ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 107–127
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 107–127
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.107-127

УДК 517.956.4

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА З ТРЬОМА ГРУПАМИ ПРОСТОРОВИХ ЗМІННИХ І ВИРОДЖЕННЯМ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Ольга ВОЗНЯК[1], **Степан ІВАСИШЕН**[2], **Ігор МЕДИНСЬКИЙ**[3]

[1] *Тернопільський національний економічний університет, вул. Львівська 11, 46000, м. Тернопіль*
[2] *Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", пр-т Перемоги 37, 03056, м. Київ*
[3] *Національний університет "Львівська політехніка", вул. Степана Бандери 12, 79013, м. Львів*
e-mails: o.g.voznyak@gmail.com, ivashyshen.sd@gmail.com, i.p.medynsky@gmail.com

Для виродженого ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження і виродженням на початковій гіперплощині за допомогою методу Леві побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші. Одержано точні оцінки побудованого розв'язку та його похідних.

Ключові слова: параболічні рівняння з виродженням, фундаментальний розв'язок задачі Коші, виродження на початковій гіперплощині, метод Леві, ультрапараболічні рівняння типу Колмогорова.

1. Вступ

Для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова, коефіцієнти яких не залежать від змінних виродження і мають ще виродження на початковій гіперплощині в праці [1] побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК), а в працях [2, 3] для таких рівнянь з однією групою просторових змінних виродження, побудовано ФРЗК Z, знайдено оцінки Z і похідних від Z, а також оцінки приростів старших похідних від Z за просторовими змінними. Зазначимо, що аналогічні результати

2010 Mathematics Subject Classification: 35A09, 35K10, 35K65, 35K70

для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова. які не мають виродження на початковій гіперплощині одержано в [4, 5, 6]. Ці результати отримали з використанням поетапного методу Леві, який запропоновано в працях [7, 8] і розвинутого в [5, 6] для випадку рівнянь без виродження на початковій гіперплощині, та в працях [2, 3] для випадку ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині. Ми продовжуємо розпочаті раніше дослідження з реалізації поетапного методу Леві побудови ФРЗК для ультрапараболічних рівнянь з двома групами змінних виродження, які мають ще виродження на початковій гіперплощині.

Нехай n, n_1, n_2 і n_3 – задані натуральні числа такі, що $n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3 \geqslant 1$ і $n = n_1+n_2+n_3$; $\mathbb{N}_j := \{1, \ldots, j\}$, $\mathbb{Z}_j := \mathbb{N}_j \cup \{0\}$, $j \in \mathbb{N}$, $m_j = j-1/2$, $j \in \mathbb{N}_3$. Будемо вважати, що просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x := (x_1, x_2, x_3)$, де компоненти $x_j := (x_{j1}, ..., x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$. Відповідно до цього мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ записуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2, k_3)$, де $k_j := (k_{j1}, \ldots, k_{jn_j}) \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$. Використовуватимемо такі позначення: $k' := (0, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^n$, якщо $k_j \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$, $j \in \{2, 3\}$; $M := m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3$; $M_k := m_1|k_1| + m_2|k_2| + m_3|k_3|$, якщо $k \in \mathbb{Z}_+^n$, де $|k_j| := k_{j1} + \ldots + k_{jn_j}$; $\Pi_H := \{(t, x) | \, t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$; α і β – неперервні на відрізку $[0, T]$ функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t \in (0, T]$, $\alpha(0)\beta(0) = 0$ і β – монотонно неспадна; $B(t, \tau) := \int\limits_\tau^t \dfrac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta$, $0 < \tau < t \leqslant T$.

Через Z_{j-1}, $j \in \mathbb{N}_4$, позначатимемо ФРЗК. Індекс j відповідає етапу побудови ФРЗК. Кількість етапів залежить від кількості груп просторових змінних. Параметрикс на j-му етапі позначатимемо символом G_j, породжуваний ним об'ємний потенціал – символом W_j, а його густину – символом Q_j. Отже, на *початковому (нульовому) етапі* будуємо ФРЗК Z_0 для рівняння, коефіцієнти якого залежать від змінної t і параметра $y \in \mathbb{R}^n$, тобто розглядаємо рівняння

$$L_0 u(t, x) := (S - A(t, y, \partial_{x_1})) u(t, x) = 0, \ (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де

$$S := \alpha(t)\partial_t - \beta(t) \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \beta(t) \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}},$$

$$A(t, y, \partial_{x_1}) := \beta(t) \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t, y) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} + \beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t, y) \partial_{x_{1j}} + a_0(t, y).$$

На *першому етапі* ФРЗК для рівняння

$$L_1 u(t, x) := (S - A(t, (x_1, y'), \partial_{x_1})) u(t, x) = 0, \ (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{2}$$

шукаємо у вигляді

$$Z_1(t, x; \tau, \xi; y') = G_1(t, x; \tau, \xi; y') + W_1(t, x; \tau, \xi; y'), \tag{3}$$

де

$$W_1(t, x; \tau, \xi; y') := \int\limits_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_1(t, x; \theta, \lambda; y') Q_1(\theta, \lambda; \tau, \xi; y') d\lambda, \tag{4}$$

G_1 – параметрикс, а Q_1 – невідома функція, $y' := (y_2, y_3) \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}$. За параметрикс вибираємо функцію

$$G_1(t,x;\tau,\xi;y') := Z_0(t,x;\tau,\xi;(\xi_1,y')),\ 0<\tau<t\leqslant T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ y'\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}. \tag{5}$$

На *другому етапі* рівняння набуває вигляду

$$L_2u(t,x) := (S - A(t,(x_1,x_2,y_3),\partial_{x_1}))u(t,x) = 0,\ (t,x)\in\Pi_{(0,T]}. \tag{6}$$

Згідно з методом Леві ФРЗК шукаємо у вигляді

$$Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3) = G_2(t,x;\tau,\xi;y_3) + W_2(t,x;\tau,\xi;y_3). \tag{7}$$

Тут

$$W_2(t,x;\tau,\xi;y_3) := \int\limits_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_2(t,x;\theta,\lambda;y_3)Q_2(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda, \tag{8}$$

G_2 – параметрикс, а Q_2 – невідома функція. За параметрикс вибираємо функцію

$$G_2(t,x;\tau,\xi;y_3) := Z_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3)),\ 0<\tau<t\leqslant T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ y_3\in\mathbb{R}^{n_3}. \tag{9}$$

Для випадку двох груп просторових змінних виродження *третій етап* завершує побудову ФРЗК для рівняння, коефіцієнти якого залежать від усіх змінних. Отже, на цьому етапі розглядаємо рівняння вигляду

$$L_3u(t,x) := (S - A(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x) = 0,\ (t,x)\in\Pi_{(0,T]}. \tag{10}$$

Аналогічно до попереднього, ФРЗК для рівняння (10) шукаємо у вигляді

$$Z_3(t,x;\tau,\xi) = G_3(t,x;\tau,\xi) + W_3(t,x;\tau,\xi). \tag{11}$$

Тут

$$W_3(t,x;\tau,\xi) := \int\limits_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_3(t,x;\theta,\lambda)Q_3(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda, \tag{12}$$

G_3 – параметрикс, а Q_3 – невідома функція. За параметрикс вибираємо функцію

$$G_3(t,x;\tau,\xi) := Z_2(t,x;\tau,\xi;\xi_3),\ 0<\tau<t\leqslant T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Результатом кожного j -го етапу є твердження про існування відповідного ФРЗК Z_j, $j\in\mathbb{N}_3$, встановлення точних оцінок похідних від ФРЗК, інтегралів від похідних ФРЗК і їхніх приростів (оцінки двох останніх, крім Z_3). Проведення цих досліджень істотно залежить від всебічного вивчення властивостей об'ємних потенціалів (4), (8) і (12). Ядром потенціалу є відповідний параметрикс (5), (9) чи (13), а густиною – відповідна функція Q_j, яка є розв'язком інтегрального рівняння

$$\begin{gathered} Q_j(t,x;\tau,\xi;p_j(y')) := K_j(t,x;\tau,\xi;p_j(y')) + \\ + \int\limits_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_j(t,x;\theta,\lambda;p_j(y'))Q_j(\theta,\lambda;\tau,\xi;p_j(y'))d\lambda, \end{gathered} \tag{14}$$

де $j\in\mathbb{N}_3$, $p_1(y')=y'$, $p_2(y')=y_3$ і $p_3(y')=0$, тобто $p_3(y')$ не залежить від y'.

Для густин Q_j встановлюються певні властивості й оцінки, які гарантують існування похідних від об'ємних потенціалів, їхніх точних оцінок та оцінок приростів таких похідних за просторовими змінними.

У попередніх працях [9, 10] детально розглянуто етапи побудови та дослідження ФРЗК для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з *двома групами* просторових змінних виродження. Тому природним є бажання одержати аналогічні результати для таких рівнянь, які мають ще виродження на початковій гіперплощині.

Стаття складається з семи пунктів. У вступі (**п. 1**) наведено загальну схему поетапного методу Леві. У **п. 2** наведено припущення на коефіцієнти рівняння і допоміжні твердження. В третьому пункті сформульовано основні результати. Вивчення властивостей функції G_1 і ядра K_1 інтегрального рівняння (14) при $j = 1$ — **пп. 4, 5**. В шостому пункті наведено властивості густини G_1 об'ємного потенціалу W_1, а також властивості потенціалу W_1. У **п. 7** завершуємо доведення основних результатів.

2. Припущення та допоміжні твердження

Будемо користуватися такими позначеннями:

$$\Delta_x^z f(\cdot,x,\cdot) := f(\cdot,x,\cdot) - f(\cdot,z,\cdot),\ \Delta_{x_s}^{z_s} f(\cdot,x,\cdot) := \Delta_x^{z^{(s)}} f(\cdot,x,\cdot),\ s \in \mathbb{N}_3,$$
$$z^{(0)} := x,\ z^{(1)} := (z_1,x_2,x_3),\ z^{(2)} := (x_1,z_2,x_3),\ z^{(3)} := (x_1,x_2,z_3),$$
$$x^{(1)} := (x_1,z_2,z_3),\ x^{(2)} := (x_1,x_2,z_3),\ X(t,\tau) := (X_1(t,\tau),X_2(t,\tau),X_3(t,\tau)),$$
$$X^{(1)}(t,\tau) := (\lambda_1,X_2(t,\tau),X_3(t,\tau)),\ X^{(2)}(t,\tau) := (\lambda_1,\lambda_2,X_3(t,\tau)),$$
$$X_1(t,\tau) := x_1,\ X_2(t,\tau) := x_2 + B(t,\tau)\hat{x}_1,\ X_3(t,\tau) := x_3 + B(t,\tau)x_2' + 2^{-1}(B(t,\tau))^2 x_1',$$
$$\hat{x}_1 := (x_{11},\ldots,x_{1n_2}), x_1' := (x_{11},\ldots,x_{1n_3}),\ x_2' := (x_{21},\ldots,x_{2n_3}),$$
$$Z^{(0)}(t,\tau) := X(t,\tau),\ Z^{(s)}(t,\tau) := X(t,\tau)|_{x_s=z_s},\ s \in \mathbb{N}_3.$$

Аналогічно будуються параметричні точки $Y(t,\tau)$ і $\Lambda(t,\tau)$ за відповідними точками y і λ.

У праці часто однаковими літерами (здебільшого літерами C, c і d), якщо їхні величини нас не цікавлять, позначатимемо різні сталі.

Будемо припускати, що коефіцієнти a_{jl}, a_j і a_0 комплекснозначні функції на $\Pi_{[0,T]}$, які задовольняють такі умови:

(i) a_{jl}, a_j, a_0 є обмеженими й неперервними за t та існує така стала $\delta > 0$, що для довільних $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 := (\sigma_{11},\ldots,\sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\operatorname{Re} \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x)\sigma_{1j}\sigma_{1l} \geqslant \delta|\sigma_1|^2;$$

(ii) a_{jl}, a_j, a_0 є гельдеровими за просторовими змінними в такому сенсі:

$$\exists\, H_1 > 0\ \exists\, \gamma_1 \in (0,1)\ \forall\{(t,x),(t,z^{(1)})\} \subset \Pi_{[0,T]} :$$

(15) $$|\Delta_{x_1}^{z_1} a(t,x)| \leqslant H_1|x_1 - z_1|^{\gamma_1},$$

$$\exists\, H_2 > 0\ \exists\, \gamma_2 \in (1/3,2/3]\ \forall\{(t,x),(t,z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]},\ \forall h \in [\tau,T] :$$

(16) $$|\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)| \leqslant H_2((B(h,\tau))^{m_2\gamma_2} + |X_2(h,\tau) - z_2|^{\gamma_2}),$$

$$\exists\, H_3 > 0\ \exists\, \gamma_3 \in (3/5, 2/3]\ \forall\{(t,x),(t,z^{(3)})\} \subset \Pi_{[0,T]},\ \forall h \in [\tau, T]:$$

(17) $$|\Delta_{x_3}^{z_3} a(t,x)| \leqslant H_3((B(h,\tau))^{m_3\gamma_3} + |X_3(h,\tau) - z_3|^{\gamma_3}),$$

(iii) $$\exists\, H_4 > 0\ \forall\{(t,x),(t,\xi^{(1)}),(t,z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0,T]},\ \forall\, h \in [\tau, T]:$$
$$|\Delta_{x_\ell}^{z_\ell} \Delta_{x_s}^{z_s} a_{jl}(t,x)| \leqslant H_4 |x_\ell - z_\ell|^{\gamma_\ell}((B(h,\tau))^{m_s\gamma_s} + |X_s(h,\tau) - z_s|^{\gamma_s}),$$

(18) $$\ell \in \mathbb{N}_2,\ \ell < s,\ s \in \{2,3\},$$

де a – будь-який з коефіцієнтів a_{jl}, a_j і a_0. В умові **(iii)** сталі γ_1, γ_2 і γ_3 такі, як в умові **(ii)**.

З умов (6), (17) при $h = \tau$ випливають звичайні умови Гельдера за змінними x_2 і x_3. Достатня умова виконання (16) подана в [2]. Наведемо аналогічну умову для виконання твердження (17), яка доводиться так само, як і умова, описана в лемі 1 з [10].

Лема 1. *Нехай a – неперервна й обмежена функція на $\Pi_{[0,T]}$, яка задовольняє умову*

$$\exists\, H_5 > 0\ \exists\, \gamma \in (9/10, 1]\ \forall\{(t,x),(t,z^{(3)})\} \subset \Pi_{[0,T]}:$$

(19) $$|\Delta_{x_3}^{z_3} a(t,x)| \leqslant H_5((B(T,\tau))^{m_1} + 2^{-1}B(T,\tau)|x_1'| + |x_2'|)^{-\gamma}|x_1 - z_1|^{\gamma}.$$

Тоді справджується нерівність (17) *з* $\gamma_3 = \gamma/m_2$.

Використовуватимемо такі оцінюючі функції:

(20) $$E_c^{(j)}(t,\tau,z_j) := \exp\{-c(B(t,\tau))^{1-2j}|z_j|^2\},\ t > \tau,\ z_j \in \mathbb{R}^{n_j},\ j \in \mathbb{N}_3,$$

$$E_c(t,\tau,x,\xi) := E_c^{(1)}(t,\tau,X_1(t,\tau)-\xi_1)E_c^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau)-\xi_2)E_c^{(3)}(t,\tau,X_3(t,\tau)-\xi_3),$$

(21) $$t > \tau,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$F_c(t,\tau,x,\xi) := \exp\{-c[(4B(t,\tau))^{-1}|x_1-\xi_1|^2 + 3(B(t,\tau))^{-3}|x_2 + 2^{-1}B(t,\tau)(\hat{x}_1+\hat{\xi}_1)-\xi_2|^2 +$$
$$+180(B(t,\tau))^{-5}|x_3 + 2^{-1}B(t,\tau)(x_2'+\xi_2') + (12)^{-1}(B(t,\tau))^2(x_1'-\xi_1') - \xi_3|^2]\},$$

(22) $$t > \tau,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$E_c^d(t,\tau,x,\xi) := E_c(t,\tau,x,\xi)E^d(t,\tau),\ E^d(t,\tau) := \exp\{dA(t,\tau)\},\ A(t,\tau) := \int_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)},$$
$$t > \tau,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ d \in \mathbb{R},$$

(23) $$I_0^{sl}(x,\xi) := (B(t,\theta)B(\theta,\tau))^{-M}\int_{\mathbb{R}^n} E_c(t,\theta,x,\lambda)E_c(\theta,\tau,\Lambda^{sl}(t,\theta),\xi)d\lambda,$$

(24) $$I_1^{sr}(x_1;\xi) := (B(t,\theta))^{-m_1n_1}\int_{\mathbb{R}^{n_1}} E_{c_0}^{(1)}(t,\theta,x_1-\lambda_1)E_c(\theta,\tau,\Lambda^{sr}(t,\theta),\xi)d\lambda_1,$$

$$I_2^{sr}(x_1,x_2;\xi) := (B(t,\theta))^{-m_1n_1-m_2n_2}\int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} E_{c_0}^{(1)}(t,\theta,x_1-\lambda_1)\times$$

$$\times E_{c_0}^{(2)}(t,\theta,X_2(t,\theta)-\lambda_2)E_c(\theta,\tau,\Lambda^{sr}(t,\theta),\xi)d\lambda_1 d\lambda_2, \tag{25}$$

де

$$\Lambda^{s0}(t,\tau):=Z^{(s)}(t,\tau),\quad \Lambda^{s1}(t,\tau):=(\lambda_1,\quad Z_2^{(s)}(t,\tau),Z_3^{(s)}(t,\tau)),$$
$$\Lambda^{s2}(t,\tau):=(\lambda_1,\lambda_2,Z_3^{(s)}(t,\tau)),\quad \Lambda^{s3}(t,\tau):=\lambda,$$
$$l\in\mathbb{Z}_2,\quad s\in\mathbb{Z}_3,\quad r\in\{2,3\},\quad 0<\tau<\theta<t\leqslant T,\quad \{x,z,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Потрібні властивості цих функцій описуються в наступній лемі, яка доводиться аналогічно до леми 2 з [9].

Лема 2. *Правильні такі твердження:*

$$E_c(t,\tau,x,\xi)\leqslant F_{c_1}(t,\tau,x,\xi)\leqslant E_{c_2}(t,\tau,x,\xi),\ t>\tau,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ 0<c_2<c_1<c, \tag{26}$$

$$E_c^{(1)}(t,\theta,x_1-\lambda_1)E_c^{(1)}(\theta,\tau,\lambda_1-\xi_1)\leqslant E_c^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1),$$
$$0<\tau<\theta<t\leqslant T,\ \{x_1,\lambda_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}, \tag{27}$$

$$E_c^{(2)}(t,\theta,X_2(t,\theta)-\lambda_2)E_c^{(2)}(\theta,\tau,\Lambda_2(\theta,\tau)-\xi_2)\leqslant E_{-c/2}^{(1)}(t,\theta,x_1-\xi_1)E_{c/4}^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau)-\xi_2),$$
$$0<\tau<\theta<t\leqslant T,\ \{x_s,\lambda_s,\xi_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s},\ s\in\mathbb{N}_2, \tag{28}$$

$$|X_s(t,\tau)-\xi_s|^{\gamma_s}E_c^{(s)}(t,\tau,X_s(t,\tau)-\xi_s)\leqslant C(B(t,\tau))^{m_s\gamma_s}E_{c_0}^{(s)}(t,\tau,X_s(t,\tau)-\xi_s),$$
$$t>\tau,\{x_s,\xi_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s},\ s\in\mathbb{N}_3, \tag{29}$$

$$|X_s(t,\tau)-\xi_s|^{\gamma_s}E_c(t,\tau,X_s(t,\tau)-\xi_s)\leqslant C(B(t,\tau))^{m_s\gamma_s}E_{c_0}(t,\tau,X_s(t,\tau)-\xi_s),$$
$$t>\tau,\{x_s,\xi_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s},\ s\in\mathbb{N}_3, \tag{30}$$

$$(B(t,\tau))^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_c(t,\tau,x,\xi)d\xi=C,\ t>\tau,\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{31}$$

$$(B(t,\tau))^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}E_c(t,\tau,x,\xi)d\xi_2 d\xi_3\leqslant C(B(t,\tau))^{-m_1n_1}E_c^{(1)}(t,x_1-\xi_1),$$
$$t>\tau,\ x\in\mathbb{R}^n,\ \{x_1,\xi_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1}, \tag{32}$$

$$(B(t,\tau))^{-M}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}E_c(t,\tau,x,\xi)d\xi_3\leqslant C(B(t,\tau))^{-m_1n_1-m_2n_2}E_c^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)\times$$
$$\times E_c^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau)-\xi_2),\ t>\tau,\ x\in\mathbb{R}^n,\ \{x_s,\xi_s\}\subset\mathbb{R}^{n_s},\ s\in\mathbb{N}_2, \tag{33}$$

$$(B(t,\tau))^{-m_sn_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_s}}E_c^{(s)}(t,\tau,X_s(t,\tau)-\xi_s)d\xi_s=C,\ t>\tau,\ x_s\in\mathbb{R}^{n_s},\ s\in\mathbb{N}_3, \tag{34}$$

$$E_c(t,\tau,y^{(s)},\xi)\leqslant CE_{c_0}(t,\tau,x,\xi),\ 0<\tau<\theta<t\leqslant T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{35}$$

$$E_c(\theta,\tau,Z^{(l)}(t,\theta),\xi)\leqslant CE_{c/8}(\theta,\tau,X(t,\theta),\xi),$$
$$0<\tau<t_1\leqslant\theta<t\leqslant T,\ \{x,z,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ l\in\mathbb{N}_3, \tag{36}$$

$$E_c(\theta,\tau,X(t,\theta),\xi)\leqslant E_c(t,\tau,x,\xi),\ 0<\tau<\theta<t,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{37}$$

$$E_c(\theta,\tau,(\lambda_1,Z_2^{(l)}(t,\theta),Z_3^{(l)}(t,\theta)),\xi) \leqslant E_{c/4}(\theta,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\theta),X_3(t,\theta)),\xi),$$

$$0<\tau<t_1\leqslant\theta<t,\ \{x,z,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \lambda_1\in\mathbb{R}^{n_1}, l\in\mathbb{N}_3, \tag{38}$$

$$E_c(\theta,\tau,(\lambda_1,X_2(t,\theta),X_3(t,\theta)),\xi)\leqslant E^{(1)}_{-9c/4}(t,\theta,x_1-\lambda_1)E_{c/2}(t-\tau,x,\xi),$$

$$0<\tau<t_1\leqslant\theta<t,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \lambda_1\in\mathbb{R}^{n_1}, \tag{39}$$

$$E_c(\theta,\tau,(\lambda_1,\lambda_2,Z_3^{(l)}(t,\theta)),\xi)\leqslant CE_{c/2}(\theta,\tau,(\lambda_1,\lambda_2,X_3(t,\theta)),\xi),$$

$$0<\tau<t_1\leqslant\theta<t,\ \{x,z,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \lambda_j\in\mathbb{R}^{n_j},\ j\in\mathbb{N}_2,\ l\in\mathbb{Z}_3, \tag{40}$$

$$E_c(\theta,\tau,(\lambda_1,\lambda_2,X_3(t,\theta)),\xi)\leqslant CE_c^{(1)}(\theta,\tau,\lambda_1-\xi_1)E_c^{(2)}(\theta,\tau,\Lambda_2(\theta,\tau)-\xi_2)\times$$
$$\times E^{(1)}_{-c/4}(t,\theta,x_1-\lambda_1)E^{(2)}_{-c/2}(t,\theta,X_2(t,\theta)-\lambda_2)E^{(3)}_{c/4}(t,\tau,X_3(t,\tau)-\xi_3),$$

$$0<\tau<t_1\leqslant\theta<t,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \lambda_j\in\mathbb{R}^{n_j},\ j\in\mathbb{N}_2, \tag{41}$$

$$I_0^{sl}(z^{(r)};\xi)\leqslant C(B(t,\tau))^{-M}E_{c_0}(t,\tau,x,\xi),\ 0<\tau<t_1\leqslant\theta<t\leqslant T,$$

$$\{x,\xi,z^{(s)}\}\subset\mathbb{R}^n,\ \{s,l,r\}\subset\mathbb{Z}_3,\ \textit{причому}\ \theta\in(\tau,t)\ \textit{для}\ l=3, \tag{42}$$

$$I_1^{sl}(z_1;\xi)\leqslant CI_1^{sl}(x_1;\xi)\leqslant CE_{c_0}(t,\tau,x,\xi),\ 0<\tau<t_1\leqslant\theta<t,$$

$$\{x_1,z_1\}\subset\mathbb{R}^{n_1},\ \xi\in\mathbb{R}^n,\ l\in\mathbb{Z}_1,\ \{s,r\}\subset\mathbb{Z}_3, \tag{43}$$

$$I_2^{s2}(z_1,z_2;\xi)\leqslant CI_2^{s2}(x_1,z_2;\xi)\leqslant CI_2^{s2}(x_1,x_2;\xi)\leqslant CE_{c_0}(t,\tau,x,\xi),$$

$$0<\tau<t_1\leqslant\theta<t,\ \{x_r,z_r\}\subset\mathbb{R}^{n_r},\ r\in\mathbb{N}_2,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ s\in\mathbb{Z}_3, \tag{44}$$

де C, c і c_0 – додатні сталі, причому $c_0<c$, у формулі (35) *$y^{(s)}$ – точка на відрізку прямої, що сполучає точки x і $z^{(s)}$, $s\in\mathbb{N}_3$, у формулах* (35)–(42) $|x_s-z_s|^{1/m_s}\leqslant B(t,\tau)/4$, *$s\in\mathbb{N}_3$, і t_1 таке, що $B(t,t_1)=B(t_1,\tau)$.*

У лемі 3 подаємо властивості ФРЗК Z_0 для рівняння (1), які встановлюються подібно до результатів з [1, теорема 3.1, властивість 3.2].

Лема 3. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1)*, як функції від t і y, задовольняють умови* **(i)**, **(ii)***, в яких x замінено на y. Тоді існує ФРЗК Z_0, для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y)|\leqslant C(B(t,\tau))^{-M-M_k}E_c^d(t,\tau,x,\xi), \tag{45}$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y)|\leqslant C_{sk}(B(t,\tau))^{-M-M_k}E_c^d(t,\tau,x,\xi)\times$$
$$\times\begin{cases}|y_1-z_1|^{\gamma_1}, & \textit{якщо } s=1,\\ (B(h,\tau))^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h,\tau)-z_s|^{\gamma_s}, & \textit{якщо } s\in\{2,3\},\end{cases} \tag{46}$$

а також рівності

$$\partial_x^k\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z_0(t,x;\tau,\xi;y)d\xi=0,\ \partial_x^k\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z_0(t,x;\tau,\xi;y)dx=0,\ k\neq0, \tag{47}$$

$$\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}Z_0(t,x;\tau,\xi;y)d\xi_2d\xi_3=0,\ k'\neq0, \tag{48}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Z_0(t,x;\tau,\xi;y)d\xi_3 = 0,\ k_3 \neq 0, \tag{49}$$

$$\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y) = (-\partial_\xi)^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y), \tag{50}$$

де $0 < \tau < t \leqslant T$, $\{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$, $\{k,k'\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, C_k, C_{ks} *– додатні сталі,* h *і* γ_s *– числа з умов* (15)–(17).

3. Формулювання основних результатів

Результати першого, другого та завершального третього етапів побудови й дослідження ФРЗК для рівняння (10) містяться в таких теоремах.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (2) *виконуються умови* **(i)–(iii)**, *в яких* x *замінено на* (x_1, y'). *Тоді для рівняння* (2) *існує ФРЗК* Z_1 *і правильні такі твердження:*

$$|\partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-M_k} E_c^d(t,\tau,x,\xi), \tag{51}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s} \partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C|x_s - z_s|^{\gamma_s} (B(t,\tau))^{-M-M_k-m_s\gamma_s^0} \times$$

$$\times (E_c^d(t,\tau,x,\xi) + E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)),\ s \in \mathbb{N}_3, \tag{52}$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-M_k}E_c^d(t,\tau,x,\xi)\times$$

$$\times((B(h,\tau))^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h,\tau)-z_s|^{\gamma_s}),\ s\in\{2,3\}, \tag{53}$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\ \Big|\leqslant C(B(t,\tau))^{-M_k+m_1\gamma_1}E^d(t,\tau),\ k\neq 0, \tag{54}$$

(55)
$$\Big|\ \Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\ \Big|\leqslant C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M_k+m_1\gamma_1-m_s\gamma_s^0}E^d(t,\tau),\ k\neq 0,$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^{k'}Z_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2d\xi_3\ \Big|\leqslant C(B(t,\tau))^{-m_1n_1-M_{k'}+m_2\gamma_2}\times$$

$$\times E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E^d(t,\tau),\ k'\neq 0, \tag{56}$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_3}^{k_3}Z_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3\ \Big|\leqslant C(B(t,\tau))^{-m_1n_1-m_2n_2-m_3|k_3|+m_3\gamma_3}\times$$

$$\times E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,X(t,\tau)-\xi_2)E^d(t,\tau),\ k_3\neq 0, \tag{57}$$

$$\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}Z_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2d\xi_3=0,\ k'\neq 0, \tag{58}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}Z_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3=0,\ k_3\neq 0, \tag{59}$$

$$\partial_x^{k'}Z_1(t,x;\tau,\xi;y')=(-\partial_\xi)^{k'}Z_1(t,x;\tau,\xi;y'), \tag{60}$$

де $0<\tau<t\leqslant T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $y'\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}$, $z_s\in\mathbb{R}^{n_s}$, $s\in\mathbb{N}_3$, $\gamma_1^0\in(0,\gamma_1]$, $\{\gamma_2^0,\gamma_3^0\}\subset(0,1]$, $\{k,k'\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, $m_1|k_1|\leqslant 1$, *числа* h *і* γ_s *такі, як вище.*

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (6) *виконуються умови* **(i)–(iii)**, *в яких* x *замінено на* (x_1,x_2,y_3). *Тоді для рівняння* (6) *існує ФРЗК* Z_2 *і справджуються оцінки:*

$$|\partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)|\leqslant C(B(t,\tau))^{-M-M_k}E_c^d(t,\tau,x,\xi), \tag{61}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)|\leqslant C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(B(t,\tau))^{-M-M_k-m_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times(E_c^d(t,\tau,x,\xi)+E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)),\ s\in\mathbb{N}_3, \tag{62}$$

$$|\Delta_{y_3}^{z_3}\partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)|\leqslant C(B(t,\tau))^{-M-M_k}E_c^d(t,\tau,x,\xi)\times$$

$$\times((B(h,\tau))^{m_3\gamma_3}+|Y_3(h,\tau)-z_3|^{\gamma_3}), \tag{63}$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi\ \Big|\leqslant C(B(t,\tau))^{-M_k+l_k}E^d(t,\tau),\ k\neq 0, \tag{64}$$

$$\Big| \Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi \Big| \leqslant C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} \times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-M_k + l_k - m_s\gamma_s^0} E^d(t,\tau),\ s \in \mathbb{N}_3,\ k \neq 0, \tag{65}$$

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^{k'} Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2 d\xi_3 \Big| \leqslant C(B(t,\tau))^{-m_1n_1 - M_{k'} + m_2\gamma_2} \times$$

$$\times E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E^d(t,\tau),\ k' \neq 0, \tag{66}$$

$$\Big| \Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_x^{k'} Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_2 d\xi_3 \Big| \leqslant C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0} \times$$

$$\times (B(t,\tau))^{-m_1n_1 - M_{k'} + m_2\gamma_2 - m_s\gamma_s^0} E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E^d(t,\tau),\ k' \neq 0, \tag{67}$$

а також рівності

$$\partial_{x_3}^{k_3} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3)d\xi_3 = 0,\ k_3 \neq 0, \tag{68}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3} Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3) = (-\partial_{\xi_3})^{k_3} Z_2(t,x;\tau,\xi;y_3),\ k_3 \neq 0, \tag{69}$$

в яких $0 < \tau < t \leqslant T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $y_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$, $z_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$, $\gamma_1^0 \in (0,\gamma_1]$, $\gamma_2^0 \in (0,\gamma_2]$, $\gamma_3^0 \in (0,1]$, $\{k,k'\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $m_1|k_1| + |k_2| \leqslant 1$, *числа* h *і* γ_s *такі, як вище,* $l_1 := m_1\gamma_1$ *при* $k_1 \neq 0$, $k' = 0$, $l_2 := m_2\gamma_2$ *при* $k_1 = 0$, $k' \neq 0$.

Теорема 3. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (10) *виконуються умови* **(i)**–**(iii)**. *Тоді для рівняння* (10) *існує ФРЗК* Z_3*, для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z_3(t,x;\tau,\xi)| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-M_k} E_c^d(t,\tau,x,\xi), \tag{70}$$

$$|SZ_3(t,x;\tau,\xi)| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-1} E_c^d(t,\tau,x,\xi), \tag{71}$$

де $0 < \tau < t \leqslant T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $k = (k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{Z}_+^n$, $m_1|k_1| + |k_2| + |k_3| \leqslant 1$.

ФРЗК Z_j, $j \in \mathbb{N}_3$, визначаються наведеними у вступі формулами (3), (7) і (11), в яких G_j – параметрикс, а W_j – відповідний об'ємний потенціал з невідомою густиною Q_j. Тому доведення теорем 1–3 зводиться до визначення та дослідження властивостей функцій G_j, Q_j і W_j. Вивчення функції G_1 та ядра K_1 рівняння (14) з $j = 1$ та функцій G_2, G_3, Q_j і W_j, $j \in \mathbb{N}_3$, проведемо в наступних пунктах.

Зауваження 1. На підставі оцінок (26) у нерівностях (51)–(53), (56), (57), (61)–(63), (66), (67), а також (70) і (71), як і в (45), (46), замість оцінюючої функції E_c^d можна брати функцію F_c^d.

4. Параметрикс G_1

Властивості функції G_1 опишемо в такій лемі.

Лема 4. *За умов леми 3 для функції* G_1 *справджуються такі оцінки*

$$|\partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-M_k} E_c^d(t,\tau,x,\xi), \tag{72}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C|x_s-z_s|^{\gamma_s}(B(t,\tau))^{-M-M_k-m_s\gamma_s^0}\times$$
$$\times(E_c^d(t,\tau,x,\xi)+E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)),\ s\in\mathbb{N}_3, \tag{73}$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-M_k} E_c^d(t,\tau,x,\xi)\times$$
$$\times((B(h,\tau))^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h,\tau)-z_s|^{\gamma_s}),\ s\in\{2,3\}, \tag{74}$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\ \Big|\leqslant C(B(t,\tau))^{-M_k+m_1\gamma_1}E^d(t,\tau),\ k\neq 0, \tag{75}$$

$$\Big|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k G_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\ \Big|\leqslant C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M_k+m_1\gamma_1-m_s\gamma_s^0}E^d(t,\tau),\ k\neq 0, \tag{76}$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2 d\xi_3\ \Big|\leqslant C(B(t,\tau))^{-m_1n_1-M_{k'}+m_2\gamma_2}\times$$
$$\times E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E^d(t,\tau),\ k'\neq 0, \tag{77}$$

$$\Big|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2 d\xi_3\ \Big|\leqslant C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-m_1n_1-M_{k'}-m_s\gamma_s+m_2\gamma_2}\times$$
$$\times(E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)+E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,z_1-\xi_1))E^d(t,\tau),\ k'\neq 0, \tag{78}$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_3}^{k_3} G_1(t,x;\tau,\xi;(y_2,\xi_3))d\xi_3\ \Big|\leqslant C(B(t,\tau))^{-m_1n_1-m_2n_2-m_3(|k_3|-\gamma_3)}\times$$
$$\times E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau)-\xi_2)E^d(t,\tau),\ k_3\neq 0, \tag{79}$$

$$\Big|\Delta_{x_s}^{z_s}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_{x_3}^{k_3} G_1(t,x;\tau,\xi;(y_2,\xi_3))d\xi_3\Big|\leqslant C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-m_1n_1-m_2n_2-m_3(|k_3|-\gamma_3)-m_s\gamma_s}\times$$
$$\times E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau)-\xi_2)E^d(t,\tau),\ k_3\neq 0, \tag{80}$$

а також рівності

$$\partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y') = (-\partial_\xi)^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y'),\ k'\neq 0, \tag{81}$$

$$\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2 d\xi_3 = 0,\ k'\neq 0, \tag{82}$$

$$\partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3 = 0,\ k_3\neq 0, \tag{83}$$

у яких $0 < \tau < t \leqslant T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $y' = (y_2, y_3) \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}$, $z_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \mathbb{N}_3$, $\{k, k'\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $\gamma_s^0 \in (0, 1]$, $s \in \mathbb{N}_3$, h *і* γ_s *– числа з умов* (15)–(17).

Доведення леми 4 проводиться відповідною модифікацією доведень з праць [1, 2], а для рівнянь, у яких відсутні функції α і β – з [4, 5, 8].

5. Ядро K_1

Ядро K_1 інтегрального рівняння (14) з $j = 1$ визначається формулою

$$K_1(t,x;\tau,\xi;y') := \Big(\beta(t) \sum_{j,\,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} +$$

$$+\Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y')) \Big) G_1(t,x;\tau,\xi;y'),\ 0 < \tau < t \leqslant T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ y' \in \mathbb{R}^{n_2+n_3}.$$

З цієї формули для $k' \in \mathbb{Z}_+^n \backslash \{0\}$ випливають такі рівності:

$$\partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y') := \Big(\beta(t) \sum_{j,\,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} +$$

$$+\Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y')) \Big) \partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y'), \tag{84}$$

$$\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y') := \Big(\beta(t) \sum_{j,\,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} +$$

$$+\Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y')) \Big) \Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y'),\ s \in \{2,3\}, \tag{85}$$

$$\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y') := \Big(\beta(t) \sum_{j,\,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} \Delta_{y_s}^{z_s} a_{jl}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} +$$

$$+\beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{y_s}^{z_s} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{y_s}^{z_s} a_0(t,(x_1,y')) -$$

$$-\beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{y_s}^{z_s} a_j(t,(\xi_1,y'))\partial_{x_{1j}} - \Delta_{y_s}^{z_s} a_0(t,(\xi_1,y')) \Big) \partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y') +$$

$$+ \Big(\beta(t) \sum_{j,\,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} +$$

$$+\Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y')) \Big)\Big|_{y_s=z_s} \Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y'),\ s \in \{2,3\}. \tag{86}$$

За допомогою інтегрування (86) і формул (82), (83) отримаємо ще такі рівності:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2 d\xi_3 = \Big(\beta(t) \sum_{j,\,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} +$$

$$+\beta(t) \sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y')) \Big)\Big|_{y_s=z_s} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_x^{k'} G_1(t,x;\tau,\xi;y') d\xi_2 d\xi_3,\ s\in\{2,3\},$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_{x_3}^{k_3} K_1(t,x;\tau,\xi;y') d\xi_3 = \Big(\beta(t) \sum_{j,\,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_{jl}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} +$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}} + \Delta_{x_1}^{\xi_1} a_0(t,(x_1,y')) \Big)\Big|_{y_s=z_s} \times$$

(87) $$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s} \partial_{x_3}^{k_3} G_1(t,x;\tau,\xi;y') d\xi_3,\ k_3\neq 0,\ s\in\{2,3\}.$$

Використовуючи рівності (84)–(87), оцінки (72)–(74), умови (15)–(18), нерівності (29), (30) і (32), а також рівність (31), отримуємо оцінки

(88) $$|\partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1+m_1\gamma_1} E_c^d(t,\tau,x,\xi),$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C\beta(t)|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1+m_1\gamma_1-m_s\gamma_s^0}\times$$

(89) $$\times(E_c^d(t,\tau,x,\xi)+E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)),$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C\beta(t)((B(h,\tau))^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h,\tau)-z_s|^{\gamma_s})\times$$

(90) $$\times(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1+m_1\gamma_1} E_c^d(t,\tau,x,\xi),$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y') d\xi_2 d\xi_3\Big| \leqslant C\beta(t)((B(h,\tau))^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h,\tau)-z_s|^{\gamma_s})\times$$

(91) $$\times(B(t,\tau))^{-m_1n_1-M_{k'}-1+m_1\gamma_1} E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E^d(t,\tau),$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y') d\xi_3\Big| \leqslant C\beta(t)((B(h,\tau))^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h,\tau)-z_s|^{\gamma_s})\times$$

(92) $$\times(B(t,\tau))^{-m_1n_1-m_2n_2-M_{k'}-1+m_1\gamma_1} E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau)-\xi_2)E^d(t,\tau),$$

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} \Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y') d\xi\Big| \leqslant C\beta(t)((B(h,\tau))^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h,\tau)-z_s|^{\gamma_s})\times$$

(93) $$\times(B(t,\tau))^{-M_{k'}-1+m_1\gamma_1} E^d(t,\tau).$$

В оцінках (88)–(93) $0<\tau<t\leqslant T$, $h\in(0,T]$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $z_s\in\mathbb{R}^{n_s}$, $s\in\mathbb{N}_3$, $y'\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}$, $k'\in\mathbb{Z}_+^n$ (в оцінках (91)–(93) $k'\neq 0$), а числа γ_s^0 і γ_s такі, як вище.

Тепер оцінимо приріст $\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}K_1$. Достатньо розглянути випадок, коли $|x_1 - z_1|^2 \leqslant B(t,\tau)/4$. З рівності (84) випливає, що

$$\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'} K_1(t,x;\tau,\xi;y') := \Big(\beta(t) \sum_{j,\,l=1}^{n_1} \Delta_{x_1}^{z_1} a_{jl}(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} +$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{x_1}^{z_1}a_j(t,(x_1,y'))\partial_{x_{1j}}+\Delta_{x_1}^{z_1}a_0(t,(x_1,y'))\Big)\partial_x^{k'}G_1(t,x;\tau,\xi)+$$

$$+\beta(t)\sum_{j,\,l=1}^{n_1}\Delta_{z_1}^{\xi_1}a_{jl}(t,(x_1,y'))\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}\partial_x^{k'}G_1(t,x;\tau,\xi)+$$

$$+\beta(t)\sum_{j=1}^{n_1}\Delta_{z_1}^{\xi_1}a_j(t,(x_1,y'))\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_{1j}}\partial_x^{k'}G_1(t,x;\tau,\xi)+$$

$$+\Delta_{x_1}^{\xi_1}a_0(t,(x_1,y'))\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_{x_{1j}}\partial_x^{k'}G_1(t,x;\tau,\xi).$$

За допомогою умови (15), оцінок (72), (73) та нерівності (29) отримуємо

$$|\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}K_1(t,x;\tau,\xi;y')|\leqslant C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1}\times$$

$$\times\Big(|x_1-z_1|^{\gamma_1}(B(t,\tau))^{m_1\gamma_1}+|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(B(t,\tau))^{-m_1(\gamma_1^0-\gamma_1)}\Big)E_c^d(t,\tau,x,\xi), \tag{94}$$

де γ_1^0 – довільне число з проміжку $(0,1]$, а γ_1 – число з умови (15). Якщо додатково скористатися нерівністю (75) і рівністю (31), то отримаємо оцінку

$$\Big|\Delta_{x_1}^{z_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_x^{k'}K_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\Big|\leqslant C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M_{k'}-1}E^d(t,\tau)\times$$

$$\times\Big(|x_1-z_1|^{\gamma_1}(B(t,\tau))^{m_1\gamma_1}+|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(B(t,\tau))^{-m_1(\gamma_1^0-\gamma_1)}\Big),\ \gamma_1^0\in(0,1]. \tag{95}$$

З нерівності (94) випливають оцінки

$$|\Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}K_1(t,x;\tau,\xi;y')|\leqslant C\beta(t)E_c^d(t-\tau,x,\xi)\times$$

$$\times\begin{cases}|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1-m_1(\gamma_1^0-\gamma_1)},\ \gamma_1^0<\gamma_1,\\ |x_1-z_1|^{\gamma_1}(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1},\ \gamma_1^0=\gamma_1.\end{cases} \tag{96}$$

6. Властивості функції Q_1 та об'ємного потенціалу W_1

Оскільки, згідно з результатами **п. 4** і твердженням (26) леми 2, ядро K_1 інтегрального рівняння (14) з $j=1$ задовольняє умови з [1, леми 1.10, с. 44], то функція Q_1 визначається рядом

$$Q_1(t,x;\tau,\xi;y')=\sum_{j=1}^{\infty}K_{1j}(t,x;\tau,\xi;y'), \tag{97}$$

в якому

$$K_{1j}(t,x;\tau,\xi;y')=\int\limits_{\tau}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}K_1(t,x;\theta,\lambda;y')K_{1(j-1)}(\theta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda,\ j>1,$$

$$K_{11}:=K_1,\ 0<\tau<t\leqslant T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ y'\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}.$$

Лема 5. *За умов* **(i)–(iii)** *для функції* Q_1 *справджуються оцінки*

(98) $$|\partial_x^{k'} Q_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1+m_1\gamma_1} E_c^d(t,\tau,x,\xi),$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_x^{k'} Q_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C\beta(t)|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1+m_1\gamma_1-m_s\gamma_s^0}\times$$

(99) $$\times(E_c^d(t,\tau,x,\xi)+E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)),\ s\in\mathbb{N}_3,$$

(100)
$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_x^{k'} Q_1(t,x;\tau,\xi;y')| \leqslant C\beta(t)H_s(h,\tau)(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}-1+m_1\gamma_1} E_c^d(t,\tau,x,\xi),\ s\in\{2,3\},$$

(101) $$\Big|\ \partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^n} Q_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\ \Big| \leqslant C\beta(t)(B(t,\tau))^{-M_{k'}-1+m_1\gamma_1}E_c^d(t,\tau,x,\xi),$$

(102) $$\Big|\ \Delta_{x_1}^{z_1}\partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^n} Q_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\ \Big| \leqslant C\beta(t)|x_1-z_1|^{\gamma_1^0}(B(t,\tau))^{-M_{k'}-1+m_1(\gamma_1-\gamma_1^0)},$$

$$\Big|\ \partial_x^{k'}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} Q_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,y_3))d\xi_2 d\xi_3\ \Big| \leqslant C\beta(t)(B(t,\tau))^{-m_1n_1-M_{k'}+m_2\gamma_2}\times$$

(103) $$\times E_c^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E^d(t,\tau),\ k'\neq 0,$$

$$\Big|\ \partial_{x_3}^{k_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} Q_1(t,x;\tau,\xi;(\xi_2,\xi_3))d\xi_3\ \Big| \leqslant C\beta(t)(B(t,\tau))^{-m_1(n_1-\gamma_1)-m_2n_2-m_3(|k_3|-\gamma_3)-1}\times$$

(104) $$\times E_c^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E_c^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau)-\xi_2)E^d(t,\tau),\ k_3\neq 0,$$

де $0<\tau<t\leqslant T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $y'\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}$, $z_s\in\mathbb{R}^{n_s}$, $s\in\mathbb{N}_3$, $k':=(0,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n$, $\gamma_1^0\in(0,1]$, $\{\gamma_2^0,\gamma_3^0\}\subset(0,1]$, $H_s(h,\tau):=(B(h,\tau))^{m_s\gamma_s}+|Y_s(h,\tau)-z_s|^{\gamma_s}$, $s\in\{2,3\}$, $h\in[\tau,T]$, γ_1, γ_2, γ_3 *– числа з умов* (15)–(17).

Лема 6 стосується властивостей об'ємного потенціалу (4) з першого етапу побудови ФРЗК.

Лема 6. *Нехай коефіцієнти рівняння* (2) *задовольняють умови* ***(i)–(iii)****. Тоді правильні такі твердження:*

1) *функція* (4) *має неперервні похідні вигляду* $\partial_x^k W_1$, *де мультиіндекс* $k:=(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n$ *такий, що*

$$||k||:=|k_1|+2(|k_2|+|k_3|)\leqslant 2.$$

Похідні визначаються формулами

(105) $$\partial_{x_1}^{k_1}W_1(t,x;\tau,\xi;y')=\int\limits_\tau^t\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_1(t,x;\theta,\lambda;y')Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda,\ |k_1|=1,$$

$$\partial_{x_1}^{k_1}W_1(t,x;\tau,\xi;y')=\int\limits_\tau^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_1(t,x;\theta,\lambda;y')Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_1(t,x;\theta,\lambda;y')\Delta_{\lambda}^{X(t,\theta)}Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}G_1(t,x;\theta,\lambda;y')d\lambda\Big)\,Q_1(\theta,X(t,\theta);\tau,\xi;y')\frac{d\theta}{\alpha(\theta)},\ |k_1|=2, \tag{106}$$

$$\partial_x^{k'}W_1(t,x;\tau,\xi;y')=\int_{\tau}^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^{k'}G_1(t,x;\theta,\lambda;y')Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int_{\mathbb{R}^n}G_1(t,x;\theta,\lambda;y')\partial_x^{k'}Q_1(\theta,\lambda;\tau,\xi;y')d\lambda,\ |k'|\neq 0; \tag{107}$$

2) *справджуються оцінки*

$$|\partial_{x_1}^{k_1}W_1(t,x;\tau,\xi;y')|\leqslant C(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}+m_1\gamma_1}E_c^d(t,\tau,x,\xi),\ ||k||\leqslant 2, \tag{108}$$

$$|\Delta_{x_s}^{z_s}\partial_{x_1}^{k_1}W_1(t,x;\tau,\xi;y')|\leqslant C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-M-M_{k'}+m_1\gamma_1-m_s\gamma_s^0}\times$$

$$\times(E_c^d(t,\tau,x,\xi)+E_c^d(t,\tau,z^{(s)},\xi)),\ ||k||=2,\ s\in\mathbb{N}_3, \tag{109}$$

$$|\Delta_{y_s}^{z_s}\partial_{x_l}W_1(t,x;\tau,\xi;y')|\leqslant CH_s(h,\tau)(B(t,\tau))^{-M-m_l+m_1\gamma_1}\times$$

$$\times E_c^d(t,\tau,x,\xi),\ \{s,l\}\subset\{2,3\}, \tag{110}$$

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}W_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\Big|\leqslant C(B(t,\tau))^{-M_{k'}+m_1\gamma_1}E^d(t,\tau),\ 0<||k||\leqslant 2, \tag{111}$$

$$\Big|\Delta_{x_s}^{z_s}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^{k}W_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi\Big|\leqslant C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}\times$$

$$\times(B(t,\tau))^{-M_k-m_s\gamma_s^0+m_1\gamma_1}E^d(t,\tau),\ 0<||k||\leqslant 2,\ s\in\mathbb{N}_3, \tag{112}$$

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^{k}W_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2d\xi_3\Big|\leqslant C(B(t,\tau))^{-m_1n_1-M_k+m_1\gamma_1}\times$$

$$\times E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E^d(t,\tau),\ ||k||\leqslant 2, \tag{113}$$

$$\Big|\Delta_{x_s}^{z_s}\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_x^{k}W_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_2d\xi_3\Big|\leqslant C|x_s-z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-m_1n_1-M_k-m_s\gamma_s^0+m_1\gamma_1}\times$$

$$\times(E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)+E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,z_1-\xi_1))E^d(t,\tau),\ ||k||=2,\ s\in\mathbb{N}_3, \tag{114}$$

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^{n_3}}\partial_x^{k}W_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3\Big|\leqslant C(B(t,\tau))^{-m_1n_1-m_2n_2-M_k+m_1\gamma_1}\times$$

$$\times E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau)-\xi_2)E^d(t,\tau),\ ||k||\leqslant 2, \tag{115}$$

$$\Big| \Delta_{x_s}^{z_s} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_x^k W_1(t,x;\tau,\xi;y')d\xi_3 \Big| \leqslant C|x_s - z_s|^{\gamma_s^0}(B(t,\tau))^{-m_1n_1-m_2n_2-M_k-m_s\gamma_s^0+m_1\gamma_1}\times$$

$$\times E_{c_0}^{(1)}(t,\tau,x_1-\xi_1)E_{c_0}^{(2)}(t,\tau,X_2(t,\tau)-\xi_2)E^d(t,\tau),\ ||k||\leqslant 2,\ s\in\mathbb{N}_3, \tag{116}$$

$$\partial_x^{k'} W_1(t,x;\tau,\xi;y') = (-\partial_\xi)^{k'} W_1(t,x;\tau,\xi;y'),\ k'\neq 0, \tag{117}$$

У формулах (105)–(117) $0<\tau<t\leqslant T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $y'\in\mathbb{R}^{n_2+n_3}$, $z_s\in\mathbb{R}^{n_s}$, $s\in\mathbb{N}_3$, $k':=(0,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}_+^n$, $\gamma_1^0\in(0,1]$, $\{\gamma_2^0,\gamma_3^0\}\subset(0,1]$, $s\in\{2,3\}$, $h\in[\tau,T]$, $H_s(h,\tau)$ *і числа* γ_1, γ_2, γ_3 *такі, як у лемі 5.*

Доведення лем 5 і 6 проводиться відповідною модифікацією доведень з [4, 6, 9] і [1, 2] для випадку рівнянь без виродження і з виродженням на початковій гіперплощині, відповідно.

Лема 4, а також леми 5 і 6 на підставі формули (3) обґрунтовують твердження теореми 1 про ФРЗК Z_1 і завершують перший етап його побудови.

7. Другий і третій етапи побудови ФРЗК

Дослідження властивостей функцій G_j, K_j, Q_j і W_j, $j\in\{2,3\}$, у другому та третьому етапах проводиться за методикою, використаною в першому етапі. Ці дослідження в принципі повторюють з природними особливостями відповідні дослідження в першому етапі. Коротко зупинимося на цих особливостях.

Властивості параметриксу G_2 є такими, як і сформульовані в теоремі 1 для Z_1 з тією відмінністю, що $\gamma_2^0\in(0,\gamma_2]$ для Z_2 і $\gamma_2^0\in(0,1]$ для G_2, тобто Z_2 має, взагалі кажучи, нижчий показник гладкості за змінною x_2, ніж G_2. Це зумовлено тим, що саме таку гладкість має об'ємний потенціал W_2. Причина цього криється у властивостях густини Q_2, яка, загалом, не має похідної за змінною x_2, а є лише неперервною за цією змінною за Гельдером з показником γ_2. Тому для похідної $\partial_{x_2}^{k_2}W_2$, $|k_2|=1$ треба використати формулу

$$\partial_{x_2}^{k_2}W_2(t,x;\tau,\xi;y_3) = \int\limits_\tau^{t_1}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_2}^{k_2}G_2(t,x;\theta,\lambda;y_3)Q_2(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_3)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}\partial_{x_2}^{k_2}G_2(t,x;\theta,\lambda;y')d\lambda_2 d\lambda_3\Big)\times$$

$$\times\Delta_{\Lambda^{01}(t,\theta)}^{X(t,\theta)}Q_2(\theta,\Lambda^{01}(t,\theta);\tau,\xi;y_3)d\lambda_1 + \int\limits_{t_1}^{t}\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_2}^{k_2}G_2(t,x;\theta,\lambda;y_3)\times$$

$$\times\Big(\Delta_{\Lambda^{02}(t,\theta)}^{\Lambda^{01}(t,\theta)}Q_2(\theta,\Lambda^{02}(t,\theta);\tau,\xi;y_3) + \Delta_\lambda^{\Lambda^{02}(t,\theta)}Q_2(\theta,\lambda;\tau,\xi;y_3)\Big)d\lambda +$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_2}^{k_2}G_2(t,x;\theta,\lambda;y_3)d\lambda\Big)Q_2(\theta,X(t,\theta);\tau,\xi;y_3)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}. \tag{118}$$

Оцінивши звичайним способом, подібно до попереднього, інтеграли з (118), отримаємо оцінку

$$|\partial_{x_2}^{k_2} W_2(t,x;\tau,\xi;y_3)| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-m_2(1-\gamma_2)} E_{c_0}^d(t,\tau,x,\xi),$$
$$0<\tau<t\leqslant T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ y_3\in\mathbb{R}^{n_3},\ |k_2|=1.$$

Тут використано те, що

$$-m_2(1-\gamma_2) = -1 + (3\gamma_2-1)/2 \qquad \text{і} \qquad 3\gamma_2 - 1 > 0,$$

бо згідно з умовою (16) маємо $\gamma_2 \in (1/3, 2/3]$.

Аналогічна ситуація виникає на третьому етапі. На цьому етапі G_3, Q_3 і W_3 від параметра y вже не залежать. Формули для похідних $\partial_{x_3}^{k_3} W_3$, $|k_3|=1$ набувають вигляду

$$\partial_{x_3}^{k_3} W_3(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_3}^{k_3} G_3(t,x;\theta,\lambda) Q_3(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} G_3(t,x;\theta,\lambda)d\lambda_2 d\lambda_3 \Big) \Delta_{\Lambda^{01}(t,\theta)}^{X(t,\theta)} Q_3(\theta,\Lambda^{01}(t,\theta);\tau,\xi)d\lambda_1 +$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} G_3(t,x;\theta,\lambda)d\lambda_3 \Big) \Delta_{\Lambda^{01}(t,\theta)}^{\Lambda^{02}(t,\theta)} Q_3(\theta,\Lambda^{01}(t,\theta);\tau,\xi)d\lambda_1 +$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} \partial_{x_3}^{k_3} G_3(t,x;\theta,\lambda) \Delta_{\lambda}^{\Lambda^{02}(t,\theta)} Q_3(\theta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda +$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} \partial_{x_3}^{k_3} G_3(t,x;\theta,\lambda)d\lambda \Big) Q_3(\theta,X(t,\theta);\tau,\xi)\frac{d\theta}{\alpha(\theta)}.$$

Оцінювання інтегралів із цієї формули приводить до такого результату:

$$|\partial_{x_3}^{k_3} W_3(t,x;\tau,\xi)| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-m_3(1-\gamma_3)} E_{c_0}^d(t,\tau,x,\xi),$$
$$0<\tau<t\leqslant T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ |k_3|=1,$$

де $-m_3(1-\gamma_3) = -1+(5\gamma_3-3)/2$ і $5\gamma_3 - 3 > 0$, оскільки за умовою (17) маємо, що $\gamma_3 \in (3/5, 2/3]$.

З властивостей функцій G_j і W_j, $j\in\{2,3\}$ випливають твердження теореми 2, а також твердження теореми 3 про існування ФРЗК $Z := Z_3$ та його оцінки (70). Оцінка (71) випливає з оцінок (70) і того, що Z є розв'язком рівняння (10).

Отже, основним результатом дослідження в цій статті є така теорема.

Теорема 4. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (10) *виконуються умови* **(i)–(iii)**. *Тоді для рівняння* (10) *існує ФРЗК* Z, *для якого справджуються оцінки*

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-M_k} E_c^d(t,\tau)(t,\tau,x,\xi), \tag{119}$$

$$|SZ(t,x;\tau,\xi)| \leqslant C(B(t,\tau))^{-M-1} E_c^d(t,\tau,x,\xi) \tag{120}$$

у яких $0 < \tau < t \leqslant T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}_+^n$, $m_1|k_1| + |k_2| + |k_3| \leqslant 1$, C *і* c *– додатні сталі,* $d \in \mathbb{R}$.

Зауваження 2. У випадку слабкого виродження рівняння (10) в оцінках (119) і (120) можна брати $\tau = 0$ і $d = 0$.

Список використаної літератури

1. О. Г. Возняк, С. Д. Івасишен, І. П. Мединський, *Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині*, Буковинський мат. журн. **3** (2015), no. 3–4, 41–51.
2. О. Г. Возняк, С. Д. Івасишен, І. П. Мединський, *Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторовими змінних та виродженням на початковій гіперплощині*, Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка": Збірник наук. праць, серія: Фізико-математичні науки, - Львів: Вид-во Львівської політехніки, (2017), no. 871, 46–64.
3. О. Г. Возняк, С. Д. Івасишен, І. П. Мединський, *Фундаментальний роз-в'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторовими змінних та виродженням на початковій гіперплощині*, Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка": Збірник наукових праць, серія: Фізико-математичні науки, - Львів: Вид-во Львівської політехніки, (2018), no. 898, С. 13–21.
4. С. Д. Івасишен, І. П. Мединський, *Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження,* Буковинський мат. журн. **2** (2014), no. 2–3, 94–106.
5. С. Д. Івасишен, І. П. Мединський, *Класичні фундаментальні розв'язки для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних* , Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу. Зб. праць Ін-ту математики НАН України **13** (2016), no. 1, 108–155.
6. С. Д. Івасишен, І. П. Мединський, *Про класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних,* Мат. методи та фіз.-мех. поля. **59** (2016), no. 2, 28–42; **English version:** S. D. Ivasyshen and I. P. Medyns'kyi, *On the classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two qroups of spatial variables*, J. Math. Sci. **231** (2018), no. 4, 507–526. DOI: 10/1007/s10958-018-3830-0
7. S. D. Ivashyshen and I. P. Medynsky, *On applicatios of the Levi method in the theory of parabolic equations*, Mat. Stud. **47** (2017), no. 1, 33–46. DOI: 10.15330/ms.47.1.33-46
8. С. Д. Івасишен, І. П. Мединський, *Про класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова.* Сучасні проблеми механіки і математики: в 3-х т. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, **1** (2013), 36–38.
9. С. Д. Івасишен, І. П. Мединський, *Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. I*, Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2017, **60** (2017), no. 3, 9–31; **English version:** S. D. Ivasyshen and I. P. Medyns'kyi. *Classical fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration, I*, J. Math. Sci. **246** (2020), no. 3, 121–151. DOI: 10.1007/s10958-020-04726-z
10. С. Д. Івасишен, І. П. Мединський, *Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. II*, Мат. методи та фіз.-мех. поля. **60** (2017), no. 4, 7–24; **English**

version: S. D. Ivasyshen and I. P. Medyns'kyi. *Classical fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration, II*, J. Math. Sci. **247** (2020), no. 1, 1–23. DOI: 10.1007/s10958-020-04786-1

11. S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, and A. N. Kochubei, *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type.* Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. **152**, Basel: Birkhäuser, 2004. DOI: 10.1007/978-3-0348-7844-9

Стаття: надійшла до редколегії 06.03.2019
прийнята до друку 03.02.2020

FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ULTRAPARABOLIC KOLMOGOROV-TYPE EQUATIONS WITH THREE GROUPS OF SPATIAL VARIABLES AND with DEGENERATION ON THE INITIAL HYPERPLANE

Olga VOZNYAK[1], Stepan IVASYSHEN[2], Igor MEDYNSKY[3]

[1] *Ternopil Natonal Economic University, Lvivska Str., 11, 46020, Ternopil, Ukraine*
[2] *National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Prosp. Peremohy, 37, 03056, Kyiv, Ukraine*
[3] *Lviv Polytechnic National University, Bandera Str., 12, 79013, Lviv, Ukraine*
e-mails: o.g.voznyak@gmail.com, ivashyshen.sd@gmail.com, i.p.medynsky@gmail.com

The aim of this paper is to construct the classical fundamental solution of the Cauchy problem (FSCP) for degenerate ultraparabolic equation of Kolmogorov type with three groups of spatial variables and with degeneration on the initial hyperplane. In this paper we consider equations with two groups of degeneration. So that in this case the spatial $x \in \mathbb{R}^n$ consist of three groups of variables $x := (x_1, x_2, x_3)$, $x_j := (x_{j1}, \ldots, x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, $n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3 \geqslant 1$, $n = n_1 + n_2 + n_3$. We shall say that t and x_1 are basic variables and x_2, x_3 are variables of degeneration. Similarly to the case of non-degenerate parabolic equations it is possible to obtain a complete analytic description of the FSCP, which leads to a very precise results for solutions of the Kolmogorov type equations with constant coefficients or coefficients depending only on time variable. If coefficients of a Kolmogorov type equation depend on all variables, then it is much more complicated to study its FSCP. In additional usual difficulties of the Levi Method, new serious difficulties are caused by degeneracy of the equations. The number of the parameters is equal to the number of the groups of degeneration in the equation. At the next stage of constructing FSCP we choose the above FSCP as the parametrix. The number of stages of the constructing FSCP depend on the quantity of the groups of spatial variables in the equation.

The analysis shows that a solution of the problem of constructing the classical FSCP consists not only in choice of suitable conditions on the coefficients but also in successful choice of a parametrix for the Levi method. Our approach is based on step-by-step use of the Levi method. On the first stage an FSCP for the equation with coefficients depending on the basic variables and the parameters is constructed. Such an approach is realized in this paper. Its basic results are the following. The classical FSCP for degenerate ultraparabolic equation of Kolmogorov type with three groups of spatial variables and with degeneration on the initial hyperplane is constructed. Exact estimations of this solution and its derivatives are obtained.

Key words: parabolic equations with degenerations, fundamental solution of the Cauchy problem, degeneration on the initial hyperplane, Levi method, ultraparabolic equations of the Kolmogorov type.