ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 89. С. 31–38
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 89. P. 31–38
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.89.031-038

УДК 512.546

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЗА МАРКОВИМ НАБОРІВ ТИХОНОВСЬКИХ ПРОСТОРІВ 3: ІНВАРІАНТИ

Назар ПИРЧ

Українська академія друкарства,
вул. Підголоско, 19, 79020, м. Львів
e-mail: pnazar@ukr.net

У статті вивчаються властивості, що характеризують розміщення сім'ї підпросторів у тихоновському просторі, які зберігаються відношенням M-еквівалентності.

Ключові слова: вільна топологічна група, спеціальний ізоморфізм вільних груп, сім'я топологічних просторів.

1. Вступ

Ми продовжуємо вивчати еквівалентні за Марковим набори тихоновських просторів, розпочаті в [2]–[3]. Термінологія і позначення взяті з цих праць. Ми означуємо ряд топологічних властивостей, що характеризують розміщення сім'ї підпросторів у тихоновському просторі та визначаємо їхню M-інваріантність.

У [4] міститься найповніший на сьогодні систематизований виклад властивостей вільних топологічних груп, які будемо використовувати у цій праці.

Для тихоновського простору X через $F(X)$ будемо позначати вільну топологічну групу над X. Для підпростору $Y \subseteq X$ тихоновського простору X через $\langle Y \rangle$ будемо позначати підгрупу в $F(X)$ породжену множиною твірних Y. Нехай $\{X_i : i \in I\}$ – сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_i : i \in I\}$ – сім'я підпросторів топологічного простору Y. Скажемо, що сім'я $(X, \{X_i : i \in I\})$ є *M-еквівалентною* сім'ї $(Y, \{Y_i : i \in I\})$, якщо існує топологічний ізоморфізм $h\colon F(X) \to F(Y)$, такий, що $h(X_i) \subseteq \langle Y_i \rangle$ і $h^{-1}(Y_i) \subseteq \langle X_i \rangle$ для всіх $i \in I$. Позначатимемо це так:

$$(X, \{X_i : i \in I\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_i : i \in I\}).$$

2020 Mathematics Subject Classification: 22A05
© Пирч, Н., 2020

Міняючи в цьому означенні функтор вільної топологічної групи на функтори вільної абелевої топологічної групи та вільного локально опуклого простору, отримаємо поняття A-еквівалентних і L-еквівалентних наборів.

Скажемо, що ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$ спеціальний, якщо композиція $e_Y^* \circ i$ є постійним відображенням, де $e_Y^*\colon F(Y) \to \mathbb{Z}$ — гомоморфізм, що продовжує функцію $e_Y\colon Y \to \mathbb{Z}$, яка тотожно рівна 1 на Y. Через $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots \overline{n-1}\}$ будемо позначати скінченну групу лишків, наділену дискретною топологією.

2. Про деякі інваріанти відношення M-еквівалентності

Нехай G_1 – топологічна група. Скажемо, що система підпросторів $\{X_s : s \in S\}$ є G_1-*віддільною в* X, якщо існує неперервне відображення $f\colon X \to G_1$ таке, що $f(X_s) \subseteq \{a_s\}$, і $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$.

Твердження 1. *Нехай $\{X_s : s \in S\}$ – сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_s : s \in S\}$ – сім'я підпросторів топологічного простору Y, G_1 – топологічна група. Нехай також існує спеціальний топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $i(\langle X_s \rangle) = \langle Y_s \rangle$ для всіх $s \in S$. Якщо система $\{X_s : s \in S\}$ є G_1-віддільною в X, то система $\{Y_s : s \in S\}$ є G_1-віддільною в Y.*

Доведення. Нехай $i\colon F(X) \to F(Y)$ спеціальний топологічний ізоморфізм такий, що $i(\langle X_s \rangle) = \langle Y_s \rangle$ для всіх $s \in S$. Нехай $f\colon X \to G_1$, неперервне відображення таке, що $f(X_s) \subseteq \{a_s\}$. Продовжимо відображення $f\colon X \to G_1$ до неперервного гомоморфізму $f^*\colon F(X) \to G_1$. Приймемо $g^* = f^* \circ i^{-1}$. Нехай $b \in Y_s$, причому

$$i^{-1}(b) = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n},$$

де $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 1$. Тоді

$$g(b) = f^* \circ i^{-1}(b) = f^*(x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n}) = a_s^{\varepsilon_1} a_s^{\varepsilon_2} \ldots a_s^{\varepsilon_n} = a_s^{\varepsilon_n} = g^{\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i} = a_s^1 = a_s.$$

Отож, $g(Y_s) \subseteq \{a_s\}$.

□

Наслідок 1. *Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – скінченна сім'я підпросторів тихоновського простору X, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ – скінченна сім'я підпросторів тихоновського простору Y. Якщо існують спеціальний топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $i(\langle X_s \rangle) = \langle Y_s \rangle$ для всіх $s = 1, .., n$ та система відкрито-замкнених диз'юнктних множин $V_1, V_2, \cdots, V_n$ в X таких, що $X_s \subseteq V_s$ для всіх $s = 1, .., n$, то існує система відкрито-замкнених диз'юнктних множин $U_1, U_2, \cdots, U_n$ в Y таких, що $Y_s \subseteq U_s$ для всіх $s = 1, .., n$.*

Доведення. Згадана умова еквівалентна умові $\mathbb{Z}_n$-віддільності. □

Нехай G_1 – топологічна група. Будемо говорити, що сім'я підпросторів $\{X_s : s \in S\}$ топологічного простору X *утворює* G_1-*покриття*, якщо для довільного відображення $f\colon X \to G_1$ з неперервності усіх звужень $f|_{X_s}$ випливає неперервність відображення f.

Нагадаємо, що підпростір Y топологічного простору X називається P-*вкладеним*, якщо довільна неперервна псевдометрика, задана на просторі Y, допускає неперервне продовження на X. Якщо підпростір Y є P-вкладеним у X, то підгрупа $\langle Y\rangle$ вільної топологічної групи $F(X)$, породжена множиною твірних Y є топологічно ізоморфною $F(Y)$.

Твердження 2. *Нехай $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y, G — топологічна група та*

$$(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\}).$$

Якщо сім'я $\{X_s : s \in S\}$ утворює G-покриття простору X, а усі елементи сім'ї $\{Y_s : s \in S\}$ є P-вкладеними в Y, то сім'я $\{Y_s : s \in S\}$ утворює G-покриття простору Y.

Доведення. Нехай $f\colon Y \to G$ — відображення таке, що усі звуження $f|_{Y_s}$ неперервні. Продовжимо відображення f до гомоморфізму $f^*\colon F(Y) \to G$. Оскільки всі елементи сім'ї $\{Y_s : s \in S\}$ є P-вкладеними в Y, то кожна підгрупа $\langle Y_i\rangle$ топологічно ізоморфна групі $F(Y_i)$, а тому усі гомоморфізми $f^*|_{\langle Y_s\rangle}\colon \langle Y_s\rangle \to G$ є неперервними. Отож, усі звуження $f^*|_{X_s}$ неперервні. З того, що сім'я $\{X_s : s \in S\}$ утворює G-покриття простору X, випливає неперервність відображення $f^*|_X$, звідки випливає неперервність гомоморфізму f^*, а отже, і неперервність самого відображення f. $\square$

Твердження 3. *Нехай G — топологічна група, $\{\tau_s : s \in S\}$ — сім'я нескінченних кардиналів, $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y,*

$$(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\}),$$

а довільне неперервне відображення $f\colon X \to G$ має ту властивість, що $|f(X_s)| \leqslant \tau_s$ для всіх $s \in S$. Тоді довільне неперервне відображення $h\colon Y \to G$ має ту властивість, що $|h(Y_s)| \leqslant \tau_s$ для всіх $s \in S$.

Доведення. Якщо простір X нескінченний, то $|X| = |\langle X\rangle|$. Нехай $f\colon Y \to G$ — неперервне відображення. Тоді для кожного $s \in S$ виконується

$$|h(Y_s)| = |\langle h(Y_s)\rangle| = |h^*(Y_s)| = |f^*(X_s)| = |\langle f(X_s)\rangle| = |f(X_s)|.$$

$\square$

Для топологічного простору X через $nw(X)$ позначимо сіткову вагу простору X.

Твердження 4. *Нехай G — топологічна група, $\{\tau_s : s \in S\}$ — сім'я нескінченних кардиналів, $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y,*

$$(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\}),$$

а довільне неперервне відображення $f\colon X \to G$ має ту властивість, що $nw(f(X_s)) \leqslant \tau_s$ для всіх $s \in S$. Тоді довільне неперервне відображення $h\colon Y \to G$ має ту властивість, що $nw(h(Y_s)) \leqslant \tau_s$ для всіх $s \in S$.

Доведення. Нехай X — підпростір топологічної групи G. Якщо сіткова вага простору X нескінченна, то $nw(X) = nw(\langle X\rangle)$. Якщо X_1 та X_2 підпростори топологічної групи G, то
$$nw(X_1 \cdot X_2) \leqslant \max\{nw(X_1), nw(X_2)\}.$$
Отож, для кожного $s \in S$ виконується
$$nw(h(Y_s)) = nw(\langle h(Y_s)\rangle) = nw(h^*(Y_s)) = nw(f^*(X_s)) = nw(\langle f(X_s)\rangle) = nw(f(X_s)).$$
□

Будемо говорити, що підпростір $A \subseteq X$ *є зв'язним стосовно* X, якщо для довільних двох неперетинних відкрито-замкнених підмножин $U, V \subseteq X$ таких, що $U \cup V = X$ маємо, що $A \subseteq U$ або $A \subseteq V$.

Твердження 5. *Нехай $(X, A) \overset{M}{\sim} (Y, B)$ і простір A є зв'язним стосовно X. Тоді простір B є зв'язним стосовно Y.*

Доведення випливає з наступної леми.

Лема 1. *Підпростір $A \subseteq X$ є зв'язним стосовно X тоді і тільки тоді, коли існує не більше двох неперервних гомоморфізмів $\langle A\rangle \to \mathbb{Z}_2$, які допускають продовження на $F(X)$.*

Доведення. Необхідність. Припустимо, що простір A є незв'язним стосовно X, U та V — множини зазначені в умові незв'язності. Розглянемо відображення $f\colon A \to G$, прийнявши $f(x) = \overline{0}$, якщо $x \in A \cap U$ і $f(x) = \overline{1}$, якщо $x \in A \cap V$. Тоді відображення f, а також відображення тотожно рівні $\overline{0}$ та $\overline{1}$, допускають неперервне продовження на X.

Достатність. Припустимо, що існує щонайменше три відображення з простору G у топологічну групу $\mathbb{Z}_2$, які продовжуються неперервно на X. Серед них існує відображення $f\colon A \to G$, яке не є сталим на A. Нехай $F\colon X \to \mathbb{Z}_2$ — неперервне продовження відображення f. Приймемо $U = F^{-1}(\overline{0})$, $V = F^{-1}(\overline{1})$. Тоді
$$U \cup V = X, \quad U \cap V = \varnothing, \quad A \cap U \neq \varnothing, \quad A \cap V \neq \varnothing,$$
що суперечить зв'язності множини A стосовно X. □

Твердження 5 легко узагальнюється на випадок більшої кількості підпросторів. Нехай $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X. Скажемо, що *сім'я* $\{X_s : s \in S\}$ *є зв'язною стосовно* X, якщо не існує відкрито-замкнених підмножин U і V в X таких, що:

1) $U \cap V = \varnothing$, $U \cup V = X$;
2) для всіх $s \in S$ виконується $U \cap X_s = \varnothing$ або $V \cap X_s = \varnothing$,

або іншими словами, не можна відокремити простір X, не відокремивши принаймні одного з підпросторів X_s.

Твердження 6. *Нехай $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y. Нехай також існує спеціальний топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $i(\langle X_s\rangle) = \langle Y_s\rangle$ для всіх $s \in S$. Якщо сім'я підпросторів $\{X_s : s \in S\}$ простору X є зв'язною стосовно X, то сім'я підпросторів $\{Y_s : s \in S\}$ простору Y є зв'язною стосовно Y.*

3. G-зв'язні та G-стабільні підпростори

Нехай G — топологічна група. Скажемо, що сім'я підпросторів $\{X_s : s \in S\}$ топологічного простору X є *G-зв'язною в* X , якщо для довільного неперервного відображення $f\colon X \to G_1$ з умови $f|_X \neq \mathrm{const}$ випливає, що існує $s \in S$, що $f|_{X_s} \neq \mathrm{const}$.

Теорема 1. *Нехай G — топологічна група, $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y такі, що існує спеціальний топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$, що задовольняє умову $i(\langle X_s\rangle) = \langle Y_s\rangle$ для всіх $s \in S$. Якщо сім'я підпросторів $\{X_s : s \in S\}$ простору X G-зв'язна в X, то сім'я підпросторів $\{Y_s : s \in S\}$ простору Y є G-зв'язною в Y.*

Доведення. Припустимо, що сім'я підпросторів $\{X_s : s \in S\}$ простору X G-зв'язна в X. Нехай $i\colon F(X) \to F(Y)$ спеціальний топологічний ізоморфізм такий, що $i(\langle X_s\rangle) = \langle Y_s\rangle$ для всіх $s \in S$, $h\colon Y \to G$, неперервне відображення таке, що $h|_Y \neq const$. Продовжимо відображення $h\colon Y \to G$ до неперервного гомоморфізму $h^*\colon F(X) \to G$. Приймемо $f^* = h^* \circ i$, $f = f^*|_X$. Відображення f є неперервним. Доведемо, що $f|_X \neq \mathrm{const}$. Припустимо $f(X) = \{a\}$ для деякого $a \in G$. Нехай $b \in Y$, $i^{-1}(b) = a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \dots a_n^{\varepsilon_n}$, де $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 1$. Тоді

$$h(b) = a^{\varepsilon_1} a^{\varepsilon_2} \dots a^{\varepsilon_n} = a^{\varepsilon_n} = g^{\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i} = a^1 = a.$$

Отримали суперечність з тим, що $f|_X \neq \mathrm{const}$. Отож, існує $s \in S$, що $f|_{X_s} \neq \mathrm{const}$. Міркуваннями аналогічними до попередніх доводимо, що $h|_{Y_s} \neq \mathrm{const}$. □

Наслідок 2. *Нехай G — топологічна група, X — тихоновський простір, підпростір X_1 є G-зв'язним в X, $(X, X_1) \overset{M}{\sim} (Y, Y_1)$. Тоді підпростір Y_1 G-зв'язний в Y.*

Будемо говорити, що топологічний простір X *G-зв'язний*, якщо довільне неперервне відображення з топологічного простору X у топологічну групу G є сталим.

Наслідок 3. *Нехай G — топологічна група, X — тихоновський простір, простір X G-зв'язний у X, $X \overset{M}{\sim} Y$. Тоді простір Y є G-зв'язним.*

Аналогічно до твердження 1 доводяться твердження 7 і 8.

Твердження 7. *Нехай G — топологічна група, τ — довільний кардинал, $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y такі, що існує спеціальний топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$, що задовольняє умову $i(\langle X_s\rangle) = \langle Y_s\rangle$ при всіх $s \in S$. Нехай також для довільного неперервного відображення $f\colon X \to G$ з умови $f|_X \neq \mathrm{const}$ випливає, що існує $|\tau|$ підпросторів з сім'ї $\{X_s : s \in S\}$ таких, що $f|_{X_s} \neq \mathrm{const}$ для кожного елемента з цієї сім'ї. Тоді для довільного неперервного відображення $h\colon Y \to G_1$ з умови $h|_Y \neq \mathrm{const}$ випливає, що існує $|\tau|$ підпросторів з сім'ї $\{Y_s : s \in S\}$ таких, що $h|_{Y_s} \neq \mathrm{const}$ для кожного елемента з цієї сім'ї.*

Твердження 8. *Нехай G — топологічна група, $\{X_s : s \in S\}$, $\{K_s : s \in S\}$ — сім'ї підпросторів топологічного простору X, $\{Y_s : s \in S\}$, $\{P_s : s \in S\}$ — сім'ї підпросторів топологічного простору Y, τ — довільний кардинал такі, що існує спеціальний топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $i(\langle X_s \rangle) = \langle Y_s \rangle$, $i(\langle K_s \rangle) = \langle P_s \rangle$ для всіх $s \in S$. Якщо для довільного неперервного відображення $f\colon X \to G$ з умови $f|_X \neq \mathrm{const}$, $f|_{K_j} = \mathrm{const}_j$ випливає, що існує $|\tau|$ підпросторів з сім'ї $\{X_s : s \in S\}$ таких, що $f|_{X_s} \neq \mathrm{const}$ для кожного елемента з цієї сім'ї. Тоді для довільного неперервного відображення $h\colon Y \to G$ з умови $h|_Y \neq \mathrm{const}$, $h|_{P_j} = \mathrm{const}_j$ випливає, що існує $|\tau|$ підпросторів з сім'ї $\{Y_s : s \in S\}$ таких, що $h|_{Y_s} \neq \mathrm{const}$ для кожного елемента з цієї сім'ї.*

Нехай G — топологічна група, $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпрострів топологічного простору X. Будемо говорити, що ця сім'я *G-стабільна*, якщо для довільного неперервного відображення $f\colon X \to G$, для довільного $s \in S$ матимемо, що звуження $f|_{X_s}$ є сталим.

Твердження 9. *Нехай G — топологічна група, $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів тихоновського простору X, $\{Y_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів тихоновського простору Y. Якщо існує спеціальний топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $i(\langle X_s \rangle) = \langle Y_s \rangle$ для всіх $s \in S$, а сім'я є G-стабільною в X, то сім'я $\{Y_s : s \in S\}$ є G-стабільною в Y.*

Доведення. Нехай підмножина A G-стабільна в X. Нехай також $f\colon Y \to G$ — неперервне відображення, $f^*\colon F(Y) \to G$ — його неперервне продовження. Оскільки підмножина A G-стабільна в X, то $f^*(A) \subseteq \{g\}$ для деякого $g \in G$. Нехай $b \in B$, тоді $i^{-1}(b) = a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \dots a_n^{\varepsilon_n}$, де $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 1$. Тоді

$$f(g) = g^{\varepsilon_1} g^{\varepsilon_2} \dots g^{\varepsilon_n} = g^{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i} = g^1 = g.$$

□

Наслідок 4. *Нехай G — топологічна група, $(X, A) \overset{M}{\sim} (Y, B)$ а підпростір A G-стабільна в X. Тоді підпростір B G-стабільний в Y.*

Доведення. Якщо $(X, A) \overset{M}{\sim} (Y, B)$, то існує спеціальний топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $i(\langle A \rangle) = \langle B \rangle$ ([1]). Тепер залишається застосувати твердження 9. □

Нехай $Z \subseteq Y \subseteq X$ — тихоновські простори, G — топологічна група. Скажемо, що *пара (Y, Z) G-стабільна*, якщо для довільного неперервного відображення $f\colon X \to G$ такого, що $f|_Z = \mathrm{const}$ маємо, що $f|_Y = \mathrm{const}$.

Твердження 10. *Нехай $Z_1 \subseteq Y_1 \subseteq X_1$, $Z_2 \subseteq Y_2 \subseteq X_2$ — тихоновські простори, $(X_1, Y_1, Z_1) \overset{M}{\sim} (X_2, Y_2, Z_2)$, G — топологічна група і пара (Y_1, Z_1) G-стабільна в X_1. Тоді пара (Y_2, Z_2) G-стабільна в X_2.*

Доведення. З того, що $(X_1, Y_1, Z_1) \overset{M}{\sim} (X_2, Y_2, Z_2)$ випливає, що існує спеціальний топологічний ізоморфізм $i\colon F(X_1) \to F(X_2)$ такий, що $i(\langle Y_1 \rangle) = \langle Y_2 \rangle$, $i(\langle Z_1 \rangle) = \langle Z_2 \rangle$.

Нехай також $f\colon X_2 \to G$ — неперервне відображення таке, що $f|_{Z_2} = g$ для деякого $g \in G$ $f^*\colon F(X_2) \to G$ — його неперервне продовження. Доведемо, що $i \circ f^*(Z_2) = \{g\}$. Аналогічно до твердження 9 доводиться, що $f^* \circ i^{-1}|_{Z_1} = \mathrm{const}$. Звідси, за G-стабільністю пари (Y_1, Z_1), отримаємо, що $f^* \circ i^{-1}|_{Y_1} = \mathrm{const}$. Аналогічно до твердження 9 отримаємо, що $f|_{Y_2} = \mathrm{const}$. □

Нехай $Z \subseteq Y \subseteq X$ — тихоновські простори, тоді скажемо, що *пара* (Y, Z) *зв'язна* стосовно X, якщо не існує двох відкрито замкнених підмножин U і V в X таких, що:

1) $U \cap V = \varnothing$, $U \cup V = X$;
2) $U \cap Y \neq \varnothing$, $V \cap Y \neq \varnothing$;
3) $Z \subset U$ або $Z \subset V$;

або іншими словами, не можна відокремити множину Y в X, не відокремивши множини Z.

Наслідок 5. *Нехай $Z_1 \subseteq Y_1 \subseteq X_1$, $Z_2 \subseteq Y_2 \subseteq X_2$ — тихоновські простори, $(X_1, Y_1, Z_1) \overset{M}{\sim} (X_2, Y_2, Z_2)$ і пара (Y_1, Z_1) зв'язна стосовно X_1. Тоді пара (Y_2, Z_2) є зв'язною стосовно X_2.*

Доведення випливає з очевидної леми 2.

Лема 2. *Нехай $Z \subseteq Y \subseteq X$ — тихоновські простори. Пара (Y, Z) зв'язна стосовно X тоді тільки тоді, коли вона є $\mathbb{Z}_2$-стабільною.*

Нехай G — топологічна група. Будемо говорити, що підпростір $A \subseteq X$ *G-щільний в X*, якщо довільне неперервне відображення $f\colon A \to G$ допускає не більше одного неперервного продовження на X.

Лема 3. *Наступні умови є еквівалентними для топологічного простору X та його підпростору A:*

(1) *A є G-щільним в X;*
(2) *відображення $t\colon A \to G$ означене як $t|_A = e_G$ допускає єдине неперервне продовження на X.*

Доведення. Імплікація (1) ⇒ (2) є очевидною.

(2) ⇒ (1) Нехай $f\colon A \to G$ — деяке неперервне відображення. Припустимо, що f допускає два неперервних продовження F_1 та F_2 на X. Відображення F_1^{-1} та F_2^{-1} є неперервними продовженнями відображення f_{-1}. Тоді відображення $F_1 \cdot F_2^{-1}$ та $F_1 \cdot F_1^{-1}$ є неперервними продовженнями відображення на $f \cdot f^{-1}$. □

Теорема 2. *Нехай $(X, A) \overset{M}{\sim} (Y, B)$ і підпростір A G-щільний в X. Тоді підпростір B G-щільний в Y.*

Доведення. Нехай простір A G-щільний в X. Доведемо, що простір B G-щільний в X. Нехай $s\colon B \to G$ — відображення таке, що $s(B) = \{e_G\}$, $S\colon Y \to G$ — його продовження. Нехай $i\colon F(X) \to F(Y)$ — спеціальний топологічний ізоморфізм такий, що $i(\langle A\rangle) = \langle B\rangle$, $S^*\colon F(Y) \to G$ — гомоморфне продовження відображення. Тоді $S^*(W) = e_G$ для всіх $W \in \langle B\rangle$ Приймемо $f^* = S^* \circ i^{-1}$, $f = f^*|_X$. За побудовою $f^*(V) = e_G$ для всіх $V \in \langle A\rangle$. Отже, $f|_A$ — відображення, що має властивість

$f(A) \subseteq \{e_G\}$. За G-щільністю множини A в X отримаємо, що $f(X) = \{e_G\}$. Звідки, $f^*(F(X)) = \{e_G\}$, отже, $S^* = f^* \circ i^{-1}(F(Y)) = \{e_G\}$ і ми отримали єдиність неперервного продовження відображення s на множину Y. Тому за лемою 3 підпростір B є G-щільним в Y. $\square$

Якщо у всіх твердженнях цієї праці в якості групи G взяти абелеву топологічну групу, то можна замінити в цих твердженнях відношення M-еквівалентності на відношення A-еквівалентності.

Автор висловлює щиру подяку проф. Зарічному М. М. і рецензентам за цінні поради.

Список використаної літератури

1. Н. М. Пирч, *M-еквівалентність пар*, Прикладні проблеми математики і механіки **2** (2004), 74–79.
2. Н. М. Пирч, *Еквівалентність за Марковим наборів тихоновських просторів 1: загальні властивості*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **84** (2017), 38–46.
3. Н. М. Пирч, *Еквівалентність за Марковим наборів тихоновських просторів 2: спеціальні ізоморфізми*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **88** (2019), 59–69.
4. A. V. Arhangel'skii and M. G. Tkachenko, *Topological groups and related structures*, Atlantis Press, Amsterdam-Paris, 2008, 781 p.

Стаття: надійшла до редколегії 07.12.2020
доопрацьована 14.12.2020
прийнята до друку 23.12.2020

ON MARKOV EQUIVALENCE OF THE BUNDLES OF THE TYCHONOFF SPACES 3: INVARIANTS

Nazar PYRCH

Ukrainian Academy of Printing,
Pidgolosko Str., 19, 79020, Lviv, Ukraine
e-mail: pnazar@ukr.net

We consider topological properties characterizing of the position of the family of subspaces in a Tychonoff space which are preserved by the relation of M-equivalence.

Key words: free topological group, special isomorphism of the free groups, bundle of topological spaces.