ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 89. С. 11–16
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 89. P. 11–16
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.89.011-016

УДК 512.53

ВАРІАНТИ ПРЯМОКУТНИХ В'ЯЗОК

Олександра ДЕСЯТЕРИК

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
просп. Академіка Глушкова, 4е, 03127, м. Київ
e-mail: sasha.desyaterik@gmail.com

Доведено, що всі варіанти прямокутної в'язки попарно ізоморфні. Досліджено варіанти прямокутної в'язки з приєднаною одиницею та з приєднаним нулем.

Ключові слова: варіант, сендвіч напівгрупа, прямокутна в'язка.

Для кожної напівгрупи $(S,\cdot)$ та довільного фіксованого елемента $a \in S$ можна задати нову бінарну асоціативну операцію $*_a$ на множині S

$$x *_a y = x \cdot a \cdot y$$

для довільних $x, y \in S$. Операцію $*_a$ називають *сендвіч-множенням*, а напівгрупу $(S, *_a)$ — *сендвіч-напівгрупою* чи *варіантом.*

Варіанти напівгруп вивчають різні автори ще з 60-х років двадцятого століття. В [11] розглядаються варіанти напівгруп перетворень, які й надалі досліджувалися, наприклад, у [3]. Дослідження варіантів охоплює різні класи напівгруп (див., наприклад, [7], та главу 13 із [5]). Варіанти напівгруп прямокутних матриць розглянуті у [4]. У багатьох працях (див., наприклад, [6] та [12]) вивчали інтерасоціативності моноїдів, які тісно пов'язані з варіантами. Варіанти регулярних напівгруп досліджували у [9] та [10]. Для комутативних в'язок з нулем у [2] встановлено критерій ізоморфності двох варіантів і класифіковано варіанти деяких конкретних в'язок.

В'язкою називається напівгрупа, всі елементи якої є ідемпотентами. Будемо називати напівгрупу S *прямокутною в'язкою*, якщо $xyx = x$ для довільних $x, y \in S$. Очевидно, що така напівгрупа є регулярною.

Ми досліджуємо варіанти прямокутних в'язок і прямокутних в'язок з приєднаною одиницею та нулем.

З теореми 1.1.3 [8] випливає, що для довільної прямокутної в'язки S існують непорожні множини X і Y такі, що напівгрупа S ізоморфна напівгрупі, визначеній

2020 Mathematics Subject Classification: 20M10 на множині $X \times Y$ з бінарною операцією

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1, y_2), \tag{1}$$

і для довільних непорожніх множин X і Y множина $X \times Y$ з бінарною операцією (1) є прямокутною в'язкою.

Надалі будемо вважати, що S – прямокутна в'язка $X \times Y$ з бінарною операцією (1). Для початку розглянемо варіанти прямокутної в'язки S.

Твердження 1. *Довільний варіант $(S, *_{(x_a,y_b)})$, де $(x_a, y_b) \in S$ ізоморфний початковій прямокутній в'язці S.*

Доведення. Запишемо як діє множення у варіанті $(S, *_{(x_a,y_b)})$. Для довільних (x_i, y_j), $(x_k, y_l) \in S$ результат множення цих елементів на варіанті $(S, *_{(x_a,y_b)})$ визначається так:

$$\begin{aligned}(x_i, y_j) *_{(x_a,y_b)} (x_k, y_l) &= (x_i, y_j) \cdot (x_a, y_b) \cdot (x_k, y_l) = \\ &= ((x_i, y_j) \cdot (x_a, y_b)) \cdot (x_k, y_l) = \\ &= (x_i, y_b) \cdot (x_k, y_l) = \\ &= (x_i, y_l).\end{aligned}$$

Тоді очевидно, що множення $*_{(x_a,y_b)}$ у варіанті діє як множення $\cdot$ у прямокутній зв'язці S, тобто

$$(x_i, y_j) *_{(x_a,y_b)} (x_k, y_l) = (x_i, y_l) = (x_i, y_j) \cdot (x_k, y_l).$$

Тобто довільний варіант $(S, *_{(x_a,y_b)})$ ізоморфний початковій прямокутній в'язці S, причому ізоморфізмом є тотожне відображення. $\square$

З твердження 1 напряму випливає теорема 1.

Теорема 1. *Усі варіанти $(S, *_{(x_i,y_j)})$ прямокутної в'язки S попарно ізоморфні та ізоморфні початковій прямокутній в'язці S.*

Прямокутна в'язка S не має одиниці. Розглянемо прямокутну в'язку з приєднаною одиницею. Приймемо

$$1 \cdot (x_i, y_j) = (x_i, y_j) \cdot 1 = (x_i, y_j)$$

для всіх $(x_i, y_j) \in S$ та $1 \cdot 1 = 1$. Тоді позначимо через S^1 прямокутну в'язку S з приєднаною одиницею 1.

Нехай S – прямокутна в'язка, яка ізоморфна напівгрупі $A \times B$. Тоді елементи напівгрупи S можна подати у вигляді (a_i, b_j).

Якщо $(S^1, *_{(a_q,b_r)})$ та $(S^1, *_{(a_f,b_h)})$ – варіанти напівгрупи S^1, будова якої наведена вище. То далі ми з'ясуємо, за яких умов два варіанти прямокутної в'язки з приєднаною одиницею S^1 будуть попарно ізоморфними.

Розглянемо два варіанти, які породжені елементами (a_i, b_k) та (a_i, b_v), у яких перші координати є однаковими.

Твердження 2. *Нехай a_i — довільний, але фіксований елемент множини A, та $b_k, b_v \in B$ — довільні елементи. Тоді варіанти $(S^1, *_{(a_i,b_k)})$ і $(S^1, *_{(a_i,b_v)})$ сендвіч-елементом відмінним від 1, ізоморфні.*

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 89

Доведення. Розглянемо відображення $\varphi\colon (S^1, *_{(a_i,b_k)}) \to (S^1, *_{(a_i,b_v)})$ таке, що $\varphi((a_l, b_k)) = (a_l, b_v)$ та $\varphi((a_l, b_v)) = (a_l, b_k)$ для довільного $a_l \in A$ та фіксованих $b_k, b_v \in B$, а на всіх інших елементах φ діє як тотожне відображення. Доведемо, що φ є ізоморфізм варіантів.

Щоб довести, що відображення φ є ізоморфізмом, необхідно довести виконання такої рівності:

$$\varphi(c *_{(a_i,b_k)} d) = \varphi(c) *_{(a_i,b_v)} \varphi(d), \tag{2}$$

для довільних $c, d \in S^1$.

Розглянемо множення у варіантах і дію φ на нього. Зауважимо, що за означенням множення у варіанті $(S, *_{(a_i,a_i)})$, якщо ми множимо не одиничні елементи, то маємо $(\boldsymbol{a}_r, b_f) *_{(a_i,b_i)} (a_l, \boldsymbol{b}_g) = (\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_g)$. Тобто на результат множення впливають тільки перша координата першого множника a_r та друга координата останнього множника b_g. Якщо хоча б один з елементів є 1, то множення відбувається за правилом наведеним для приєднаної одиниці. Зважаючи, що φ не змінює першу координату, то маємо такі умови. Необхідно і достатньо розглянути ті випадки, коли у пар множників відрізняється друга координата останнього множника. Оскільки ми розглядаємо варіанти напівгрупи з приєднаною одиницею, ще випадки, коли один з множників є одиницею.

Отож, щоб довести виконання рівності (2), розглянемо наступні шість випадків. Для кожного з цих випадків випишемо окремо ліву і праву частини (2), перетворимо їх так, щоб вони були рівними.

i. Для довільних $a_x, a_z \in A$, $b_y \in B$ та $B \ni b_t \neq b_k, b_v$ маємо, що

$$\varphi((a_x, b_y) *_{(a_i,b_k)} (a_z, b_t)) = \varphi(a_x, b_t) = (a_x, b_t)$$

та

$$\varphi((a_x, b_y)) *_{(a_i,b_v)} \varphi((a_z, b_t)) = (a_x, b_y)(a_i, b_v)(a_z, b_t) = (a_x, b_t).$$

ii. Для довільних $a_x, a_z \in A$, $b_y \in B$ та фіксованого $b_k \in B$ виконуються рівності

$$\varphi((a_x, b_y) *_{(a_i,b_k)} (a_z, b_k)) = \varphi(a_x, b_k) = (a_x, b_v)$$

та

$$\varphi((a_x, b_y)) *_{(a_i,b_v)} \varphi((a_z, b_k)) = (a_x, b_y)(a_i, b_v)(a_z, b_v) = (a_x, b_v).$$

iii. Для довільних $a_x, a_z \in A$, $b_y \in B$ та фіксованого $b_v \in B$ отримуємо, що

$$\varphi((a_x, b_y) *_{(a_i,b_k)} (a_z, b_v)) = \varphi(a_x, b_v) = (a_x, b_k)$$

та

$$\varphi((a_x, b_y)) *_{(a_i,b_v)} \varphi((a_z, b_v)) = (a_x, b_y)(a_i, b_v)(a_z, b_k) = (a_x, b_k).$$

iv. У випадку множення на одиницю справа маємо

$$\varphi((a_x, b_y) *_{(a_i,b_k)} 1) = \varphi(a_x, b_k) = (a_x, b_v)$$

та

$$\varphi((a_x, b_y)) *_{(a_i,b_v)} \varphi(1) = (a_x, b_y)(a_i, b_v)1 = (a_x, b_v).$$

$v.$ У випадку множення на одиницю зліва розглянемо три випадки. Оскільки φ змінює другу координату, то залежно від того, чи друга координата множника дорівнює якійсь з координат елемента, який породжує варіант чи ні, ми перевіримо виконання необхідних рівностей. У першому випадку маємо

$$\varphi(1 *_{(a_i,b_k)} (a_z, b_y)) = \varphi(a_i, b_y) = (a_i, b_y)$$

та

$$\varphi(1) *_{(a_i,b_v)} \varphi((a_z, b_y)) = 1(a_i, b_v)(a_z, b_y) = (a_i, b_y).$$

Тобто,

$$\varphi(1 *_{(a_i,b_k)} (a_z, b_y)) = \varphi(1) *_{(a_i,b_v)} \varphi((a_z, b_y)).$$

У другому випадку отримуємо, що

$$\varphi(1 *_{(a_i,b_k)} (a_z, b_k)) = \varphi(a_i, b_k) = (a_i, b_v)$$

та

$$\varphi(1) *_{(a_i,b_v)} \varphi((a_z, b_k)) = 1(a_i, b_v)(a_z, b_v) = (a_i, b_v)$$

Тобто,

$$\varphi(1 *_{(a_i,b_k)} (a_z, b_k)) = \varphi(1) *_{(a_i,b_v)} \varphi((a_z, b_k)).$$

І нарешті, у третьому впиадку маємо, що

$$\varphi(1 *_{(a_i,b_k)} (a_z, b_v)) = \varphi(a_i, b_v) = (a_i, b_k)$$

і

$$\varphi(1) *_{(a_i,b_v)} \varphi((a_z, b_v)) = 1(a_i, b_v)(a_z, b_k) = (a_i, b_k).$$

$vi.$ У результаті перемноження двох одиниць у варіанті отримуємо такі рівності: $\varphi(1 *_{(a_i,b_k)} 1) = \varphi(a_i, b_k) = (a_i, b_v)$ і $\varphi(1) *_{(a_i,b_v)} \varphi(1) = 1(a_i, b_v)1 = (a_i, b_v)$.

Отож, ми довели, що для довільних $a_x, a_z \in A$ та $b_y, b_t \in B$ виконується рівність

$$\varphi((a_x, b_y) *_{(a_i,b_k)} (a_z, b_t)) = \varphi((a_x, b_y)) *_{(a_i,b_v)} \varphi((a_z, b_t)),$$

тобто відображення $\varphi : (S^1, *_{(a_i,b_k)}) \to (S^1, *_{(a_i,b_v)})$ є напівгруповим ізоморфізмом, оскільки воно є бієктивним. □

Далі розглянемо два варіанти, які породжені елементами (a_k, b_i) та (a_v, b_i), тобто такими, в яких другі координати є однаковими.

Твердження 3. *Нехай b_i – довільний, але фіксований елемент з B, та $a_k, a_v \in A$ – довільні елементи. Тоді варіанти $(S^1, *_{(a_k,b_i)})$ та $(S^1, *_{(a_v,b_i)})$ ізоморфні.*

Доведення. Розглянемо відображення $\psi\colon (S^1, *_{(a_k,b_i)}) \to (S^1, *_{(a_v,b_i)})$ таке, що $\psi((a_k, b_l)) = (a_v, b_l)$ та $\psi((a_v, b_l)) = (a_k, b_l)$ для фіксованих $a_k, a_v \in A$ та довільного $b_l \in B$, на всіх інших елементах ψ діє як тотожне відображення. Далі доведення аналогічне до доведення твердження 2. □

Отож, твердження 3 і 2 можна узагальнити у теорему 2.

Теорема 2. *Всі варіанти прямокутної в'язки з приєднаною одиницею S^1, сендвіч елементом яких не є одиниця, попарно ізоморфні. Варіанти, сендвіч елементом яких є одиниця, не ізоморфні жодному з інших варіантів.*

Доведення. Нехай $(S^1, *_{(a_x,b_y)})$ та $(S^1, *_{(a_t,b_p)})$ — довільні варіанти напівгрупи S^1. Тоді за твердженнями 2 і 3 існують ізоморфізми варіантів φ та ψ такі, що

$$(S^1, *_{(a_x,b_y)}) \overset{\varphi}{\cong} (S^1, *_{(a_x,b_p)}) \overset{\psi}{\cong} (S^1, *_{(a_t,b_p)}).$$

Тобто існує відображення $\omega = \psi\varphi$ таке, що $\omega : (S^1, *_{(a_x,b_y)}) \to (S^1, *_{(a_t,b_p)})$, яке є ізоморфізмом варіантів. Варіанти, сендвіч елементом яких є одиниця, не ізоморфні жодному з інших варіантів $(S^1, *_{(a_x,b_y)})$, оскільки варіант $(S^1, *_1)$ містить одиницю, то варіанти типу $(S^1, *_{(a_x,b_y)})$ не містять одиниці. □

Розглянемо напівгрупу S^0, тобто напівгрупу S з приєднаним нулем 0 таку, що

$$0 \cdot (x_i, y_j) = (x_i, y_j) \cdot 0 = 0$$

для всіх $(x_i, y_j) \in S$ та $0 \cdot 0 = 0$.

Теорема 3. *Варіанти $(S^0, *_{(a_x,b_y)})$, сандвіч елемент яких є не нульовим, ізоморфні напівгрупі S^0. Варіант $(S^0, *_0)$ ізоморфний напівгрупі з нульовим множенням.*

Доведення. Очевидно, що у варіанті $(S^0, *_{(a_x,b_y)})$ добутки $c *_{(a_x,b_y)} d = 0$, які містять множник 0 справа ($d = 0$) або зліва ($c = 0$), будуть нульовими. Всі інші добутки є не нульовими, причому збігається з відповідними добутками для варіанта $(S, *_{(a_x,b_y)})$. Тому за твердженням 1 варіанти $(S^0, *_{(a_x,b_y)})$, сандвіч елемент яких є не нульовим, ізоморфні S^0.

Друге твердження очевидне, оскільки добуток довільних двох елементів $(S^0, *_0)$ дорівнюватиме 0. □

Список використаної літератури

1. A. Clifford and G. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups,* Volume 1, American Mathematical Society, Providence, 1961 (1977).
2. O. Desiateryk, *Variants of commutative bands with zero,* Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки (2015), no. 4, 15–20.
3. I. Dolinka and J. East, *Variants of finite full transformation semigroups*, Int. J. Algebra Comput. **25** (2015), no. 8, 1187–1222. DOI: 10.1142/S021819671550037X
4. I. Dolinka and J. East, *Semigroups of rectangular matrices under a sandwich operation*, Semigroup Forum **96** (2018), no. 2, 253–300. DOI: 10.1007/s00233-017-9873-6
5. O. Ganyushkin and V. Mazorchuk, *Classical finite transformation semigroups. An introduction.* Algebra and Applications, **9**, Springer–Verlag, London, 2009.
6. B. N. Givens, A. Rosini, and K. Linton, *Interassociates of the bicyclic semigroup*, Semigroup Forum **94** (2017), no. 1, 104–122. DOI: 10.1007/s00233-016-9794-9
7. J. Hickey, *Semigroups under a sandwich operation,* Proc. Edinburg Math. Soc. (2), **26** (1983), no. 3, 371–382. DOI: 10.1017/S0013091500004442
8. J. M. Howie, *Fundamentals of semigroup theory*, Oxford Science Publications. Oxford University Press, New York, 1995.
9. T. A. Khan and M. V. Lawson, *Variants of regular semigroups*, Semigroup Forum **62** (2001), no. 3, 358–374. DOI: 10.1007/s002330010034
10. О. Десятерик, *Варіанти напівгрупи Ріса матричного типу*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **88** (2019), 12–21. DOI: 10.30970/vmm.2019.88.012-021

11. Е. С. Ляпин, *Полугруппы,* Физматгиз, Москва, 1960.
12. М. Хилинський, *Інтерасоціативності поліциклічного моноїда*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **86** (2018), 77–90. DOI: 10.30970/vmm.2018.86.077-090

Стаття: надійшла до редколегії 12.07.2020
доопрацьована 21.12.2020
прийнята до друку 23.12.2020

VARIANTS OF RECTANGULAR BANDS

Oleksandra DESIATERYK

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Hlushkova Avenue, 4e, 03127 Kyiv, Ukraine
e-mail: sasha.desyaterik@gmail.com

We prove that all variants of the rectangular band are isomorphic. Variants of the rectangular band with adjoined identity and zero are studied.

Key words: variant, sandwich semigroup, rectangular band.