*ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 90. С. 5–19*
*Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 90. P. 5–19*
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.90.005-019

УДК 512.53

# ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ БІЦИКЛІЧНОГО МОНОЇДА

**Олег ГУТІК, Микола МИХАЛЕНИЧ**

*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
*вул. Університетська, 1, 79000, Львів*
*e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,*
*myhalenychmc@gmail.com*

Вводимо алгебричне розширення $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ біциклічного моноїда для довільної $\omega$-замкненої сім'ї $\mathscr{F}$ підмножин в $\omega$, які узагальнюють біциклічний моноїд, зліченну напівгрупу матричних одиниць і деякі інші комбінаторні інверсні напівгрупи. Доведено, що $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є комбінаторною інверсною напівгрупою, а також описано відношення Ґріна, частковий природний порядок на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ та її множину ідемпотентів. Також доведено критерії простоти, 0-простоти, біпростоти та 0-біпростоти напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, а також коли $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ містить одиницю, ізоморфна біциклічному моноїду або зліченній напівгрупі матричних одиниць.

*Ключові слова:* напівгрупа, біциклічний моноїд, розширення.

## 1. Вступ

Ми користуватимемось термінологією з [5, 6, 12, 14]. Надалі у тексті множину невід'ємних цілих чисел позначатимемо через $\omega$. Для довільного $k \in \omega$ позначимо $[k) = \{i \in \omega \colon i \geqslant k\}$.

Підмножина $A$ в $\omega$ називається *індуктивною*, якщо з того, що $i \in A$ випливає, що $i+1 \in A$. Очевидно, що $\varnothing$ — індуктивна множина в $\omega$, і непорожня підмножина $A \subseteq \omega$ є індуктивною тоді і лише тоді, коли $A = [k)$ для деякого $k \in \omega$.

Якщо $S$ — напівгрупа, то її підмножина ідемпотентів позначається через $E(S)$. Напівгрупа $S$ називається *інверсною*, якщо для довільного її елемента $x$ існує єдиний елемент $x^{-1} \in S$ такий, що $xx^{-1}x = x$ та $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$ [1, 14]. В інверсній напівгрупі $S$ вище означений елемент $x^{-1}$ називається *інверсним до* $x$. *В'язка* — це напівгрупа ідемпотентів, а *напівґратка* — це комутативна в'язка.

Якщо $S$ — напівгрупа, то ми позначатимемо відношення Ґріна на $S$ через $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{H}$ і $\mathscr{J}$ (див. означення в [5, §2.1] або [10]). Напівгрупа $S$ називається *простою*,

*2020 Mathematics Subject Classification*: 20M10, 20M15 якщо $S$ не містить власних двобічних ідеалів, тобто $S$ складається з одного $\mathscr{J}$-класу, і *біпростою*, якщо $S$ складається з одного $\mathscr{D}$-класу.

Відношення еквівалентності $\mathfrak{K}$ на напівгрупі $S$ називається *конгруенцією*, якщо для елементів $a$ та $b$ напівгрупи $S$ з того, що виконується умова $(a,b)\in\mathfrak{K}$ випливає, що $(ca,cb),(ad,bd)\in\mathfrak{K}$, для довільних $c,d\in S$. Відношення $(a,b)\in\mathfrak{K}$ також будемо записувати $a\mathfrak{K}b$, і в цьому випадку будемо говорити, що *елементи $a$ і $b$ $\mathfrak{K}$-еквівалентні.*

Якщо $S$ — напівгрупа, то на $E(S)$ визначено частковий порядок: $e\preccurlyeq f$ тоді і лише тоді, коли $ef=fe=e$. Так означений частковий порядок на $E(S)$ називається *природним.*

Означимо відношення $\preccurlyeq$ на інверсній напівгрупі $S$ так: $s\preccurlyeq t$ тоді і лише тоді, коли $s=te$. для деякого ідемпотента $e\in S$. Так означений частковий порядок називається *природним частковим порядком* на інверсній напівгрупі $S$ [1]. Очевидно, що звуження природного часткового порядку $\preccurlyeq$ на інверсній напівгрупі $S$ на її в'язку $E(S)$ є природним частковим порядком на $E(S)$.

Нагадаємо (див. [5, §1.12], що *біциклічною напівгрупою* (або *біциклічним моноїдом*) $\mathscr{C}(p,q)$ називається напівгрупа з одиницею, породжена двоелементною множиною $\{p,q\}$ і визначена одним співвідношенням $pq=1$. Біциклічна напівгрупа відіграє важливу роль у теорії напівгруп. Зокрема, класична теорема О. Андерсена [2] стверджує, що (0-)проста напівгрупа з (ненульовим) ідемпотентом є цілком (0-)простою тоді і лише тоді, коли вона не містить ізоморфну копію біциклічного моноїда. Різні розширення біциклічного моноїда вводили раніше різні автори [7, 8, 9, 18]. Такими є, зокрема, конструкції Брука та Брука–Рейлі занурення напівгруп у прості та описання інверсних біпростих і 0-біпростих $\omega$-напівгруп [4, 15, 17, 11].

*Зауваження* 1. Легко бачити, що біциклічний моноїд $\mathscr{C}(p,q)$ ізоморфний напівгрупі, заданій на множині $\boldsymbol{B}_\omega=\omega\times\omega$ з напівгруповою операцією

$$(i_1,j_1)\cdot(i_2,j_2)=(i_1+i_2-\min\{j_1,i_2\},j_1+j_2-\min\{j_1,i_2\})=$$
$$=\begin{cases}(i_1-j_1+i_2,j_2), & \text{якщо } j_1\leqslant i_2;\\ (i_1,j_1-i_2+j_2), & \text{якщо } j_1\geqslant i_2.\end{cases}$$

Ми вводимо алгебричні розширення $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ біциклічного моноїда для довільної $\omega$-замкненої сім'ї $\mathscr{F}$ підмножин в $\omega$, які узагальнюють біциклічний моноїд, зліченну напівгрупу матричних одиниць і деякі інші комбінаторні інверсні напівгрупи. Доведено, що $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ є комбінаторною інверсною напівгрупою, а також описано відношення Ґріна, частковий природний порядок на напівгрупі $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ та її множину ідемпотентів. Також доведено критерії простоти, 0-простоти, біпростоти та 0-біпростоти напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$, а також коли $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ містить одиницю, ізоморфна біциклічному моноїду або зліченній напівгрупі матричних одиниць.

## 2. Конструкція розширення $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$

Нехай $\mathscr{P}(\omega)$ — сім'я усіх підмножин ординалу $\omega$. Для довільних $F\in\mathscr{P}(\omega)$ і $n,m\in\omega$ приймемо

$$n-m+F=\{n-m+k\colon k\in F\},\qquad \text{якщо } F\neq\varnothing$$

і $n-m+F=\varnothing$, якщо $F=\varnothing$.

Будемо говорити, що підсім'я $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ є *$\omega$-замкненою*, якщо $F_1 \cap (-n+F_2) \in \mathscr{F}$ для довільних $n \in \omega$ і $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$.

Нехай $\boldsymbol{B}_\omega$ — біциклічний моноїд і $\mathscr{F}$ — $\omega$-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$. На множині $\boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}$ означимо бінарну операцію "$\cdot$" формулою

$$(i_1, j_1, F_1) \cdot (i_2, j_2, F_2) = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + F_1) \cap F_2), & \text{якщо } j_1 \leqslant i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, F_1 \cap (i_2 - j_1 + F_2)), & \text{якщо } j_1 \geqslant i_2. \end{cases}$$

Тоді отримуємо, що

$$\begin{aligned}
&((i_1, j_1, F_1) \cdot (i_2, j_2, F_2)) \cdot (i_3, j_3, F_3) = \\
&\qquad = \begin{cases} (i_1{-}j_1{+}i_2, j_2, (j_1{-}i_2{+}F_1) \cap F_2){\cdot}(i_3, j_3, F_3), & \text{якщо } j_1 \leqslant i_2; \\ (i_1, j_1{-}i_2{+}j_2, F_1 \cap (i_2{-}j_1{+}F_2)){\cdot}(i_3, j_3, F_3), & \text{якщо } j_1 \geqslant i_2 \end{cases} = \\
&\qquad = \begin{cases} (i_1{-}j_1{+}i_2{-}j_2{+}i_3, j_3, (j_2{-}i_3{+}((j_1{-}i_2{+}F_1) \cap F_2)) \cap F_3), \\ \qquad \text{якщо } j_1 \leqslant i_2 \text{ і } j_2 \leqslant i_3; \\ (i_1{-}j_1{+}i_2, j_2{-}i_3{+}j_3, (j_1{-}i_2{+}F_1) \cap F_2 \cap (i_3{-}j_2{+}F_3)), \\ \qquad \text{якщо } j_1 \leqslant i_2 \text{ і } j_2 \geqslant i_3; \\ (i_1{-}j_1{+}i_2{-}j_2{+}i_3, j_3, j_1{-}i_2{+}j_2{-}i_3{+}(F_1 \cap (i_2{-}j_1{+}F_2)) \cap F_3), \\ \qquad \text{якщо } j_1 \geqslant i_2 \text{ і } j_1{-}i_2{+}j_2 \leqslant i_3; \\ (i_1, j_1{-}i_2{+}j_2{-}i_3{+}j_3, (F_1 \cap (i_2{-}j_1{+}F_2)) \cap (j_3{-}j_1{+}i_2{-}j_2{+}F_3)), \\ \qquad \text{якщо } j_1 \geqslant i_2 \text{ і } j_1{-}i_2{+}j_2 \geqslant i_3 \end{cases} = \\
&\qquad = \begin{cases} (i_1{-}j_1{+}i_2{-}j_2{+}i_3, j_3, (j_2{-}i_3{+}j_1{-}i_2{+}F_1) \cap (j_2{-}i_3{+}F_2) \cap F_3), \\ \qquad \text{якщо } j_1 \leqslant i_2 \text{ і } j_2 \leqslant i_3; & (1_1) \\ (i_1{-}j_1{+}i_2, j_2{-}i_3{+}j_3, (j_1{-}i_2{+}F_1) \cap F_2 \cap (i_3{-}j_2{+}F_3)), \\ \qquad \text{якщо } j_1 \leqslant i_2 \text{ і } j_2 \geqslant i_3; & (2_1) \\ (i_1{-}j_1{+}i_2{-}j_2{+}i_3, j_3, (j_1{-}i_2{+}j_2{-}i_3{+}F_1) \cap (j_2{-}i_3{+}F_2) \cap F_3), \\ \qquad \text{якщо } j_1 \geqslant i_2 \text{ і } j_1{-}i_2{+}j_2 \leqslant i_3; & (3_1) \\ (i_1, j_1{-}i_2{+}j_2{-}i_3{+}j_3, F_1 \cap (i_2{-}j_1{+}F_2) \cap (j_3{-}j_1{+}i_2{-}j_2{+}F_3)), \\ \qquad \text{якщо } j_1 \geqslant i_2 \text{ і } j_1{-}i_2{+}j_2 \geqslant i_3 & (4_1) \end{cases}
\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
&(i_1, j_1, F_1) \cdot ((i_2, j_2, F_2) \cdot (i_3, j_3, F_3)) = \\
&\qquad = \begin{cases} (i_1, j_1, F_1){\cdot}(i_2{-}j_2{+}i_3, j_3, (j_2{-}i_3{+}F_2) \cap F_3), & \text{якщо } j_2 \leqslant i_3; \\ (i_1, j_1, F_1){\cdot}(i_2, j_2{-}i_3{+}j_3, F_2 \cap (i_3{-}j_2{+}F_3)), & \text{якщо } j_2 \geqslant i_3 \end{cases} = \\
&\qquad = \begin{cases} (i_1{-}j_1{+}i_2{-}j_2{+}i_3, j_3, (j_1{-}i_2{+}j_2{-}i_3{+}F_1) \cap (j_2{-}i_3{+}F_2) \cap F_3), \\ \qquad \text{якщо } j_2 \leqslant i_3 \text{ і } j_1 \leqslant i_2{-}j_2{+}i_3; \\ (i_1, j_1{-}i_2{+}j_2{-}i_3{+}j_3, F_1 \cap (i_2{-}j_2{+}i_3{-}j_1{+}((j_2{-}i_3{+}F_2) \cap F_3))), \\ \qquad \text{якщо } j_2 \leqslant i_3 \text{ і } j_1 \geqslant i_2{-}j_2{+}i_3; \\ (i_1{-}j_1{+}i_2, j_2{-}i_3{+}j_3, (j_1{-}j_2{+}i_3{-}j_3{+}F_1) \cap F_2 \cap (i_3{-}j_2{+}F_3)), \\ \qquad \text{якщо } j_2 \geqslant i_3 \text{ і } j_1 \leqslant i_2; \\ (i_1, j_1{-}i_2{+}j_2{-}i_3{+}j_3, F_1 \cap (i_2{-}j_1{+}(F_2 \cap (i_3{-}j_2{+}F_3)))), \\ \qquad \text{якщо } j_2 \geqslant i_3 \text{ і } j_1 \geqslant i_2; \end{cases} =
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} (i_1{-}j_1{+}i_2{-}j_2{+}i_3, j_3, (j_1{-}i_2{+}j_2{-}i_3{+}F_1) \cap (j_2{-}i_3{+}F_2) \cap F_3), \\ \qquad\qquad\qquad\text{якщо } j_2 \leqslant i_3 \text{ і } j_1 \leqslant i_2{-}j_2{+}i_3; & (1_2) \\ (i_1, j_1{-}i_2{+}j_2{-}i_3{+}j_3, F_1 \cap (i_2{-}j_1{+}F_2) \cap (i_2{-}j_2{+}i_3{-}j_1{+}F_3)), \\ \qquad\qquad\qquad\text{якщо } j_2 \leqslant i_3 \text{ і } j_1 \geqslant i_2{-}j_2{+}i_3; & (2_2) \\ (i_1{-}j_1{+}i_2, j_2{-}i_3{+}j_3, (j_1{-}j_2{+}i_3{-}j_3{+}F_1) \cap F_2 \cap (i_3{-}j_2{+}F_3)), \\ \qquad\qquad\qquad\text{якщо } j_2 \geqslant i_3 \text{ і } j_1 \leqslant i_2; & (3_2) \\ (i_1, j_1{-}i_2{+}j_2{-}i_3{+}j_3, F_1 \cap (i_2{-}j_1{+}F_2) \cap (i_2{-}j_1{+}i_3{-}j_2{+}F_3)), \\ \qquad\qquad\qquad\text{якщо } j_2 \geqslant i_3 \text{ і } j_1 \geqslant i_2. & (4_2) \end{cases}$$

Аналогічно, як і у випадку доведення асоціативності напівгрупової операції для біциклічного моноїда, маємо такі еквівалентності умов:

$$(1_1) \vee (3_1) \iff (1_2), \qquad (2_1) \iff (3_2), \qquad (4_1) \iff (2_2) \vee (4_2).$$

Отже, ми довели таке твердження.

**Твердження 1.** *Якщо сім'я $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ є $\omega$-замкненою, то $(\boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}, \cdot)$ є напівгрупою.*

Припустимо, що $\omega$-замкнена сім'я $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ містить порожню множину $\varnothing$, то з означення напівгрупової операції $(\boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}, \cdot)$ випливає, що множина $\boldsymbol{I} = \{(i,j,\varnothing) \colon i,j \in \omega\}$ є ідеалом напівгрупи $(\boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}, \cdot)$.

**Означення 1.** Для довільної $\omega$-замкненої сім'ї $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ означимо

$$\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}} = \begin{cases} (\boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}, \cdot)/\boldsymbol{I}, & \text{якщо } \varnothing \in \mathscr{F}; \\ (\boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}, \cdot), & \text{якщо } \varnothing \notin \mathscr{F}. \end{cases}$$

## 3. Алгебричні властивості напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$

Надалі ми вважатимемо, що $\mathscr{F}$ — $\omega$-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$.

Твердження леми 1 очевидне.

**Лема 1.** *Напівгрупа $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ містить нуль $\boldsymbol{0}$ тоді і лише тоді, коли $\varnothing \in \mathscr{F}$, причому нуль $\boldsymbol{0}$ є образом ідеала $\boldsymbol{I}$ при природному гомоморфізмі, породженому конгруенцією Ріса*

$$\mathfrak{C}_{\boldsymbol{I}} = \{(x,x) \colon x \in \boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}\} \cup (\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{I})$$

*на напівгрупі $(\boldsymbol{B}_\omega \times \mathscr{F}, \cdot)$.*

**Лема 2.** *Ненульовий елемент $(i,j,F)$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}}$ є ідемпотентом тоді і лише тоді, коли $i = j$.*

*Доведення.* $(\Longleftarrow)$ Якщо $i = j$, то маємо, що

$$(i,i,F) \cdot (i,i,F) = (i,i,F \cap F) = (i,i,F),$$

а отже, $(i,i,F) \in E(\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}})$.

$(\Longrightarrow)$ Припустимо, що $(i,j,F) \in E(\boldsymbol{B}_\omega^{\mathscr{F}})$ та $i \geqslant j$. Тоді

$$(i,j,F) \cdot (i,j,F) = (i - j + i, j, (j - i + F) \cap F) = (i,j,F),$$

а отже, $i{-}j{+}i = i$, звідки випливає, що $i = j$. У випадку $i \leqslant j$ аналогічно отримуємо, що $i = j$. $\square$

**Лема 3.** *Ідемпотенти напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ комутують.*

*Доведення.* Очевидно, якщо напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ містить нуль $\mathbf{0}$, то елемент $\mathbf{0}$ комутує з кожним елементом напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Зафіксуємо два довільні ненульові ідемпотенти напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, які за лемами 1 і 2 мають зображення $(i,i,F_i)$ і $(j,j,F_j)$, де $i,j \in \omega$ і $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ — непорожні підмножини в $\omega$. Тоді

$$(i,i,F_i)\cdot(j,j,F_j) = \begin{cases} (i-i+j, j, (i-j+F_i)\cap F_j), & \text{якщо } i \leqslant j; \\ (i, i-j+j, F_i \cap (j-i+F_j)), & \text{якщо } i \geqslant j \end{cases} = \\ = \begin{cases} (j,j,(i-j+F_i)\cap F_j), & \text{якщо } i \leqslant j; \\ (i,i,F_i\cap(j-i+F_j)), & \text{якщо } i \geqslant j \end{cases}$$

і

$$(j,j,F_i)\cdot(i,i,F_j) = \begin{cases} (j, j-i+i, F_j \cap (i-j+F_i)), & \text{якщо } i \leqslant j; \\ (i-i+j, j, (j-i+F_j)\cap F_i), & \text{якщо } i \geqslant j \end{cases} = \\ = \begin{cases} (j,j,(i-j+F_i)\cap F_j), & \text{якщо } i \leqslant j; \\ (i,i,F_i\cap(j-i+F_j)), & \text{якщо } i \geqslant j, \end{cases}$$

звідки

$$(i,i,F_i)\cdot(j,j,F_j) = (j,j,F_i)\cdot(i,i,F_j),$$

а отже, справджується твердження леми. □

**Лема 4.** *Елементи $(i,j,F)$ і $(j,i,F)$ є інверсними в напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.*

*Доведення.* Справді, маємо

$$(i,j,F)\cdot(j,i,F)\cdot(i,j,F) = (i,i,F)\cdot(i,j,F) = (i,j,F)$$

і

$$(j,i,F)\cdot(i,j,F)\cdot(j,i,F) = (j,j,F)\cdot(j,i,F) = (j,i,F),$$

звідки й випливає твердження леми. □

За теоремою Вагнера–Престона (див. [5, теорема 1.17]) регулярна напівгрупа є інверсною тоді і лише тоді, коли ідемпотенти в ній комутують, а отже, з лем 3 і 4 випливає теорема 1.

**Теорема 1.** *Якщо $\mathscr{F}$ — $\omega$-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$, то $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ — інверсна напівгрупа.*

Лема 5 описує природний частковий порядок на множині ідемпотентів напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

**Лема 5.** *$(i,i,F_i) \preccurlyeq (j,j,F_j)$ в $E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}})$ тоді і тільки тоді, коли*

$$i \geqslant j \qquad \text{і} \qquad F_i \subseteq j-i+F_j.$$

*Доведення.* Припустимо, що $(i,i,F_i) \preccurlyeq (j,j,F_j)$ в $E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}})$. Тоді

$$(i,i,F_i)\cdot(j,j,F_j) = (i,i,F_i),$$

і оскільки

$$(i,i,F_i)\cdot(j,j,F_j)=\begin{cases}(i-i+j,j,(i-j+F_i)\cap F_j), & \text{якщо } i\leqslant j;\\ (i,i-j+j,F_i\cap(j-i+F_j)), & \text{якщо } i\geqslant j\end{cases}=$$
$$=\begin{cases}(j,j,(i-j+F_i)\cap F_j), & \text{якщо } i\leqslant j;\\ (i,i,F_i\cap(j-i+F_j)), & \text{якщо } i\geqslant j,\end{cases}$$

то з леми 3 випливає, що $i\geqslant j$ і $F_i\subseteq j-i+F_j$.

Навпаки, припустимо, що $i\geqslant j$ і $F_i\subseteq j-i+F_j$. Тоді

$$\begin{aligned}(i,i,F_i)\cdot(j,j,F_j)&=(i,i-j+j,F_i\cap(j-i+F_j))=\\&=(i,i,F_i\cap(j-i+F_j))=\\&=(i,i,F_i),\end{aligned}$$

а отже, $(i,i,F_i)\preccurlyeq(j,j,F_j)$ в $E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}})$. □

Твердження 2 описує природний частковий порядок на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

**Твердження 2.** *Нехай $(i_1,j_1,F_1)$ і $(i_2,j_2,F_2)$ — ненульові елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. Тоді $(i_1,j_1,F_1)\preccurlyeq(i_2,j_2,F_2)$ тоді і лише тоді, коли $F_1\subseteq -k+F_2$ й $i_1-i_2=j_1-j_2=k$ для деякого $k\in\omega$.*

*Доведення.* ($\Longleftarrow$) Якщо $F_1\subseteq -k+F_2$, $i_1-i_2=k$ і $j_1-j_2=k$ для деякого $k\in\omega$, то

$$\begin{aligned}(i_1,j_1,F_1)\cdot(i_1,j_1,F_1)^{-1}\cdot(i_2,j_2,F_2)&=(i_1,j_1,F_1)\cdot(j_1,i_1,F_1)\cdot(i_2,j_2,F_2)=\\&=(i_1,i_1,F_1)\cdot(i_2,j_2,F_2)=\\&=(i_1,i_1-i_2+j_2,F_1\cap(i_2-i_1+F_2))=\\&=(i_1,j_1-j_2+j_2,F_1\cap(-k+F_2))=\\&=(i_1,j_1,F_1\cap(-k+F_2))=\\&=(i_1,j_1,F_1),\end{aligned}$$

і за лемою 1.4.6 [12] отримуємо, що $(i_1,j_1,F_1)\preccurlyeq(i_2,j_2,F_2)$.

($\Longrightarrow$) Припустимо, що $(i_1,j_1,F_1)\preccurlyeq(i_2,j_2,F_2)$. Тоді за лемою 1.4.6 [12],

$$\begin{aligned}(i_1,j_1,F_1)&=(i_1,j_1,F_1)\cdot(i_1,j_1,F_1)^{-1}\cdot(i_2,j_2,F_2)=\\&=(i_1,j_1,F_1)\cdot(j_1,i_1,F_1)\cdot(i_2,j_2,F_2)=\\&=(i_1,i_1,F_1)\cdot(i_2,j_2,F_2)=\\&=\begin{cases}(i_1-i_1+i_2,j_2,(i_1-i_2+F_1)\cap F_2), & \text{якщо } i_1\leqslant i_2;\\ (i_1,i_1-i_2+j_2,F_1\cap(i_2-i_1+F_2)), & \text{якщо } i_1\geqslant i_2\end{cases}=\\&=\begin{cases}(i_2,j_2,(i_1-i_2+F_1)\cap F_2), & \text{якщо } i_1\leqslant i_2; \quad (1_3)\\ (i_1,i_1-i_2+j_2,F_1\cap(i_2-i_1+F_2)), & \text{якщо } i_1\geqslant i_2 \quad (2_3)\end{cases}\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}(i_1,j_1,F_1) &= (i_2,j_2,F_2)\cdot(i_1,j_1,F_1)^{-1}\cdot(i_1,j_1,F_1) =\\ &= (i_2,j_2,F_2)\cdot(j_1,i_1,F_1)\cdot(i_1,j_1,F_1) =\\ &= (i_2,j_2,F_2)\cdot(j_1,j_1,F_1) =\\ &= \begin{cases}(i_2,j_2-j_1+j_1,F_2\cap(j_1-j_2+F_1)), & \text{якщо } j_1\leqslant j_2;\\ (i_2-j_2+j_1,j_1,(j_2-j_1+F_2)\cap F_1), & \text{якщо } j_1\geqslant j_2\end{cases} =\\ &= \begin{cases}(i_2,j_2,F_2\cap(j_1-j_2+F_1)), & \text{якщо } j_1\leqslant j_2; \qquad (1_4)\\ (i_2-j_2+j_1,j_1,(j_2-j_1+F_2)\cap F_1), & \text{якщо } j_1\geqslant j_2 \qquad (2_4)\end{cases}\end{aligned}$$

У випадках $(1_3)$ і $(1_4)$ маємо, що $i_1=i_2$, $j_1=j_2$, а отже, $i_1-i_2=j_1-j_2=0$ і $F_1\subseteq -0+F_2$. У випадках $(2_3)$ і $(2_4)$ одержуємо, що $i_1=i_2-j_2+j_1$, і врахувавши, що $i_1\geqslant i_2$, $j_1\geqslant j_2$ і $(j_2-j_1+F_2)\cap F_1=F_1$, та прийнявши $k=i_1-i_2=j_1-j_2$, отримуємо, що $F_1\subseteq -k+F_2$ для деякого $k\in\omega$. □

Теорема 2 описує відношення Ґріна на напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

**Теорема 2.** *Нехай $\mathscr{F}$ — $\omega$-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$. Тоді:*

**(i)** *$(i_1,j_1,F_1)\mathscr{R}(i_2,j_2,F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тоді і лише тоді, коли $i_1=i_2$ і $F_1=F_2$;*
**(ii)** *$(i_1,j_1,F_1)\mathscr{L}(i_2,j_2,F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тоді і лише тоді, коли $j_1=j_2$ і $F_1=F_2$;*
**(iii)** *$(i_1,j_1,F_1)\mathscr{H}(i_2,j_2,F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тоді і лише тоді, коли $i_1=i_2$, $j_1=j_2$ і $F_1=F_2$, а отже, всі $\mathscr{H}$-класи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є одноелементними;*
**(iv)** *$(i_1,j_1,F_1)\mathscr{D}(i_2,j_2,F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тоді і лише тоді, коли $F_1=F_2$;*
**(v)** *$(i_1,j_1,F_1)\mathscr{J}(i_2,j_2,F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тоді і лише тоді, коли існують $k_1,k_2\in\omega$ такі, що $F_1\subseteq -k_1+F_2$ і $F_2\subseteq -k_2+F_1$.*

*Доведення.* **(i)** Нехай $(i_1,j_1,F_1)$ і $(i_2,j_2,F_2)$ — $\mathscr{R}$-еквівалентні елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ такі, що $(i_1,j_1,F_1)\mathscr{R}(i_2,j_2,F_2)$. Позаяк за теоремою 1, $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ — інверсна напівгрупа та $(i_1,j_1,F_1)\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}=(i_2,j_2,F_2)\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, то з теореми 1.17 [5] випливає, що

$$(i_1,j_1,F_1)\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}=(i_1,j_1,F_1)(i_1,j_1,F_1)^{-1}\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}=(i_1,i_1,F_1)\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$$

і

$$(i_2,j_2,F_2)\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}=(i_2,j_2,F_2)(i_2,j_2,F_2)^{-1}\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}=(i_2,i_2,F_2)\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}},$$

а отже, $(i_1,i_1,F_1)=(i_2,i_2,F_2)$. Отож виконуються рівності $i_1=i_2$ і $F_1=F_2$.

Навпаки, нехай $(i_1,j_1,F_1)$ і $(i_2,j_2,F_2)$ — елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ такі, що $i_1=i_2$ і $F_1=F_2$. Тоді $(i_1,i_1,F_1)=(i_2,i_2,F_2)$. Позаяк $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ — інверсна напівгрупа, то з теореми 1.17 [5] випливає, що

$$\begin{aligned}(i_1,j_1,F_1)\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} &= (i_1,j_1,F_1)(i_1,j_1,F_1)^{-1}\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} =\\ &= (i_1,i_1,F_1)\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} =\\ &= (i_2,j_2,F_2)(i_2,j_2,F_2)^{-1}\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} =\\ &= (i_2,i_2,F_2)\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}},\end{aligned}$$

а отже, $(i_1,j_1,F_1)\mathscr{R}(i_2,j_2,F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Доведення твердження **(ii)** аналогічне до доведення твердження **(i)**.

Твердження $\boldsymbol{(iii)}$ випливає з $\boldsymbol{(i)}$ та $\boldsymbol{(ii)}$.

$\boldsymbol{(iv)}$ Нехай $(i_1, j_1, F_1)$ і $(i_2, j_2, F_2)$ — елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ такі, що $(i_1, j_1, F_1)\mathscr{D}(i_2, j_2, F_2)$. Позаяк $\mathscr{R}, \mathscr{L} \subseteq \mathscr{D}$ та

$$(i_1, i_1, F_1)\mathscr{R}(i_1, j_1, F_1) \qquad \text{i} \qquad (i_2, j_2, F_2)\mathscr{L}(j_2, j_2, F_2)$$

за твердженнями $\boldsymbol{(i)}$ і $\boldsymbol{(ii)}$, то $(i_1, i_1, F_1)\mathscr{D}(j_2, j_2, F_2)$. За лемою Манна (див. [13, лема 1.1] або [12, твердження 3.2.5]) існує елемент $(i, j, F) \in \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ такий, що

$$(i, j, F) \cdot (i, j, F)^{-1} = (i_1, i_1, F_1) \qquad \text{i} \qquad (i, j, F)^{-1} \cdot (i, j, F) = (j_2, j_2, F_2).$$

Але за лемою 4 маємо, що

$$(i, j, F) \cdot (i, j, F)^{-1} = (i, j, F) \cdot (j, i, F) = (i, i, F)$$

і

$$(i, j, F)^{-1} \cdot (i, j, F) = (j, i, F) \cdot (i, j, F) = (j, j, F),$$

а отже, $F = F_1 = F_2$.

Нехай $i_1, i_2, j_1, j_2$ — довільні невід'ємні цілі числа та $F \in \mathscr{F}$. За твердженнями $\boldsymbol{(i)}$ і $\boldsymbol{(ii)}$ отримуємо, що $(i_1, i_1, F)\mathscr{R}(i_1, j_1, F)$ і $(i_2, j_2, F)\mathscr{L}(j_2, j_2, F)$, а з леми 2 випливає, що $(i_1, i_1, F), (i_2, j_2, F) \in E(\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}})$. Позаяк

$$(i_1, j_2, F) \cdot (i_1, j_2, F)^{-1} = (i_1, j_2, F) \cdot (j_2, i_1, F) = (i_1, i_1, F)$$

і

$$(i_1, j_2, F)^{-1} \cdot (i_1, j_2, F) = (j_2, i_1, F) \cdot (i_1, j_2, F) = (j_2, j_2, F),$$

то за лемою Манна (див. [13, лема 1.1] або [12, твердження 3.2.5]) отримуємо, що $(i_1, i_1, F)\mathscr{D}(j_2, j_2, F)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, і позаяк $\mathscr{R} \circ \mathscr{D} \circ \mathscr{L} \subseteq \mathscr{D}$, то $(i_1, j_1, F)\mathscr{D}(i_2, j_2, F)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

$\boldsymbol{(v)}$ Зауважимо, оскільки $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{J}$ і за твердженням $\boldsymbol{(iv)}$ маємо, що $(0, 0, F)\mathscr{D}(i, j, F)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ для довільних $i, j \in \omega$ і $F \in \mathscr{F}$, то достатньо знайти необхідну та достатню умову, коли елементи $(0, 0, F_1)$ і $(0, 0, F_2)$ є $\mathscr{J}$-еквівалентні в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

За твердженням 3.2.8 [12] елементи $a$ і $b$ інверсної напівгрупи $S$ є $\mathscr{J}$-еквівалентні тоді і лише тоді, коли $a\mathscr{D}b' \preccurlyeq b$ і $b\mathscr{D}a' \preccurlyeq a$ для деяких $a', b' \in S$. Тоді за твердженням 2 ідемпотенти $(0, 0, F_1)$ і $(0, 0, F_2)$ є $\mathscr{J}$-еквівалентні в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тоді і лише тоді, коли існують $k_1, k_2 \in \omega$ такі, що $F_1 \subseteq -k_1 + F_2$ і $F_2 \subseteq -k_2 + F_1$. Тоді з вище сказаного випливає, що $(i_1, j_1, F_1)\mathscr{J}(i_2, j_2, F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тоді і лише тоді, коли існують $k_1, k_2 \in \omega$ такі, що $F_1 \subseteq -k_1 + F_2$ і $F_2 \subseteq -k_2 + F_1$. $\square$

Нагадаємо [12, 3], шо інверсна напівгрупа $S$ називається *комбінаторною*, якщо відношення Ґріна $\mathscr{H}$ на $S$ є відношенням рівності.

З твердження $\boldsymbol{(iii)}$ теореми 2 випливає наслідок 1.

**Наслідок 1.** *Якщо $\mathscr{F}$ — $\omega$-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$, то $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ — комбінаторна інверсна напівгрупа.*

Також з твердження $\boldsymbol{(v)}$ теореми 2 випливає наслідок 2.

**Наслідок 2.** *Нехай $\mathscr{F}$ — $\omega$-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$ і $\varnothing \notin \mathscr{F}$. Тоді напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є простою тоді і лише тоді, коли для довільних $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ існують $k_1, k_2 \in \omega$ такі, що*

$$F_1 \subseteq -k_1 + F_2 \qquad і \qquad F_2 \subseteq -k_2 + F_1.$$

Нагадаємо [5], що напівгрупа $S$ з нулем 0 називається 0-*простою*, якщо $S \cdot S \neq \{0\}$ і $\{0\}$ — єдиний власний двобічний ідеал в $S$. Добре відомо (див. [5, лема 2.28]), що напівгрупа $S$ з нулем 0 є 0-простою тоді і лише тоді, коли $S$ має лише два $\mathscr{J}$-класи: $S \setminus \{0\}$ і $\{0\}$. З твердження $(\boldsymbol{v})$ теореми 2 випливає наслідок 3.

**Наслідок 3.** *Нехай $\mathscr{F}$ — $\omega$-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$ і $\varnothing \in \mathscr{F}$. Тоді напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ є 0-простою тоді і лише тоді, коли для довільних непорожніх множин $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ існують $k_1, k_2 \in \omega$ такі, що*

$$F_1 \subseteq -k_1 + F_2 \qquad і \qquad F_2 \subseteq -k_2 + F_1.$$

Нагадаємо [16] (див. також [12]), що інверсна напівгрупа $S$ називається $E$-*унітарною*, якщо для $e \in E(S)$ і $s \in S$ з $e \preccurlyeq s$ випливає, що $s \in E(S)$. Тоді з твердження 2 випливає теорема 3.

**Теорема 3.** *Якщо $\mathscr{F}$ — $\omega$-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$ і $\varnothing \notin \mathscr{F}$, то $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ — $E$-унітарна інверсна напівгрупа.*

Індуктивні підмножини в $\omega$ описує лема 6.

**Лема 6.** *Непорожня множина $F \subseteq \omega$ є індуктивною в $\omega$ тоді і лише тоді, коли*

$$(-1 + F) \cap F = F.$$

*Доведення.* $(\Longrightarrow)$ Припустимо, що $F$ — непорожня індуктивна множина в $\omega$ і нехай $x \in F$. Тоді $y = x + 1 \in F$, а отже, $x = y - 1 \in (-1 + F) \cap F$. Звідки випливає, що $F \subseteq (-1 + F) \cap F$.

$(\Longleftarrow)$ Нехай $(-1 + F) \cap F = F$ для деякої непорожньої множини $F \subseteq \omega$. Зафіксуємо довільний елемент $x \in F$. Тоді існує елемент $y \in F$ такий, що $y - 1 = x \in F$, а отже, $x + 1 = y \in F$. □

**Теорема 4.** *Нехай $\mathscr{F}$ — $\omega$-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$. Напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ містить одиницю тоді і лише тоді, коли сім'я $\mathscr{F}$ містить індуктивну множину $F_0$ в $\omega$ таку, що $F_0 = \bigcup \mathscr{F}$. За виконання цих умов елемент $(0, 0, F_0)$ є одиницею напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.*

*Доведення.* $(\Longrightarrow)$ Припустимо, що напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ містить одиницю. Оскільки одиниця кожної напівгрупи є ідемпотентом, то за лемою 2 одиниця в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ має вигляд $(i, i, F_0)$ для деяких $i \in \omega$ і $F_0 \in \mathscr{F}$. Якщо $\mathscr{F} = \{\varnothing\}$, то твердження теореми очевидне, а тому надалі вважатимемо, що $F_0 \neq \varnothing$. Якщо $i \neq 0$, то

$$(0, 0, F_0) \cdot (i, i, F_0) = (i, i, (-i + F_0) \cap F_0) \neq (0, 0, F_0),$$

звідки випливає, що елемент $(0, 0, F_0)$ є одиницею напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. З рівності

$$(0, 0, F_0) \cdot (1, 1, F_0) = (1, 1, (-1 + F_0) \cap F_0) = (1, 1, F_0)$$

випливає, що $F_0$ — індуктивна множина в $\omega$. Позаяк

$$(0,0,F_0)\cdot(0,0,F) = (0,0,F_0\cap F) = (0,0,F)$$

для довільної множини $F\in\mathscr{F}$, то $F_0 \supseteq \bigcup\mathscr{F}$, а з того, що $F_0\in\mathscr{F}$ отримуємо рівність $F_0 = \bigcup\mathscr{F}$.

($\Longleftarrow$) Доведемо, що елемент $(0,0,F_0)$ є у випадку, коли сім'я $\mathscr{F}$ містить індуктивну множину $F_0$ в $\omega$ таку, що $F_0 = \bigcup\mathscr{F}$, є одиницею напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. Нехай $(i,j,F)$ — довільний елемент напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. Оскільки $F_0$ — індуктивна підмножина в $\omega$, то $F_0 \subseteq ((-i+F_0)\cap\omega)$, і з рівності $F_0 = \bigcup\mathscr{F}$ випливає, що $(-i+F_0)\cap F = F$ для довільних $i\in\omega$ і $F\in\mathscr{F}$, а отже, отримуємо, що

$$(0,0,F_0)\cdot(i,j,F) = (i,j,(-i+F_0)\cap F) = (i,j,F)$$

і

$$(i,j,F)\cdot(0,0,F_0) = (i,j,(-i+F_0)\cap F) = (i,j,F).$$

Теорему доведено. □

**Твердження 3.** *Напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна біциклічному моноїду $\mathscr{C}(p,q)$ тоді і тільки тоді, коли $\mathscr{F}=\{F\}$ і $F$ — непорожня індуктивна підмножина в $\omega$.*

*Доведення.* ($\Longleftarrow$) Нехай $F$ — індуктивна підмножина в $\omega$ і $\mathscr{F}=\{F\}$. Для довільних $i,j,k,l\in\omega$ маємо, що

$$(i,j,F)\cdot(k,l,F) = \begin{cases} (i-j+k,l,(j-k+F)\cap F), & \text{якщо } j\leqslant k;\\ (i,j-k+l,F\cap(k-j+F)), & \text{якщо } j\geqslant k \end{cases} = \\ = \begin{cases} (i-j+k,l,F), & \text{якщо } j\leqslant k;\\ (i,j-k+l,F), & \text{якщо } j\geqslant k,\end{cases}$$

а тоді з означення напівгрупової операції на біциклічному моноїді $\mathscr{C}(p,q)$ випливає, що відображення $\mathfrak{f}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} \to \mathscr{C}(p,q)$, означене за формулою $\mathfrak{f}(i,j,F)=q^ip^j$ є ізоморфізмом.

($\Longrightarrow$) Припустимо, що напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна біциклічному моноїду $\mathscr{C}(p,q)$. Оскільки біциклічний моноїд не містить нуля, то $\varnothing\notin\mathscr{F}$. Також з теореми 4 випливає, що сім'я $\mathscr{F}$ містить індуктивну множину $F_0$ в $\omega$ таку, що $F_0=\bigcup\mathscr{F}$. Розглянемо довільну множину $F\in\mathscr{F}$. Оскільки біциклічний моноїд є біпростою інверсною напівгрупою та напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна біциклічному моноїду $\mathscr{C}(p,q)$, то $F=F_0$ за теоремою 2, а отже, $\mathscr{F}=\{F_0\}$. □

З твердження 3 випливає наслідок 4.

**Наслідок 4.** *Нехай $\mathscr{F}$ — $\omega$-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$. Якщо сім'я $\mathscr{F}$ містить непорожню індуктивну підмножину в $\omega$, то напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ містить ізоморфну копію біциклічного моноїда.*

**Теорема 5.** *Нехай $\mathscr{F}$ — $\omega$-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$. Тоді такі умови еквівалентні:*

- ***(i)*** *$\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ — біпроста напівгрупа;*
- ***(ii)*** *$\mathscr{F}$ — одноелементна сім'я;*
- ***(iii)*** *напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ або тривіальна, або ізоморфна біциклічному моноїду.*

*Доведення.* Еквівалентність умов $(\boldsymbol{i})$ і $(\boldsymbol{ii})$ випливає з теореми $2(\boldsymbol{iv})$.

Імплікація $(\boldsymbol{iii}) \Longrightarrow (\boldsymbol{ii})$ випливає з твердження 3.

Доведемо імплікацію $(\boldsymbol{ii}) \Longrightarrow (\boldsymbol{iii})$. Якщо $\mathscr{F} = \{\varnothing\}$, то з означення напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ випливає, що $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ — тривіальна (одноелементна) напівгрупа. Тому припустимо, що $\mathscr{F} = \{F\}$ для деякої непорожньої множини $F$. Позаяк сім'я $\mathscr{F}$ — $\omega$-замкнена, то $(-1+F) \cap F = F$, а отже, за лемою 6, $F$ — індуктивна підмножина в $\omega$. Далі скористаємося твердженням 3. $\square$

Якщо $\lambda$ — ненульовий кардинал, то множина $\mathscr{B}_{\lambda} = (\lambda \times \lambda) \sqcup \{0\}$ з напівгруповою операцією

$$(a,b)\cdot(c,d) = \begin{cases} (a,d), & \text{якщо } b=c; \\ 0, & \text{якщо } b \neq c, \end{cases} \qquad \text{і} \qquad (a,b)\cdot 0 = 0\cdot(a,b) = 0\cdot 0 = 0,$$

де $a,b,c,d \in \lambda$, називається *напівгрупою $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць* [12, 14].

**Твердження 4.** *Нехай $\mathscr{F}$ — $\omega$-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$. Напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна напівгрупі $\omega\times\omega$-матричних одиниць $\mathscr{B}_{\omega}$ тоді і тільки тоді, коли $\mathscr{F} = \{F, \varnothing\}$, де $F$ — одноточкова підмножина в $\omega$.*

*Доведення.* $(\Longleftarrow)$ Припустимо, що $\mathscr{F} = \{F, \varnothing\}$ і $F$ — одноточкова підмножина в $\omega$. Для довільних $i,j,k,l \in \omega$ отримаємо

$$(i,j,F)\cdot(k,l,F) = \begin{cases} (i-j+k, l, (j-k+F)\cap F), & \text{якщо } j<k; \\ (i,l,F\cap F), & \text{якщо } j=k \\ (i, j-k+l, F\cap(k-j+F)), & \text{якщо } j>k \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} (i,l,F), & \text{якщо } j=k \\ 0, & \text{якщо } j\neq k, \end{cases}$$

і очевидно, що

$$(i,j,F)\cdot 0 = 0\cdot(i,j,F) = 0\cdot 0 = 0,$$

звідки випливає, що відображення $\mathfrak{f}\colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} \to \mathscr{B}_{\omega}$, означене за формулою $\mathfrak{f}(i,j,F) = (i,j)$ є ізоморфізмом.

$(\Longrightarrow)$ Припустимо, що напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна напівгрупі $\omega\times\omega$-матричних одиниць $\mathscr{B}_{\omega}$. Зафіксуємо довільний ненульовий елемент $(i,j,F)$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. Якщо $(i,j,F)$ не є ідемпотентом, то за лемою 2 маємо, що $i \neq j$, а тоді

$$0 = (i,j,F)\cdot(i,j,F) = \begin{cases} (i-j+i, k, (j-i+F)\cap F), & \text{якщо } j<k; \\ (i, j-i+j, F\cap(i-j+F)), & \text{якщо } j>k. \end{cases}$$

Отже, для довільних різних $i,j \in \omega$ одержимо, що

$$(j-i+F)\cap F = \varnothing = F\cap(i-j+F),$$

а це означає, що для довільного натурального числа $k$ маємо, що $-k+F\cap F = \varnothing$. Звідси випливає, що множина $F$ одноелементна.

Припустимо, що сім'я $\mathscr{F}$ містить дві одноелементні множини $F_k = \{k\}$ і $F_l = \{l\}$, для деяких різних $k,l \in \omega$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $k<l$. За лемою 2 для довільного $i \in \omega$ елементи $(i+k, i+k, F_k)$ і $(i+l, i+l, F_l)$ є ідемпотентами напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, причому $(i+k, i+k, F_k) \neq (i+l, i+l, F_l)$, оскільки

$k \neq l$. Позаяк напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ і $\mathfrak{B}_{\omega}$ ізоморфні, то всі ненульові ідемпотенти в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ примітивні, а отже, отримуємо, що

$$\begin{aligned} 0 &= (i+k, i+k, F_k) \cdot (i+l, i+l, F_l) = \\ &= (i+l, i+l, (k-l+F_l) \cap F_k) = \\ &= (i+l, i+l, F_k) \neq 0, \end{aligned}$$

суперечність. З отриманої суперечності випливає, що сім'я $\mathscr{F}$ містить лише одну одноелементну множину. □

Для довільного натурального числа $n$ позначимо $n\omega = \{n \cdot i : i \in \omega\}$.

**Лема 7.** *Нескінченна підмножина $F \subseteq \omega$ задовольняє умову*

(∗) $(-k+F) \cap F = F$ *або* $(-k+F) \cap F = \varnothing$ *для довільного натурального числа* $k$

*тоді і лише тоді, коли $F = i_0 + n\omega$ для деяких натурального числа $n$ та $i_0 \in \omega$.*

*Доведення.* Імплікація ($\Longleftarrow$) очевидна.

($\Longrightarrow$) Припустимо, що нескінченна підмножина $F \subseteq \omega$ задовольняє умову (∗). Очевидно, оскільки $F$ — нескінченна множина, то існує найменше натуральне число $n_0$ таке, що $(-n_0+F) \cap F \neq \varnothing$, а отже, $(-n_0+F) \cap F = F$. Якщо $n_0 = 1$, то $F$ — індуктивна підмножина в $\omega$ за лемою 6, а отже, $F = i_0 + \omega$, де $i_0 = \min F$.

Далі вважатимемо, що $n_0 > 1$. Якщо $j_0 = \min F$, то $j_0 + n_0 \in F$, а отже $j_0 + n_0\omega \subseteq F$. Припустимо, що існує число $m \in \omega \setminus (j_0 + n_0\omega)$ таке, що $m \in F$, і нехай $j_0 + kn_0 < m < j_0 + (k+1)n_0$ для деякого натурального числа $k$. Тоді

$$m - (j_0 + n_0), \ldots, m - (j_0 + kn_0) \in F.$$

Однак $m - (j_0 + kn_0) < n_0$, а отже існує таке натуральне число $m - (j_0 + kn_0)$, що

$$-(m - (j_0 + kn_0)) + F \subseteq F,$$

що суперечить вибору числа $n_0$. З отриманої суперечності випливає імплікація ($\Longrightarrow$). □

Нагадаємо [12], шо інверсна напівгрупа $S$ з нулем 0 називається 0-*біпростою*, якщо $S$ має лише два $\mathscr{D}$-класи: $S \setminus \{0\}$ і $\{0\}$.

**Приклад 1.** Зафіксуємо довільні $i_0 \in \omega$ та натуральне число $j_0$. Приймемо $\boldsymbol{B}_{\omega}^{(i_0,j_0)} = \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, де $\mathscr{F} = \{\varnothing, i_0 + j_0\omega\}$. Тоді, очевидно, що $\mathscr{F}$ — $\omega$ -замкнена сім'я в $\mathscr{P}(\omega)$, а також за теоремою 1 інверсна напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{(i_0,j_0)}$ є 0-біпростою. Більше того, для довільного $i_0 \in \omega$ за твердженням 3 напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{(i_0,1)}$ ізоморфна біциклічному моноїду з приєднаним нулем.

Безпосередньо звичайною перевіркою доводиться, що для довільних $i_1, i_2 \in \omega$ та довільного натурального числа $j_0$ відображення $\mathfrak{h} \colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{(i_1,j_0)} \to \boldsymbol{B}_{\omega}^{(i_2,j_0)}$, означене

$$\mathfrak{h}(n, m, i_1 + j_0\omega) = (n, m, i_2 + j_0\omega) \qquad \text{і} \qquad \mathfrak{h}(0) = 0$$

є ізоморфізмом. Отже, виконується твердження 5.

**Твердження 5.** *Для довільних $i_1, i_2 \in \omega$ та довільного натурального числа $j_0$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{(i_1,j_0)}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{(i_2,j_0)}$ ізоморфні.*

Теорема 6 описує структуру 0-біпростих інверсних напівгруп $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ з точністю до ізоморфізму напівгруп.

**Теорема 6.** *Нехай $\mathscr{F}$ — $\omega$-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$, $\varnothing \in \mathscr{F}$ і $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ — 0-біпроста напівгрупа. Тоді виконується лише одна з умов:*

(1) *напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна напівгрупі $\omega{\times}\omega$-матричних одиниць $\mathscr{B}_{\omega}$;*
(2) *напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна біциклічному моноїду з приєднаним нулем;*
(3) *напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна напівгрупі $\boldsymbol{B}_{\omega}^{(0,j_0)}$ для деякого натурального числа $j_0 \geqslant 2$.*

*Доведення.* За теоремою $2(\boldsymbol{iv})$ сім'я $\mathscr{F}$ містить непорожню множину $F$ і порожню множину $\varnothing$. Припустимо, що множина $F$ скінченна. Тоді, аналогічно, як і в твердженні 4 доводиться, що $F$ одноелементна множина, а отже, за твердженням 4 напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ ізоморфна напівгрупі $\omega{\times}\omega$-матричних одиниць $\mathscr{B}_{\omega}$.

Якщо ж $F$ — нескінченна множина, то з теореми $2(\boldsymbol{iv})$ випливає, що виконується одна з умов

$$a)\ (-1+F)\cap F = F \qquad \text{або} \qquad b)\ (-1+F)\cap F = \varnothing.$$

У випадку $a)$ за твердженням 3 множина $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} \setminus \{0\}$ є піднапівгрупою в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, яка ізоморфна біциклічному моноїду, а отже, виконується твердження (2).

Якщо ж виконується умова $b)$, то за лемою 7 матимемо, що $F = j_0 + i_0\omega$ для деяких натурального числа $i_0$ та $j_0 \in \omega$. Застосувавши твердження 5, отримуємо, що виконується твердження (3). $\square$

Нагадаємо [12, 14], що *найменша* (*мінімальна*) *групова конгруенція* $\boldsymbol{\sigma}$ на інверсній напівгрупі $S$ визначається так:

$$s\boldsymbol{\sigma}t \qquad \Longleftrightarrow \qquad es = et \quad \text{для деякого} \quad e \in E(S).$$

Очевидно, якщо $\mathscr{F}$ — $\omega$-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$ і $\varnothing \in \mathscr{F}$, то напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ містить нуль, а отже, фактор-напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}/\boldsymbol{\sigma}$ ізоморфна тривіальній напівгрупі.

**Твердження 6.** *Нехай $\mathscr{F}$ — $\omega$-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$ і $\varnothing \notin \mathscr{F}$. Тоді $(i_1,j_1,F_1)\boldsymbol{\sigma}(i_2,j_2,F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ тоді і тільки тоді, коли $i_1 - j_1 = i_2 - j_2$, а отже, фактор-напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}/\boldsymbol{\sigma}$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел $\mathbb{Z}(+)$.*

*Доведення.* Нехай $(i_1,j_1,F_1)$ і $(i_2,j_2,F_2)$ — довільні елементи напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$. З означення найменшої групової конгруенції $\boldsymbol{\sigma}$ випливає, що $(i_1,j_1,F_1)\boldsymbol{\sigma}(i_2,j_2,F_2)$ тоді і тільки тоді, коли існує елемент $(i,j,F) \in \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ такий, що $(i,j,F) \preccurlyeq (i_1,j_1,F_1)$ і $(i,j,F) \preccurlyeq (i_2,j_2,F_2)$. Тоді за твердженням 2 отримаємо, що

$$F \subseteq -k_1 + F_1 \qquad \text{і} \qquad i - i_1 = j - j_1 = k_1$$

та

$$F \subseteq -k_2 + F_2 \qquad \text{і} \qquad i - i_2 = j - j_2 = k_2$$

для деяких $k_1, k_2 \in \omega$. Отож з $(i_1,j_1,F_1)\boldsymbol{\sigma}(i_2,j_2,F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ випливає, що

$$i_1 - j_1 = i_2 - j_2 = i - j.$$

Припустимо, що для елементів $(i_1, j_1, F_1)$ і $(i_2, j_2, F_2)$ напівгрупи $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ справджується рівність $i_1 - j_1 = i_2 - j_2$. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що $i_1 > i_2$. Позаяк $\mathscr{F}$ — $\omega$-замкнена підсім'я в $\mathscr{P}(\omega)$, то

$$F = F_1 \cap (i_2 - i_1 + F_2) \in \mathscr{F}.$$

Тоді $j_1 > j_2$ і за твердженням 2 отримаємо, що

$$(i_1, j_1, F) = (i_1, j_1, F \cap F_1) = (i_1, i_1, F) \cdot (i_1, j_1, F_1) \preccurlyeq (i_1, j_1, F_1)$$

і

$$\begin{aligned}(i_1, i_1, F) \cdot (i_2, j_2, F_2) &= (i_1, i_1 - i_2 + j_2, F \cap (i_2 - i_1 + F_2)) = \\ &= (i_1, j_1 - j_2 + j_2, F \cap (i_2 - i_1 + F_2)) = \\ &= (i_1, j_1, F \cap (i_2 - i_1 + F_2)) = \\ &= (i_1, j_1, F) \preccurlyeq \\ &\preccurlyeq (i_2, j_2, F_2),\end{aligned}$$

а отже, $(i_1, j_1, F_1)\boldsymbol{\sigma}(i_2, j_2, F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$.

Означимо відображення $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{\sigma}} \colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} \to Z(+)$ за формулою $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{\sigma}}(i, j, F) = i - j$. З вище доведеного випливає, що $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{\sigma}}(i_1, j_1, F_1) = \mathfrak{h}_{\boldsymbol{\sigma}}(i_2, j_2, F_2)$ тоді і лише тоді, коли $(i_1, j_1, F_1)\boldsymbol{\sigma}(i_2, j_2, F_2)$ в $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, а отже, відображення $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{\sigma}} \colon \boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}} \to Z(+)$ є гомоморфізмом і фактор-напівгрупа $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}/\boldsymbol{\sigma}$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел $\mathbb{Z}(+)$. $\square$

## Подяка

Автори висловлюють щиру подяку рецензентові за цінні поради.

## Список використаної літератури

1. В. В. Вагнер, *Обощенные группы*, ДАН СССР **84** (1952), 1119–1122.
2. O. Andersen, *Ein Bericht uber die Struktur abstrakter Halbgruppen*, PhD Thesis. Hamburg, 1952.
3. C. J. Ash, *The* $\mathscr{J}$*-classes of an inverse semigroup*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **28** (1979), no. 4, 427–432. DOI: 10.1017/S144678870001257X
4. R. H. Bruck, *A survey of binary systems*, (Erg. Math. Grenzgebiete. Neue Folge. Heft 20) Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958. DOI: 10.1007/978-3-662-43119-1
5. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. I, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1961.
6. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. II, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1967.
7. V. A. Fortunatov, *Congruences on simple extensions of semigroups*, Semigroup Forum **13** (1976), 283–295. DOI: 10.1007/BF02194949
8. G. L. Fotedar, *On a semigroup associated with an ordered group*, Math. Nachr. **60** (1974), 297–302. DOI: 10.1002/mana.19740600128
9. G. L. Fotedar, *On a class of bisimple inverse semigroups*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **4** (1978), 49–53.
10. J. A. Green, *On the structure of semigroups*, Ann. Math. Ser. 2 **54** (1951), no. 1, 163–172. DOI: 10.2307/1969317
11. O. Gutik, *On locally compact semitopological* 0*-bisimple inverse* $\omega$*-semigroups,* Topol. Algebra Appl. **6** (2018), 77–101. DOI: 10.1515/taa-2018-0008

12. M. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, Singapore, World Scientific, 1998.
13. W. D. Munn, *Uniform semilattices and bisimple inverse semigroups*, Quart. J. Math. **17** (1966), no. 1, 151–159. DOI: 10.1093/qmath/17.1.151
14. M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
15. N. R. Reilly, *Bisimple $\omega$-semigroups,* Proc. Glasgow Math. Assoc. **7** (1966), no. 3, 160–167. DOI: 10.1017/S2040618500035346
16. T. Saitô, *Proper ordered inverse semigroups*, Pacif. J. Math. **15** (1965), no. 2, 649–666. DOI: 10.2140/pjm.1965.15.649
17. R. J. Warne, *A class of bisimple inverse semigroups*, Pacif. J. Math. **18** (1966), no. 3, 563–577. DOI: 10.2140/pjm.1966.18.563
18. R. J. Warne, *Bisimple inverse semigroups mod groups*, Duke Math. J. **34** (1967), 787–812. DOI: 10.1215/S0012-7094-67-03481-3

*Стаття: надійшла до редколегії 07.12.2020*
*доопрацьована 31.12.2020*
*прийнята до друку 17.11.2021*

## ON SOME GENERALIZATION OF THE BICYCLIC MONOID

**Oleg GUTIK, Mykola MYKHALENYCH**

*Ivan Franko National University of Lviv,*
*Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine*
*e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,*
*myhalenychmc@gmail.com*

We introduce an algebraic extension $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ of the bicyclic monoid for an arbitrary $\omega$-closed family $\mathscr{F}$ subsets of $\omega$ which generalizes the bicyclic monoid, the countable semigroup of matrix units and some other combinatorial inverse semigroups. It is proved that $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ is a combinatorial inverse semigroup and Green's relations, the natural partial order on $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$, and its set of idempotents are described. We provide criteria of simplicity, 0-simplicity, bisimplicity, 0-bisimplicity of the semigroup $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ and when $\boldsymbol{B}_{\omega}^{\mathscr{F}}$ has the identity, is isomorphic to the bicyclic semigroup or the countable semigroup of matrix units.

*Key words:* semigroup, bicyclic monoid, extension.