ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 128–133
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 128–133
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.128-133

УДК 336.76:519.224.24

ТЕСТУВАННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ ПОРТФЕЛІВ З МАКСИМАЛЬНИМ ВІДНОШЕННЯМ ШАРПА ТА З МАКСИМАЛЬНОЮ ОЧІКУВАНОЮ КОРИСНІСТЮ

Микола ЗАБОЛОЦЬКИЙ, Тарас ЗАБОЛОЦЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: mykola.zabolotskyy@lnu.edu.ua, zjabka@yahoo.com

Знайдено асимптотичний розподіл вибіркової оцінки коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику, портфелю з максимальним відношенням Шарпа за умови багатовимірного еліптичного розподілу вектора дохідностей його активів. На його підставі запропоновано метод тестування статистичної еквівалентності портфелів з максимальним відношенням Шарпа та з максимальною очікуваною корисністю.

Ключові слова: багатовимірний еліптичний розподіл, асимптотичний розподіл, вибіркова оцінка, відношення Шарпа, коефіцієнт, який описує ставлення інвестора до ризику.

1. Вступ

Теорія портфеля заснована Марковіцем [1] відіграє важливу роль у фінансовій математиці. Завдяки своїй простоті та результатам, які легко інтерпретувати, вона надзвичайно популярна на практиці. Важливими в теорії портфеля є ефективні портфелі, тобто портфелі для яких неможливо збільшити очікувану дохідність не збільшуючи ризик, та їх об'єднання – ефективна множина [2]. Можна навести декілька методів побудови ефективної множини. Запропонований Марковіцем метод полягає у розв'язуванні задачі максимізації очікуваної дохідності за заданого рівня ризику. Змінюючи рівень ризику від найменшого до $+\infty$ отримаємо ефективну множину. Другий спосіб полягає у максимізації очікуваної корисності при зміні значення коефіцієнта, який описує ставлення інвестора до ризику (надалі, коефіцієнт ризику) від 0 до $+\infty$. Яким би методом не будувалася ефективна множина, ваги та характеристики ефективних портфелів, залежать від параметрів розподілу дохідностей активів. Оскільки на практиці ці параметри невідомі, то усі результати ґрунтуються

2010 Mathematics Subject Classification: 91G10, 62F03, 62F12

на їхніх оцінках, які є випадковими величинами. Отже, випадковими величинами є і ваги та характеристики ефективних портфелів. Статистичні та ймовірнісні властивості характеристик різних портфелів досліджують у багатьох працях. Зокрема в [3] і [4], відповідно, знайдено розподіли ваг та характеристик портфелів з максимальною очікуваною корисністю, тангенсіального та з найменшою дисперсією за припущення нормальної розподіленості дохідностей активів. За цього ж припущення в [5] знайдено точні, а в [6] за слабших припущень на дохідності активів портфеля асимптотичні розподіли характеристик портфелів з найменшим рівнем VaR та CVaR. Окремо серед ефективних портфелів варто відзначити портфель з максимальним відношенням Шарпа. Оскільки відношення Шарпа один з найголовніших показників ефективності управління портфелем, то такий портфель становить інтерес як еталон ефективності управління. Властивості вибіркових оцінок ваг цього портфеля досліджено в [3] та [7] і доведено, що для вибіркових оцінок ваг портфеля не існує математичного сподівання та неможливо для них побудувати незміщену оцінку. З цих результатів випливає відсутність математичного сподівання і для оцінок очікуваної дохідності та дисперсії портфеля, а тому некоректно порівнювати портфелі на підставі цих характеристик. Також доволі важко в цьому випадку інтерпретувати отримані результати.

Знайдено аналітичний вираз для обчислення коефіцієнта ризику портфеля з максимальним відношенням Шарпа, досліджено асимптотичні властивості його вибіркової оцінки та побудовано інтервал довіри. На основі цих результатів запропоновано метод тестування статистичної еквівалентності портфелів з максимальним відношенням Шарпа та з максимальною очікуваною корисністю.

2. Означення та формулювання результатів

Нехай P_t ціна активу, $X_t = 100 \ln P_t/P_{t-1}$ його дохідність в момент часу t, $\mathbf{X}_t = (X_{t1}, X_{t2}, ..., X_{tk})'$ вектор дохідностей k активів портфеля, $\mathrm{M}(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$ і $\mathrm{D}(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\Sigma}$. Позначимо w_i частку i-го активу в портфелі, а вектор часток $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_k)$ назвемо вектором ваг портфеля або просто портфелем. Припустимо, що $\mathbf{X}_t \sim \mathcal{E}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}/\gamma^2, \psi)$, тобто $\mathbf{X}_t$ має багатовимірний еліптичний розподіл, характеристична функція якого наьуває вигляду

$$\mathrm{M}(\exp(i\mathbf{x}'\mathbf{X}_t)) = \exp(i\boldsymbol{\mu}'\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, \quad \mathbf{D} = \boldsymbol{\Sigma}/\gamma^2, \quad \gamma^2 = -2\psi'(0).$$

Функцію ψ називають характеристичним генератором еліптичного розподілу. До класу багатовимірних еліптичних розподілів належать розподіли, які часто використовують у фінансовій математиці, зокрема, багатовимірні розподіли Стьюдента, Лапласа та нормальний. Детальнішу інформацію стосовно багатовимірних еліптичних розподілів можна знайти у [8]. Якщо $X_{\mathbf{w};t} = \mathbf{w}'\mathbf{X}_t$ дохідність портфеля в момент часу t, то очікувана дохідність $R_{\mathbf{w}}$ та дисперсія $V_{\mathbf{w}}$ портфеля обчислюються за формулами $R_{\mathbf{w}} = \mathrm{M}(X_{\mathbf{w};t}) = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}$ та $V_{\mathbf{w}} = \mathrm{D}(X_{\mathbf{w};t}) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$. Відношення Шарпа $SR_{\mathbf{w}}$ портфеля з вагами $\mathbf{w}$ за відсутності безризикового розміщення коштів визначається як відношення очікуваної дохідності до дисперсії, тобто $SR_{\mathbf{w}} = R_{\mathbf{w}}/V_{\mathbf{w}} = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}/\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$. Ваги портфеля з максимальним відношенням Шарпа $\mathbf{w}_{SR}$ отримують з оптимізаційної задачі $SR_{\mathbf{w}} \to \max$, за умови, що $\mathbf{w}'\mathbf{1} = 1$ та дорівнюють [3]

$$\mathbf{w}_{SR} = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}, \tag{1}$$

де $\mathbf{1}$ – k-вимірний вектор, елементами якого є одиниці. Будь-який портфель ефективної множини можна отримати як розв'язок задачі максимізації очікуваної корисності портфеля

$$U_{\mathbf{w}} = R_w - \frac{\beta}{2}V_{\mathbf{w}} \to \max, \quad \mathbf{w}'\mathbf{1} = 1, \tag{2}$$

за певного значення коефіцієнта ризику β. Оскільки портфель з максимальним відношенням Шарпа належить ефективній множині, то існує таке значення коефіцієнта ризику $\beta = \beta_{SR}$, за якого портфелі з максимальним відношенням Шарпа та максимальною очікуваною корисністю математично еквівалентні. Розв'язок задачі (2) набуває вигляду [3]

$$\mathbf{w}_{EU} = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \beta^{-1}\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}, \tag{3}$$

де $\mathbf{R} = \mathbf{\Sigma}^{-1} - \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$. Перепишемо (1) наступним чином

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{SR} &= \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}} - \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \\ &+ \frac{1}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}\Big(\frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} - \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}\Big) = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \frac{1}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}. \end{aligned} \tag{4}$$

Прирівнявши (3) і (4), отримаємо

$$\beta_{SR} = \mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}. \tag{5}$$

Оскільки значення коефіцієнта β_{SR} залежить від невідомих параметрів розподілу вектора дохідностей активів $\boldsymbol{\mu}$ та $\mathbf{\Sigma}$, то використати отриманий результат на практиці неможливо. Для оцінки цих параметрів використовуємо вибірку попередніх значень векторів дохідностей активів $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$. Маємо вибіркові оцінки

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j\,, \quad \hat{\mathbf{\Sigma}} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{X}_j - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_j - \hat{\boldsymbol{\mu}})'\,, \tag{6}$$

параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\mathbf{\Sigma}$. Підставивши оцінки (6) у (5), отримаємо вибіркову оцінку параметра β_{SR}, яку позначимо $\hat{\beta}_{SR}$. Вибіркові оцінки $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ та $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ є випадковими величинами, а тому $\hat{\beta}_{SR}$ теж є випадковою величиною. Для прийняття управлінських рішень необхідно дослідити ймовірнісні властивості $\hat{\beta}_{SR}$.

Теорема 1. *Нехай $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, ..., $\mathbf{X}_n$ незалежні однаково розподілені випадкові k-вимірні вектори та $\mathbf{X}_1 \sim \mathcal{E}_k(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma}/\gamma^2, \psi)$. Тоді*

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{SR} - \beta_{SR}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2_{SR}), \quad n \to +\infty,$$

де

$$\sigma^2_{SR} = (1 + \lambda\boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu})\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} + 2\lambda(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2, \tag{7}$$

$\lambda = \psi''(0)/(\psi'(0))^2$ *та* $\xrightarrow{d}$ *позначає збіжність за розподілом.*

Доведення. Позначимо $R_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$ та $V_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$ відповідно очікувану дохідність і дисперсію портфеля з найменшою дисперсією або, іншими словами, мінімальні значення очікуваної дохідності та ризику для портфелів ефективної множини, $s = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}$ та через $\hat{R}_{GMV}, \hat{V}_{GMV}, \hat{s}$ їхні вибіркові оцінки. Ці три введені параметри повністю визначають ефективну множину [4]. Нехай $\mathbf{0}_3$ – 3-вимірний нуль-вектор і

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} V_{GMV}(1+\lambda s) & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4s + 2\lambda s^2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Оскільки [9]

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{GMV} \\ \hat{V}_{GMV} \\ \hat{s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{GMV} \\ V_{GMV} \\ s \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\mathbf{0}_3, \boldsymbol{\Omega}\right), \quad n \to +\infty,$$

та

$$\beta_{SR} = \mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} = R_{GMV}/V_{GMV},$$

то застосовуючи дельта-метод [10, с. 211], отримаємо

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{SR} - \beta_{SR}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \mathbf{g}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{g}), \quad n \to +\infty,$$

де $\mathbf{g} = (\frac{\partial \beta_{SR}}{\partial R_{GMV}}, \frac{\partial \beta_{SR}}{\partial V_{GMV}}, \frac{\partial \beta_{SR}}{\partial s})'$. Врахувавши(8) та рівності

$$\frac{\partial \beta_{SR}}{\partial R_{GMV}} = \frac{1}{V_{GMV}}, \ \frac{\partial \beta_{SR}}{\partial V_{GMV}} = -\frac{R_{GMV}}{V_{GMV}^2}, \ \frac{\partial \beta_{SR}}{\partial s} = 0,$$

з останнього співвідношення отримаємо твердження теореми 1. □

Зауважимо, що асимптотична дисперсія σ_{SR}^2 (див. (7)) випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{SR} - \beta_{SR})$ залежить від невідомих параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ розподілу $\mathbf{X}_t$. З теореми 1 та теореми 1.14 [11, с. 8] випливає твердження.

Наслідок 1. *Вибіркова оцінка* $\hat{\sigma}_{SR}^2$ *консистентна, тобто*

$$\hat{\sigma}_{SR}^2 \xrightarrow{a.s.} \sigma_{SR}^2, \quad n \to +\infty,$$

де $\xrightarrow{a.s.}$ *позначає збіжність майже напевно.*

Також з теореми 1 випливає, що $(1-\gamma)$-довірчий інтервал для β_{SR} набуває вигляду

$$\left[\mathbf{1}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}} - \frac{\hat{\sigma}_{SR}}{\sqrt{n}} z_{1-\gamma/2}, \mathbf{1}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}} + \frac{\hat{\sigma}_{SR}}{\sqrt{n}} z_{1-\gamma/2}\right]. \tag{9}$$

Тут z_γ – γ-квантиль стандартного нормального розподілу.

Наслідок 2. *Усі портфелі з максимальною очікуваною корисністю, для яких значення коефіцієнта ризику належить інтервалу* (9)*, статистично еквівалентні портфелю з максимальним відношенням Шарпа.*

3. Висновки

Знайдено асимптотичний розподіл вибіркової оцінки коефіцієнта ризику портфеля з максимальним відношенням Шарпа та побудовано довірчий інтервал для цього коефіцієнта за умови багатовимірного еліптичного розподілу вектора дохідностей його активів. Отриманий результат значно спрощує інтерпретацію результатів отриманих для характеристик портфеля з максимальним відношенням Шарпа, оскільки дає можливість замінити його на статистично еквівалентний портфель з максимальною очікуваною корисністю.

Список використаної літератури

1. H. Markowitz, *Portfolio selection*, The Journal of Finance **7** (1952), no. 2, 77–91. DOI: 10.2307/2975974
2. R. C. Merton, *An analytical derivation of the efficient frontier*, Journal of Financial and Quantitative Analysis **7** (1972), no. 4, 1851–1872. DOI: 10.2307/2329621
3. Y. Okhrin and W. Schmid, *Distributional properties of optimal portfolio weights*, J. Econom. **134** (2006), no. 1, 235–256. DOI: 10.1016/j.jeconom.2005.06.022
4. R. Kan and D. R. Smith, *The distribution of the sample minimum-variance frontier*, Management Science **54** (2008), no. 7, 1364–1380. DOI: 10.1287/mnsc.1070.0852
5. T. Bodnar, W. Schmid, and T. Zabolotskyy, *Minimum VaR and Minimum CVaR optimal portfolios: estimators, confidence regions, and tests*, Stat. Risk. Model. **29** (2012), no. 4, 281–314. DOI: 10.1524/strm.2012.1118
6. T. Bodnar, W. Schmid, and T. Zabolotskyy, *Asymptotic behavior of the estimated weights and of the estimated performance measures of the minimum VaR and the minimum CVaR optimal portfolios for dependent data*, Metrica **76** (2013), no. 8, 1105–1134. DOI: 10.1007/s00184-013-0432-1
7. W. Schmid and T. Zabolotskyy, *On the existence of unbiased estimators for the portfolio weights obtained by maximizing the Sharpe ratio*, AStA, Adv. Stat. Anal. **92** (2008), no. 1, 29–34. DOI: 10.1007/s10182-008-0054-5
8. Fang, S. Kotz, and K. W. Ng, *Symmetric multivariate and related distributions*, Chapman and Hall, London, 1990, 220 p.
9. T. Bodnar and T. Zabolotskyy, *How risky is the optimal portfolio which maximizes the Sharpe ratio?* AStA, Adv. Stat. Anal. **101** (2017), 1–28. DOI: 10.1007/s10182-016-0270-3
10. P. J. Brockwell and R. A. Davis, *Time series: theory and methods*, Springer Science+Business Media, New York, 2006, 600p.
11. A. DasGupta, *Asymptotic theory of statistics and probability*, Springer, New York, 2008, 722p.

Стаття: надійшла до редколегії 30.11.2019
доопрацьована 01.02.2020
прийнята до друку 03.02.2020

TESTING OF EQUIVALENCY OF PORTFOLIOS WITH THE MAXIMUM SHARPE RATIO AND THE MAXIMUM EXPECTED UTILITY

Mykola ZABOLOTSKYY, Taras ZABOLOTSKYY

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, Lviv, 79000, Ukraine
e-mail: mykola.zabolotskyy@lnu.edu.ua, zjabka@yahoo.com

In the paper statistical properties of the sample estimator of the risk aversion coefficient of the portfolio with the maximum Sharpe ratio are considered. Because the Sharpe ratio is very popular measure of portfolio management efficiency considered portfolio is often used as a benchmark of management efficiency. From other point of view practical usefulness of this portfolio is questionable. This is due to the fact that mathematical expectations of the sample estimators of its weights, expected return and variance do not exist. Therefore the results obtained based on comparison of characteristics of investor's portfolio with the characteristics of considered portfolio are not reliable. To eliminate this drawback in the paper an analytic expression for the risk aversion coefficient of the portfolio with the maximum Sharpe ratio is presented. Asymptotic distribution of the sample estimator of the investor's risk aversion coefficient of the considered portfolio is found under assumptions that the vector of asset returns follows multivariate elliptical distribution. Based on it a method for testing the statistical equivalence of portfolios with the maximum Sharpe ratio and the maximum expected utility is presented. As a result investor has a possibility to replace portfolio with the maximum Sharpe ratio with a statistically equivalent portfolio with the maximum expected utility for which statistical properties of the sample estimators of weights, expected return and variance are more attractive.

Key words: multivariate elliptical distribution, asymptotic distribution, sample estimator, Sharpe ratio, risk aversion coefficient.