}v)$ існує її відкритий окіл $V\cap\mathscr{P}_\lambda^{[u^{-1}v]}(\theta,S)\subseteq S_{u^{-1}v}$;*
- (ii) *для довільного елемента $s\in S$ та довільного слова $w\in\lambda^*$ існує відкритий окіл V точки $(s,u^{-1}wv)$ такий, що $V\cap\mathscr{P}_\lambda^{[u^{-1}v]}(\theta,S)\subseteq S_{u^{-1}wv}$;*
- (iii) *для довільного елемента $s\in S$ та довільного слова $w\in\lambda^*$ існує відкритий окіл V точки $(s,u^{-1}w^{-1}v)$ такий, що $V\cap\mathscr{P}_\lambda^{[u^{-1}v]}(\theta,S)\subseteq S_{u^{-1}w^{-1}v}$.*

Лема 4. *Нехай τ — гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ така, що $S_{u^{-1}v}$ — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ для деяких непорожніх слів $u,v\in\lambda^*$. Тоді $S_{u^{-1}}$ і S_v — замкнені підмножини в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$.*

Доведення. Очевидно, що для довільного елемента $s\in S$ виконується рівність

$$(s,u^{-1})*(1_S,v)=(s,u^{-1}v).$$

Нехай $(t,x^{-1}y)$ — довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ такий, що

$$(t,x^{-1}y)*(1_S,v)\in S_{u^{-1}v}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}(t,x^{-1}y)*(1_S,v)&=(t\cdot\theta^{|y|}(1_S),x^{-1}yv)=\\&=(t\cdot 1_S,x^{-1}yv)=\\&=(t,x^{-1}yv),\end{aligned}$$

а отже, $y=\varepsilon$ і $x=u$. Отож повним прообразом множини $S_{u^{-1}v}$ стосовно правого зсуву на елемент $(1_S,v)$ є множина $S_{u^{-1}}$. Оскільки зсуви в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ неперервні відображення, то за теоремою 1.4.1 з [11], $S_{u^{-1}}$ — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$.

Аналогічно, для довільного елемента $s\in S$ виконується рівність

$$(1_S,u^{-1})*(s,v)=(s,u^{-1}v).$$

Якщо $(t,x^{-1}y)$ — довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ такий, що

$$(1_S,u^{-1})*(t,x^{-1}y)\in S_{u^{-1}v},$$

то

$$\begin{aligned}(1_S, u^{-1}) * (t, x^{-1}y) &= (\theta^{|x|}(1_S) \cdot t, u^{-1}x^{-1}y) = \\ &= (1_S \cdot t, u^{-1}x^{-1}y) = \\ &= (t, u^{-1}x^{-1}y),\end{aligned}$$

а отже, $y = v$ і $x = \varepsilon$. Звідси випливає, що повним прообразом множини $S_{u^{-1}v}$ стосовно лівого зсуву на елемент $(1_S, u^{-1})$ є множина S_v. Далі знову з теореми 1.4.1 [11] випливає, що S_v — замкнена підмножина в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$. □

Лема 5. *Нехай τ — гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ така, що $S_{u^{-1}}$ — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ для деякого непорожнього слова $u \in \lambda^*$. Тоді S_ε — замкнена підмножина в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$.*

Доведення. Очевидно, що для довільного елемента $s \in S$ виконується рівність

$$(1_S, u^{-1}) * (s, \varepsilon) = (s, u^{-1}).$$

Нехай $(t, x^{-1}y)$ — довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такий, що

$$(1_S, u^{-1}) * (t, x^{-1}y) \in S_{u^{-1}}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}(1_S, u^{-1}) * (t, x^{-1}y) &= (\theta^{|x|}(1_S) \cdot t, u^{-1}x^{-1}y) = \\ &= (1_S \cdot t, u^{-1}x^{-1}y) = \\ &= (t, u^{-1}x^{-1}y),\end{aligned}$$

а отже, $x = y = \varepsilon$. Звідси випливає, що повним прообразом множини $S_{u^{-1}}$ стосовно лівого зсуву на елемент $(1_S, u^{-1})$ є множина S_ε. Оскільки зсуви в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ неперервні відображення, то за теоремою 1.4.1 з [11], S_ε — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$. □

Лема 6. *Нехай τ — гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ така, що S_v — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ для деякого непорожнього слова $v \in \lambda^*$. Тоді S_ε — замкнена підмножина в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$.*

Доведення. З означення напівгрупової операції в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ випливає, що для довільного елемента $s \in S$ виконується рівність

$$(s, \varepsilon) * (1_S, v) = (s, v).$$

Нехай $(t, x^{-1}y)$ — довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такий, що

$$(t, x^{-1}y) * (1_S, v) \in S_v.$$

Тоді

$$\begin{aligned}(t, x^{-1}y) * (1_S, v) &= (t \cdot \theta^{|y|}(1_S), x^{-1}yv) = \\ &= (t \cdot 1_S, x^{-1}yv) = \\ &= (t, x^{-1}yv),\end{aligned}$$

а отже, $x = y = \varepsilon$. Отож повним прообразом множини S_v стосовно правого зсуву на елемент $(1_S, v)$ є множина S_ε. Оскільки зсуви в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ є неперервними, то за теоремою 1.4.1 з [11], S_ε — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$. □

Теорема 3. *Нехай τ — гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на напівгрупі $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ така, що S_ε — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$. Тоді $S_{u^{-1}v}$ — замкнена підмножина в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ для довільних слів $u, v \in \lambda^*$.*

Доведення. Теорему доведемо індукцією по довжині слів $u, v \in \lambda^*$.

Спочатку доведемо, що $S_{u^{-1}v}$ — замкнена підмножина в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ для довільних слів $u, v \in \lambda^*$, довжини яких не перевищують 1.

Нехай a — довільна літера алфавіту λ. З означення напівгрупової операції в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ випливає, що для довільного елемента $s \in S$ виконується рівність

$$(s, a) * (1_S, a^{-1}) = (s \cdot 1_S, \varepsilon) = (s, \varepsilon).$$

Нехай $(t, x^{-1}y)$ — довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такий, що $(t, x^{-1}y) * (1_S, a^{-1}) \in S_\varepsilon$. Тоді

$$(t, x^{-1}y) * (1_S, a^{-1}) = \begin{cases} (\theta(t)), x^{-1}a^{-1}), & \text{якщо } y = \varepsilon; & (1_1) \\ (t, x^{-1}), & \text{якщо } y = a; & (1_2) \\ (t, x^{-1}y_1), & \text{якщо } y = y_1 a \text{ та } y_1 \neq \varepsilon; & (1_3) \\ \mathbf{0}, & \text{в інших випадках.} & (1_4) \end{cases}$$

Очевидно, що випадки (1_1), (1_3) та (1_4) неможливі, а отже, виконується випадок (1_2). Отож отримаємо, що $x = \varepsilon$ і $y = a$. Звідси випливає, що повним прообразом множини S_ε стосовно правого зсуву на елемент $(1_S, a^{-1})$ є множина S_a. Оскільки зсуви в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ є неперервними, то за теоремою 1.4.1 з [11], S_a — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$.

Далі, для довільної літери b алфавіту λ, з означення напівгрупової операції в $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ випливає, що для довільного елемента $s \in S$ виконується рівність

$$(1_S, b) * (s, b^{-1}) = (1_S \cdot s, \varepsilon) = (s, \varepsilon).$$

Нехай $(t, x^{-1}y)$ — довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такий, що

$$(1_S, b) * (t, x^{-1}y) \in S_\varepsilon.$$

Тоді

$$(1_S, b) * (t, x^{-1}y) = \begin{cases} (\theta(t)), by), & \text{якщо } x = \varepsilon; & (2_1) \\ (t, y), & \text{якщо } x = b; & (2_2) \\ (t, x_1^{-1}y), & \text{якщо } x = x_1 b \text{ та } x_1 \neq \varepsilon; & (2_3) \\ \mathbf{0}, & \text{в інших випадках.} & (2_4) \end{cases}$$

Очевидно, що випадки (2_1), (2_3) та (2_4) неможливі, а отже, виконується випадок (2_2). Отож маємо, що $x = b$ і $y = \varepsilon$. Звідси випливає, що повним прообразом множини S_ε стосовно лівого зсуву на елемент $(1_S, b)$ є множина $S_{b^{-1}}$. Оскільки зсуви в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ є неперервними, то за теоремою 1.4.1 з [11], $S_{b^{-1}}$ — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$.

Нехай a та b — довільні літери алфавіту λ. З означення напівгрупової операції в $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ випливає, що для довільного елемента $s\in S$ виконується рівність

$$(1_S,b)*(s,b^{-1}a)=(s,a).$$

Нехай $(t,x^{-1}y)$ — довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ такий, що

$$(1_S,b)*(t,x^{-1}y)\in S_a.$$

Розглянемо два випадки $a=b$ й $a\neq b$. Припустимо, що $a=b$. Тоді

$$(1_S,a)*(t,x^{-1}y)=\begin{cases} (\theta(t)),ay), & \text{якщо } x=\varepsilon; & (3_1)\\ (t,y), & \text{якщо } x=a; & (3_2)\\ (t,x_1^{-1}y), & \text{якщо } x=x_1a \text{ та } x_1\neq\varepsilon; & (3_3)\\ \mathbf{0}, & \text{в інших випадках.} & (3_4)\end{cases}$$

Очевидно, що випадки (3_3) та (3_4) неможливі, а отже, виконуються випадки (3_1) та (3_2). У випадку (3_1) матимемо, що $x=y=\varepsilon$ та у випадку (3_2) маємо, що $x=y=a$. Звідси випливає, що повним прообразом множини S_a стосовно лівого зсуву на елемент $(1_S,a)$ є множина $S_{a^{-1}a}\cup S_\varepsilon$. З неперервності зсувів у $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ та теореми 1.4.1 [11] випливає, що $S_{a^{-1}a}\cup S_\varepsilon$ — замкнена підмножина в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$. За лемою 2($i$), S_ε — відкрита підмножина в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$, а отже, $S_{a^{-1}a}$ — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$.

Припустимо, що $a\neq b$. Тоді

$$(1_S,b)*(t,x^{-1}y)=\begin{cases} (\theta(t)),by), & \text{якщо } x=\varepsilon; & (4_1)\\ (t,y), & \text{якщо } x=b; & (4_2)\\ (t,x_1^{-1}y), & \text{якщо } x=x_1b \text{ та } x_1\neq\varepsilon; & (4_3)\\ \mathbf{0}, & \text{в інших випадках.} & (4_4)\end{cases}$$

Очевидно, що випадки (4_1), (4_3) та (4_4) неможливі, а отже, виконується випадок (4_2). Отож маємо, що $x=b$ і $y=a$. Звідси випливає, що повним прообразом множини S_a стосовно лівого зсуву на елемент $(1_S,b)$ є множина $S_{b^{-1}a}$. Оскільки зсуви в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ є неперервними відображеннями, то за теоремою 1.4.1 з [11], $S_{b^{-1}a}$ — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$.

Тепер доведемо крок індукції: з того, що $S_{u^{-1}v}$ — замкнена підмножина в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ для довільних слів $u,v\in\lambda^*$ довжини $<k$ випливає, що $S_{w^{-1}z}$ — замкнена підмножина в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ для довільних слів $w,z\in\lambda^*$ довжини $\leqslant k$.

Нехай $u\in\lambda^*$ — слово довжини k і $v\in\lambda^*$ — слово довжини $<k$. Нехай $b\in\lambda$ — остання літера слова u, тобто $u=u_1b$ для деякого слова $u_1\in\lambda^*$ довжини $k-1$. Тоді

$$(1_S,b)*(s,u^{-1}v)=(1_S,b)*(s,b^{-1}u_1^{-1}v)=(s,u_1^{-1}v).$$

Нехай $(t,x^{-1}y)$ — довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ такий, що

$$(1_S,b)*(t,x^{-1}y)\in S_{u_1^{-1}v}.$$

Тоді

$$(1_S,b)*(t,x^{-1}y)=\begin{cases} (\theta(t)),by), & \text{якщо } x=\varepsilon; & (5_1)\\ (t,y), & \text{якщо } x=b; & (5_2)\\ (t,x_1^{-1}y), & \text{якщо } x=x_1b \text{ та } x_1\neq\varepsilon; & (5_3)\\ \mathbf{0}, & \text{в інших випадках.} & (5_4)\end{cases}$$

Оскільки слово $u_1 \in \lambda^*$ має довжину $k-1$, то випадки (5_1), (5_2) і (5_4) неможливі, а отже, виконується випадок (5_3). Отож маємо, що $x = u_1 b$ і $y = v$. Звідси випливає, що повним прообразом множини $S_{u_1^{-1}v}$ стосовно лівого зсуву на елемент $(1_S, b)$ є множина $S_{u^{-1}v}$. Оскільки зсуви в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ є неперервними відображеннями, то за теоремою 1.4.1 з [11], $S_{u^{-1}v}$ — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$.

Нехай $u \in \lambda^*$ — слово довжини $\leqslant k$ і $v \in \lambda^*$ — слово довжини k. Нехай $a \in \lambda$ — остання літера слова v, тобто $v = v_1 a$ для деякого слова $v_1 \in \lambda^*$ довжини $k-1$. Тоді

$$\begin{aligned}(s, u^{-1}v) * (1_S, a^{-1}) &= (s, u^{-1}v_1 a) * (1_S, a^{-1}) = \\ &= (s \cdot 1_S, u^{-1}v_1) = \\ &= (s, u^{-1}v_1).\end{aligned}$$

Нехай $(t, x^{-1}y)$ — довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta, S)$ такий, що

$$(t, x^{-1}y) * (1_S, a^{-1}) \in S_{u^{-1}v_1}.$$

Тоді

$$(t, x^{-1}y) * (1_S, a^{-1}) = \begin{cases} (\theta(t)), x^{-1}a^{-1}), & \text{якщо } y = \varepsilon; & (6_1) \\ (t, x^{-1}), & \text{якщо } y = a; & (6_2) \\ (t, x^{-1}y_1), & \text{якщо } y = y_1 a \text{ та } y_1 \neq \varepsilon; & (6_3) \\ \mathbf{0}, & \text{в інших випадках.} & (6_4) \end{cases}$$

Оскільки слово $v_1 \in \lambda^*$ має довжину $k-1$, то випадки (6_1), (6_2) та (6_4) неможливі, а отже, виконується випадок (6_3). Отож маємо, що $x = u$ і $y = v_1 a$. Звідси випливає, що повним прообразом множини $S_{u^{-1}v_1}$ стосовно правого зсуву на елемент $(1_S, a^{-1})$ є множина $S_{u^{-1}v}$. Оскільки зсуви в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ є неперервними відображеннями, то за теоремою 1.4.1 з [11], $S_{u^{-1}v}$ — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$. Це завершує доведення кроку індукції, а отже, виконується твердження теореми. □

Нехай (S, τ_S) — напівтопологічний моноїд і $\theta\colon S \to H_S(1)$ — неперервний гомоморфізм з S у його групу одиниць $H_S(1)$. Будемо говорити, що напівтопологічний моноїд $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau_{\mathscr{P}_\lambda})$ є *топологічним λ-поліциклічним розширенням Брука-Рейлі* моноїда (S, τ_S) із визначеним гомоморфізмом θ в класі напівтопологічних напівгруп $\mathfrak{STS}$, якщо відображення $\Upsilon\colon (S, \tau_S) \to (\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau_{\mathscr{P}_\lambda})$, означене за формулою $\Upsilon\colon s \mapsto (s, \varepsilon)$, є тополого-алгебричним вкладенням і $(S, \tau_S), (\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau_{\mathscr{P}_\lambda}) \in \mathfrak{STS}$. Якщо напівтопологічна напівгрупа (S, τ_S) не містить одиниці, то приєднавши одиницю 1_S до (S, τ_S) як ізольовану точку та означивши гомоморфізм $\theta\colon S \to H_S(1), s \mapsto 1$, ми аналогічно, як і в [1], отримуємо *топологічне λ-поліциклічне розширенням Брука* моноїда (S, τ_S). Зауважимо, що з твердження 15 випливає, що топологічний ізоморфізм вкладення $\Upsilon\colon (S, \tau_S) \to (\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau_{\mathscr{P}_\lambda})$ можна визначати й за формулою $\Upsilon\colon s \mapsto (s, w^{-1}w)$, де w — довільне слово вільного моноїда λ^*.

З твердження 14 випливає, що для довільної напівтопологічної напівгрупи (S, τ_S) існує топологічне λ-поліциклічне розширення Брука-Рейлі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ напівгрупи (S, τ_S) із визначеним гомоморфізмом θ в класі напівтопологічних напівгруп таке, що для довільних слів u та v вільного моноїда λ^* підмножина $S_{u^{-1}v}$ відкрито-замкнена в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta, S), \tau)$ і нуль $\mathbf{0}$ є ізольованою точкою цього простору. Тому природно виникає таке запитання: *за яких умов на напівтопологічну напівгрупу (S,τ_S) усі топологічні λ-поліциклічні розширення Брука-Рейлі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ напівгрупи (S,τ_S) мають одну, чи обидві з цих вище перелічених властивостей?*

На завершенні ми даємо часткову відповідь на запитання: за яких умов підмножина $S_{u^{-1}v}$ відкрито-замкнена в довільному топологічному λ-розширенні Брука-Рейлі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ напівтопологічної напівгрупи (S,τ_S)?

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *компактним*, якщо кожне відкрите покриття простору X містить скінченне підпокриття.

Напівтопологічна напівгрупа S називається H-замкненою в класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп $\mathfrak{STS}$, якщо $S\in\mathfrak{STS}$ і кожна напівтопологічна напівгрупа $T\in\mathfrak{STS}$, що містить напівгрупу S, містить напівгрупу S як замкнений підпростір [13].

Теорема 4. *Нехай (S,τ_S) — гаусдорфовий напівтопологічний моноїд, $\theta\colon S\to H_S(1)$ — неперервний гомоморфізм і $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ — топологічне λ-поліциклічне розширення Брука-Рейлі напівгрупи (S,τ_S) в класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп. Якщо (S,τ_S) містить лівий (правий, двобічний) ідеал, який є H-замкненою напівгрупою в класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп, то для довільних слів u та v вільного моноїда λ^* підмножина $S_{u^{-1}v}$ відкрито-замкнена в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$.*

Доведення. За теоремою 3 нам достатньо довести, що S_ε — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$, оскільки в цьому випадку з леми 2 випливає, що всі множини вигляду $S_{u^{-1}v}$ відкриті в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$.

Припустимо, що напівгрупа (S,τ_S) містить лівий ідеал I, що є H-замкненою напівгрупою в класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп. Тоді

$$I_\varepsilon=\{(s,\varepsilon)\colon s\in I\}$$

є замкненою піднапівгрупою в напівтопологічній напівгрупі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$. Зафіксуємо довільний елемент $(s_0,\varepsilon)\in I_\varepsilon$. Очевидно, що $(t,\varepsilon)*(s_0,\varepsilon)\in I_\varepsilon$ для довільного елемента $t\in S$. Нехай $(t,x^{-1}y)$ — довільний елемент напівгрупи $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$ такий, що $(t,x^{-1}y)*(s_0,\varepsilon)\in S_\varepsilon$. Тоді

$$(t,x^{-1}y)*(s_0,\varepsilon)=\begin{cases}(ts_0,\varepsilon), & \text{якщо } x=y=\varepsilon; & (7_1)\\ (ts_0,x^{-1}), & \text{якщо } x\neq\varepsilon \text{ і } y=\varepsilon; & (7_2)\\ (t\theta^{|y|}(s),x^{-1}y), & \text{якщо } x\neq\varepsilon \text{ і } y\neq\varepsilon. & (7_3)\end{cases}$$

Очевидно, що випадки (7_2) та (7_3) неможливі, а отже, виконується випадок (7_1). Отож маємо, що $x=y=\varepsilon$. Звідси випливає, що повним прообразом множини I_ε стосовно лівого зсуву на елемент (s_0,ε) є множина S_ε. Оскільки зсуви в $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ є неперервними відображеннями, то за теоремою 1.4.1 з [11], S_ε — замкнена підмножина в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$. Далі скористаємося теоремою 3.

Доведення у випадку правого, чи двобічного ідеалу, аналогічне. □

З теореми 4 випливає наслідок 8.

Наслідок 8. *Нехай (S,τ_S) — гаусдорфовий напівтопологічний моноїд, $\theta\colon S\to H_S(1)$ — неперервний гомоморфізм і $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ — топологічне λ-поліциклічне* *розширення Брука-Рейлі напівгрупи (S,τ_S) в класі гаусдорфових напівтопологічних напівгруп. Якщо (S,τ_S) містить компактний лівий (правий, двобічний) ідеал, то для довільних слів u та v вільного моноїда λ^* підмножина $S_{u^{-1}v}$ відкрито-замкнена в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$.*

Теорема 5. *Нехай (S,τ_S) — гаусдорфовий топологічний інверсний моноїд, $\theta\colon S\to H_S(1)$ — неперервний гомоморфізм і $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$ — топологічне λ-поліциклічне розширення Брука-Рейлі напівгрупи (S,τ_S) в класі гаусдорфових топологічних інверсних напівгруп. Якщо напівгрупа S містить мінімальний ідемпотент, то для довільних слів u та v вільного моноїда λ^* підмножина $S_{u^{-1}v}$ відкрито-замкнена в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$.*

Доведення. Оскільки в топологічній інверсній напівгрупі S інверсія та напівгрупова операція неперервні, то кожна максимальна підгрупа в S, а отже, і кожен $\mathscr{H}$-клас, є замкненою підмножиною в S [10]. Звідси випливає, якщо e_0 — мінімальний ідемпотент напівгрупи S, то максимальна підгрупа $H(e_0,\varepsilon)$ в $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$, що містить ідемпотент (e_0,ε), є замкненою підмножиною в топологічному просторі $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),\tau)$. Далі доведення аналогічне до теореми 4. □

Зауваження 2. Напівгрупа Брука–Рейлі $\mathscr{B}(S,\theta)$ над моноїдом S (див. [20, підрозділ II.5]) є, очевидно, піднапівгрупою в $\mathscr{P}_\lambda(\theta,S)$. Зауважимо, що з теорем 3 і 4 випливають основні результати, отримані в працях [1, 2, 15] для топологічних розширень Брука–Рейлі топологічних і напівтопологічних напівгруп.

Подяка

Автори висловлюють щиру подяку рецензентові за цінні поради.

Список використаної літератури

1. О. В. Гутик, *Вложение топологических полугрупп*, Мат. Студії **3** (1994), 10–14.
2. О. В. Гутік, *Про ослаблення топології прямої суми на напівгрупі Брака*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **47** (1997), 17–21.
3. O. Andersen, *Ein Bericht uber die Struktur abstrakter Halbgruppen*, PhD Thesis. Hamburg, 1952.
4. S. Bardyla and O. Gutik, *On a semitopological polycyclic monoid*, Algebra Discr. Math. **21** (2016), no. 2, 163–183.
5. R. J. Bruck, *A survey of binary systems*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, VII, Ergebn. Math. **20** (1958), 185S.
6. J. H. Carruth, J. A. Hildebrant, and R. J. Koch, *The theory of topological semigroups*, Vol. I, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1983.
7. J. H. Carruth, J. A. Hildebrant, and R. J. Koch, *The theory of topological semigroups*, Vol. II, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1986.
8. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. I, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1961.
9. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. II, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1967.
10. C. Eberhart and J. Selden, *On the closure of the bicyclic semigroup*, Trans. Amer. Math. Soc. **144** (1969), 115–126. DOI: 10.1090/S0002-9947-1969-0252547-6
11. R. Engelking, *General topology*, 2nd ed., Heldermann, Berlin, 1989.

12. J. A. Green, *On the structure of semigroups*, Ann. Math. Ser. 2 **54** (1951), no. 1, 163–172. DOI: 10.2307/1969317
13. O. Gutik, *On closures in semitopological inverse semigroups with continuous inversion*, Algebra Discrete Math. **18** (2014), no. 1, 59–85.
14. O. Gutik, *On locally compact semitopological* 0*-bisimple inverse* ω*-semigroups*, Topol. Algebra Appl. **6** (2018), 77–101. DOI: 10.1515/taa-2018-0008
15. O. V. Gutik and K. P. Pavlyk, *Bruck-Reilly extension of a semitopological semigroups*, Прикладні проблеми механіки і математики **7** (2009), 66–72.
16. P. Khylynskyi and O. Gutik, On Bruck-Reilly λ-extensions of semigroups, The XII International Algebraic Conference in Ukraine, July 02–06, 2019, Vinnytsia, Ukraine. Abstracts. Vinnytsia, 2019, P. 51.
17. M. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, Singapore: World Scientific, 1998.
18. M. V. Lawson, *The structure of 0-E-unitary inverse semigroups I: the monoid case*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **42** (1999), no. 3, 497–520. DOI: 10.1017/S0013091500020484
19. M. Nivat and J.-F. Perrot, *Une generalisation du monoide bicyclique*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A **271** (1970), 824–827.
20. M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
21. N. R. Reilly, *Bisimple* ω*-semigroups*, Proc. Glasgow Math. Assoc. **7** (1966), no. 3, 160–169. DOI: 10.1017/S2040618500035346
22. W. Ruppert, *Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory*, Lect. Notes Math., **1079**, Springer, Berlin, 1984. DOI: 10.1007/BFb0073675
23. T. Saitô, *Proper ordered inverse semigroups*, Pac. J. Math. **15** (1965), no. 2, 649–666. DOI: 10.2140/pjm.1965.15.649
24. A. A. Selden, *Bisimple* ω*-semigroups in the locally compact setting*, Bogazici Univ. J. Sci. Math. **3** (1975), 15–77.
25. A. A. Selden, *On the closure of bisimple* ω*-semigroup*, Semigroup Forum **12** (1976), no. 3, 373–379. DOI: 10.1007/BF02195943
26. A. A. Selden, *The kernel of the determining endomorphism of a bisimple* ω*-semigroup*, Semigroup Forum **14** (1977), no. 3, 265–271. DOI: 10.1007/BF02194671
27. M. B. Szendrei, *A generalisation of McAlister's P-theorem for E-unitary regular semigroups*, Acta Sci. Math. (Szeged) **51** (1987), no. 1–2, 229–249.
28. R. J. Warne, *A class of bisimple inverse semigroups*, Pac. J. Math. **18** (1966), no. 3, 563–577. DOI: 10.1215/S0012-7094-67-03481-3

Стаття: надійшла до редколегії 07.12.2019
доопрацьована 31.12.2020
прийнята до друку 17.11.2021

POLYCYCLIC EXTENSIONS OF SEMIGROUPS

Oleg GUTIK, Pavlo KHYLYNSKYI

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua,
pavlo.khylynskyi@lnu.edu.ua

In the paper we introduce a notion of the Bruck-Reilly λ-polycyclic extension of a monoid S with a homomorphism θ which is an analogue of the Bruck-Reilly extension of a monoid S. We describe idempotens of the semigroup $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$ and Green's relations on $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$. It is proved that $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$ is a 0-simple semigroup for any semigroup S. We find necessary and sufficient conditions on a monoid S and a homomorphism θ under which the semigroup $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$ is regular, inverse, 0-bisimple, combinatorial, congruence free, or inverse 0-E-unitary. Also we study topologizations of the semigroup $(\mathscr{P}_\lambda(\theta,S),*)$.

Key words: semigroup, polycyclic monoid, extension, semitopological semigroup, topological semigroup.