ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 98–106
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 98–106
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.098-106

УДК 517.925.4

БЛИЗЬКІСТЬ ДО ОПУКЛОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО НЕОДНОРІДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Юрій ТРУХАН, Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, 79000, м. Львів
e-mail: yurkotrukhan@gmail.com, m.m.sheremeta@gmail.com

Розгляуто неоднорідне диференціальне рівняння Шаха

$$z^2w'' + +(\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = A(z),$$

де $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, а радіус збіжності останнього степеневого ряду $R[A] \geqslant 1$. Визначено умови на коефіцієнти a_n степеневого розвинення функції $A(z)$ та на параметри β_0, β_1, γ_0, γ_1, γ_2, за яких неоднорідне рівняння Шаха має близькі до опуклих в одиничному крузі розв'язки. Окремо розглянуто випадки $\gamma_2 = 0$ та $\gamma_2 > 0$, кожен із яких теж розпадається на підвипадки.

Ключові слова: неоднорідне диференціальне рівняння, близькість до опуклості.

1. **Вступ і допоміжні леми**

Однолиста аналітична в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \tag{1}$$

називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ – опукла область. Добре відомо [1, с. 203], що умова $\mathrm{Re}\,\{1 + zf''(z)/f'(z)\} > 0\,(z \in \mathbb{D})$ є необхідною і достатньою для опуклості f. Функція f називається [2], [1, с. 583] близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо існує опукла в $\mathbb{D}$ функція Φ така, що $\mathrm{Re}\,(f'(z)/\Phi'(z)) > 0\,(z \in \mathbb{D})$. Близька до опуклої функція f характеризується тим, що зовнішність G області $f(\mathbb{D})$ можна заповнити променями, які виходять з ∂G і повністю лежать в G. Кожна близька до опуклої функція є

2010 Mathematics Subject Classification: 34M05, 30B10, 30C45.

однолистою в $\mathbb{D}$, і тому $f'(0) \neq 0$. Звідси випливає, що f є близькою до опуклої тоді і тільки тоді, коли такою є функція

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} g_n z^n, \tag{2}$$

де $g_n = f_n/f_1$.

С. Шах [3] вказав умови на дійсні коефіцієнти β_0, β_1, γ_0, γ_1, γ_2 диференціального рівняння

$$z^2 w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0,$$

за яких існує цілий трансцендентний розв'язок f такий, що або всі його похідні, або парні похідні, або непарні похідні є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ функціями. Дослідження С. Шаха продовжено у [4, 5]. Ми розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння Шаха

$$z^2 w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{3}$$

з комплексними параметрами, де радіус збіжності ряду $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ дорівнює $R[A] \in (0, +\infty]$.

Найперше зауважимо, що [6] аналітична в деякому околі початку координат функція (1) є розв'язком диференціального рівняння (3) тоді і тільки тоді, коли

$$\gamma_2 f_0 = a_0, \quad (\beta_1 + \gamma_2)f_1 + \gamma_1 f_0 = a_1 \tag{4}$$

і для $n \geq 2$

$$(n(n + \beta_1 - 1) + \gamma_2)f_n + (\beta_0(n-1) + \gamma_1)f_{n-1} + \gamma_0 f_{n-2} = a_n. \tag{5}$$

В [6] доведено таку лему.

Лема 1. *Якщо функція* (1) *є розв'язком рівняння* (3) *і* $n(n + \beta_1 - 1) + \gamma_2 \neq 0$ *для всіх* $n \geq 2$, *то* $R[f] = R[A]$.

Добре відома [7], [8, с. 9] така лема Александера.

Лема 2. *Якщо коефіцієнти аналітичної в* $\mathbb{D}$ *функції* (2) *задовольняють умову*

$$1 \geq 2g_2 \geq 3g_3 \geq \cdots \geq ng_n \geq (n+1)g_{n+1} \geq \cdots > 0 \tag{6}$$

то вона близька до опуклої.

Оскільки для коефіцієнтів розв'язку рівняння (3) правильна рекурентна формула (5), то буде корисною така лема.

Лема 3. *Нехай* $g_0 = 0$, $g_1 = 1$ *і*

$$g_{n+1} = \xi_n g_n + \eta_n g_{n-1} + b_n, \quad n \geq 1, \tag{7}$$

де ξ_n, η_n, b_n *- додатні числа. Припустимо, що:*

1) $2(\xi_1 + b_1) \leq 1$*;*

2) $(n+1)b_n \leq nb_{n-1}$ *для всіх* $n \geq 2$*;*

3) $\dfrac{3}{2}\xi_2 + 3\eta_2 \le 2\xi_1$;

4) $\dfrac{n+1}{n}\xi_n \le \dfrac{n}{n-1}\xi_{n-1}$ *і* $\dfrac{n+1}{n-1}\eta_n \le \dfrac{n}{n-2}\eta_{n-1}$ *для всіх* $n \ge 3$.

Тоді правильні нерівності (6).

Доведення. Оскільки $g_2 = \xi_1 + b_1$, то з умови 1) випливає нерівність $1 \ge 2g_2$. Для $n = 2$ маємо $g_3 = \xi_2 g_2 + \eta_2 + b_2$, і отже, з огляду на умову 3) і умову 2) з $n = 2$ отримуємо

$$3g_3 = 3\xi_2 g_2 + 3\eta_2 + 3b_2 \le \frac{3}{2}\xi_2 + 3\eta_2 + 3b_2 \le 2\xi_1 + 2b_1 = 2g_2.$$

Припустимо, що $n \ge 3$ і $1 \ge 2g_2 \ge 3g_3 \ge \dots \ge ng_n$. Тоді з огляду на умови 2) і 4)

$$\begin{aligned}
&(n+1)g_{n+1} - ng_n = (n+1)\xi_n g_n + (n+1)\eta_n g_{n-1} + (n+1)b_n - \\
&- n\xi_{n-1}g_{n-1} - n\eta_{n-1}g_{n-2} - nb_{n-1} = \\
&= \frac{n+1}{n}\xi_n n g_n - \frac{n}{n-1}\xi_{n-1}(n-1)g_{n-1} + \frac{n+1}{n-1}\eta_n(n-1)g_{n-1} - \\
&- \frac{n}{n-2}\eta_{n-1}(n-2)g_{n-2} + (n+1)b_n - nb_{n-1} \le \\
&\le \frac{n}{n-1}\xi_{n-1}(ng_n - (n-1)g_{n-1}) + \frac{n}{n-2}\eta_{n-1}((n-1)g_{n-1} - (n-2)g_{n-2}) \le 0
\end{aligned}$$

Лему 3 доведено. □

Вважаючи, що $n(n + \beta_1 - 1) + \gamma_2 \ne 0$ для всіх $n \ge 2$, рекурентну формулу (5) можемо переписати у вигляді

$$f_n = -\frac{\beta_0(n-1) + \gamma_1}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2} f_{n-1} - \frac{\gamma_0}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2} f_{n-2} + \frac{a_n}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2}.$$

Для того, щоб використати лему 3 будемо вважати, що $\beta_0 \le 0$, $\gamma_0 \le 0$, $\gamma_1 \le 0$, $\gamma_2 \ge 0$, $\beta_1 \ge -1$ і $a_n \ge 0$ $(n \ge 2)$. Тоді

$$f_n = \frac{|\beta_0|(n-1) + |\gamma_1|}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2} f_{n-1} + \frac{|\gamma_0|}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2} f_{n-2} + \frac{a_n}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2}. \tag{8}$$

З першої рівності (4) випливає, що вибір f_0 залежить від того, яким є параметр γ_2. Дослідження почнемо з простішого випадку.

2. **Випадок** $\gamma_2 = 0$

З (4) випливає, що $a_0 = 0$, тобто f_0 може бути будь-яким; виберемо $f_0 = 0$. Тоді $\beta_1 f_1 = a_1$. Тому можливі два такі варіанти:

2а) $\beta_1 = a_1 = 0$;

2б) $\beta_1 \ne 0$ і $a_1 \ne 0$.

За умови 2а) f_1 може бути будь-яким; виберемо $f_1 = 1$. Тому розв'язок рівняння (3) шукатимемо у вигляді

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n, \tag{9}$$

де коефіцієнти f_n, як видно з (8), визначаються рекурентною формулою

$$f_{n+1} = \frac{|\beta_0|n + |\gamma_1|}{n(n+1)} f_n + \frac{|\gamma_0|}{n(n+1)} f_{n-1} + \frac{a_{n+1}}{n(n+1)}. \tag{10}$$

Формула (10) збігається з формулою (7), якщо $f_n = g_n$ і

$$\xi_n = \frac{|\beta_0|n + |\gamma_1|}{n(n+1)}, \quad \eta_n = \frac{|\gamma_0|}{n(n+1)}, \quad b_n = \frac{a_{n+1}}{n(n+1)}.$$

Легко перевірити, що умови 1) - 4) леми 3 збігаються, відповідно, з умовами:

1^a) $|\beta_0| + |\gamma_1| + a_2 \leq 1$;

2^a) $\dfrac{a_{n+1}}{n} \leq \dfrac{a_n}{n-1}$ для всіх $n \geq 2$;

3^a) $|\gamma_0| \leq |\beta_0| + 3|\gamma_1|/2$;

4^a) $\dfrac{|\beta_0|n + |\gamma_1|}{n^2} \leq \dfrac{|\beta_0|(n-1) + |\gamma_1|}{(n-1)^2}$ і $\dfrac{|\gamma_0|}{n} \leq \dfrac{|\gamma_0|}{n-2}$ для всіх $n \geq 3$.

Оскільки нерівності в умові 4^a) є очевидними, то за лемами 1—3 отримуємо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай* $\gamma_2 = a_0 = \beta_1 = a_1 = 0$, $\beta_0 \leq 0$, $\gamma_0 \leq 0$, $\gamma_1 \leq 0$, $|\beta_0| + |\gamma_1| + a_2 \leq 1$ *і* $|\gamma_0| \leq |\beta_0| + 3|\gamma_1|/2$, *а* $R[A] \geq 1$ *і* $0 < \dfrac{a_{n+1}}{n} \leq \dfrac{a_n}{n-1}$ *для всіх* $n \geq 2$. *Тоді існує розв'язок* (9) *диференціального рівняння* (3) *з* $R[f] = R[A]$, *який близький до опуклої в* $\mathbb{D}$ *функцією.*

За умови 2б) розв'язок диференціального рівняння (3) набуває вигляду

$$f(z) = \frac{a_1}{\beta_1} z + \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n, \tag{11}$$

де коефіцієнти f_n визначаються рекурентною формулою

$$n(n + \beta_1 - 1) f_n + (\beta_0(n-1) + \gamma_1) f_{n-1} + \gamma_0 f_{n-2} = a_n,$$

з якої за умов $\beta_0 \leq 0$, $\gamma_0 \leq 0$, $\gamma_1 \leq 0$ і $n + \beta_1 - 1 \neq 0$ для всіх $n \geq 2$ випливає, що

$$f_{n+1} = \frac{|\beta_0|n + |\gamma_1|}{(n+1)(n+\beta_1)} f_n + \frac{|\gamma_0|}{(n+1)(n+\beta_1)} f_{n-1} + \frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+\beta_1)}. \tag{12}$$

Припустимо, що $a_1/\beta_1 \in (0, +\infty)$. Оскільки для коефіцієнтів відповідної функції (2) виконується $g_n = \beta_1 f_n / a_1$, то з (12) випливає рекурентна формула

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= \frac{\beta_1}{a_1} f_{n+1} = \\ &= \frac{|\beta_0|n + |\gamma_1|}{(n+1)(n+\beta_1)} f_n \frac{\beta_1}{a_1} + \frac{|\gamma_0|}{(n+1)(n+\beta_1)} f_{n-1} \frac{\beta_1}{a_1} + \frac{\beta_1}{a_1} \frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+\beta_1)} = \\ &= \frac{|\beta_0|n + |\gamma_1|}{(n+1)(n+\beta_1)} g_n + \frac{|\gamma_0|}{(n+1)(n+\beta_1)} g_{n-1} + \frac{\beta_1}{a_1} \frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+\beta_1)}, \end{aligned}$$

яка збігається з формулою (7), якщо

$$\xi_n = \frac{|\beta_0|n + |\gamma_1|}{(n+1)(n+\beta_1)}, \quad \eta_n = \frac{|\gamma_0|}{(n+1)(n+\beta_1)}, \quad b_n = \frac{\beta_1}{a_1} \frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+\beta_1)}.$$

Легко перевірити, що умови 1)—4) леми 3 збігаються тепер відповідно з умовами:

1^b) $|\beta_0| + |\gamma_1| + a_2\frac{\beta_1}{a_1} \le (1+\beta_1)$;

2^b) $\dfrac{a_{n+1}}{n+\beta_1} \le \dfrac{a_n}{n-1+\beta_1}$ для всіх $n \ge 2$;

3^b) $|\gamma_0| \le \dfrac{|\beta_0|}{1+\beta_1} + \dfrac{(3+\beta_1)|\gamma_1|}{2(1+\beta_1)}$;

4^b) $\dfrac{|\beta_0|n+|\gamma_1|}{n(n+\beta_1)} \le \dfrac{|\beta_0|(n-1)+|\gamma_1|}{(n-1)(n-1+\beta_1)}$ і $\dfrac{|\gamma_0|}{(n-1)(n+\beta_1)} \le \dfrac{|\gamma_0|}{(n-2)(n-1+\beta_1)}$ для всіх $n \ge 3$.

Оскільки нерівності в умові 4^b) очевидні, то за лемами 1—3 отримуємо таку теорему.

Теорема 2. *Нехай $\gamma_2 = a_0 = 0$, $\beta_1 > -1$, $a_1/\beta_1 \in (0,+\infty)$, $\beta_0 \le 0$, $\gamma_0 \le 0$, $\gamma_1 \le 0$, $|\beta_0| + |\gamma_1| + a_2\dfrac{\beta_1}{a_1} \le (1+\beta_1)$ і $|\gamma_0| \le \dfrac{|\beta_0|}{1+\beta_1} + \dfrac{(3+\beta_1)|\gamma_1|}{2(1+\beta_1)}$, а $R[A] \ge 1$ і $0 < \dfrac{a_{n+1}}{n+\beta_1} \le \dfrac{a_n}{n-1+\beta_1}$ для всіх $n \ge 2$. Тоді існує розв'язок (11) диференціального рівняння (3) з $R[f] = R[A]$, який є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$ функцією.*

3. Випадок $\gamma_2 > 0$

З (4) випливає, що $f_0 = a_0/\gamma_2$ і $(\beta_1+\gamma_2)f_1 = a_1 - \gamma_1 f_0$. Оскільки $f_1 \ne 0$, то з огляду на (4) можливі два такі варіанти:

3а) $\beta_1 + \gamma_2 = a_1 - \gamma_1 f_0 = 0$;

3б) $\beta_1 + \gamma_2 \ne 0$ і $a_1 - \gamma_1 f_0 \ne 0$.

Якщо виконується умова 3а), то можна вибрати $f_1 = 1$, і розв'язок диференціального рівняння (3) матиме вигляд

$$f(z) = \frac{a_0}{\gamma_2} + z + \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n, \tag{13}$$

де коефіцієнти f_n визначаються рекурентною формулою

$$(n-1)(n+\beta_1)f_n + (\beta_0(n-1)+\gamma_1)f_{n-1} + \gamma_0 f_{n-2} = a_n,$$

з якої за умов $\beta_0 \le 0$, $\gamma_0 \le 0$, $\gamma_1 \le 0$, $\beta_1 > -2$ і $a_{n+1} \ge 0$ для всіх $n \ge 1$ випливає, що

$$f_{n+1} = \frac{|\beta_0|n+|\gamma_1|}{n(n+1+\beta_1)}f_n + \frac{|\gamma_0|}{n(n+1+\beta_1)}f_{n-1} + \frac{a_{n+1}}{n(n+1+\beta_1)}. \tag{14}$$

Прийнявши $g(z) = f(z) - a_0/\gamma_2$, отримаємо функцію (2) з $g_n = f_n$. Тому формула (14) збігається з формулою (7), якщо

$$\xi_n = \frac{|\beta_0|n+|\gamma_1|}{n(n+1+\beta_1)}, \qquad \eta_n = \frac{|\gamma_0|}{n(n+1+\beta_1)}, \qquad b_n = \frac{a_{n+1}}{n(n+1+\beta_1)}.$$

Легко перевірити, що умови 1) - 4) леми 3 збігаються тепер, відповідно, з умовами:

1^c) $|\beta_0| + |\gamma_1| + a_2 \le \dfrac{2+\beta_1}{2}$;

2^c) $\dfrac{(n+1)a_{n+1}}{n(n+1+\beta_1)} \le \dfrac{na_n}{(n-1)(n+\beta_1)}$ для всіх $n \ge 2$;

3^c) $|\gamma_0| \leq \dfrac{6+\beta_1}{3(2+\beta_1)}|\beta_0| + \dfrac{18+5\beta_1}{6(2+\beta_1)}|\gamma_1|$;

4^c) $\dfrac{(n+1)(|\beta_0|n+|\gamma_1|)}{n^2(n+1+\beta_1)} \leq \dfrac{n(|\beta_0|(n-1)+|\gamma_1|)}{(n-1)^2(n+\beta_1)}$ і $\dfrac{(n+1)|\gamma_0|}{n(n-1)(n+1+\beta_1)} \leq$ $\leq \dfrac{n|\gamma_0|}{(n-2)(n-1)(n+\beta_1)}$ для всіх $n \geq 3$.

Оскільки нерівності в умові 4^c) очевидні, то за лемами 1—3 отримуємо таку теорему.

Теорема 3. *Нехай $\gamma_2 > 0$, $\beta_1 > -2$, $\beta_1 + \gamma_2 = \gamma_2 a_1 - \gamma_1 a_0 = 0$, $\beta_0 \leq 0$, $\gamma_0 \leq 0$, $\gamma_1 \leq 0$, $|\beta_0| + |\gamma_1| + a_2 \leq (2+\beta_1)/2$ і $|\gamma_0| \leq \dfrac{6+\beta_1}{3(2+\beta_1)}|\beta_0| + \dfrac{18+5\beta_1}{6(2+\beta_1)}|\gamma_1|$, а $R[A] \geq 1$ і $0 < \dfrac{(n+1)a_{n+1}}{n(n+1+\beta_1)} \leq \dfrac{na_n}{(n-1)(n+\beta_1)}$ для всіх $n \geq 2$. Тоді існує розв'язок* (13) *диференціального рівняння* (3) *з $R[f] = R[A]$, який є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$ функцією.*

Нехай, нарешті, виконується умова 3б). Тоді з (4) отримуємо $f_0 = a_0/\gamma_2$,

$$f_1 = \frac{a_1 - \gamma_1 f_0}{\beta_1 + \gamma_2} = \frac{\gamma_2 a_1 - \gamma_1 a_0}{\gamma_2(\beta_1 + \gamma_2)},$$

і отже, розв'язок набуває вигляду

$$f(z) = \frac{a_0}{\gamma_2} + \frac{\gamma_2 a_1 - \gamma_1 a_0}{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)} z + \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n, \tag{15}$$

де за умов $\beta_0 \leq 0$, $\gamma_0 \leq 0$, $\gamma_1 \leq 0$, $\beta_1 \geq -1$ і $a_{n+1} \geq 0$ для $n \geq 1$ коефіцієнти f_n визначаються рекурентною формулою

$$f_{n+1} = \frac{|\beta_0|n + |\gamma_1|}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2} f_n + \frac{|\gamma_0|}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2} f_{n-1} + \frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2}. \tag{16}$$

Припустимо, що $\dfrac{\gamma_2 a_1 - \gamma_1 a_0}{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)} \in (0, +\infty)$. Прийнявши $g(z) = \left(f(z) - \dfrac{a_0}{\gamma_2}\right) q$, де $q = \dfrac{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}{\gamma_2 a_1 - \gamma_1 a_0}$, отримаємо функцію (2) з $g_n = q f_n$, $n \geq 1$. З (16) одержуємо рекурентну формулу

$$g_{n+1} = \frac{|\beta_0|n + |\gamma_1|}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2} g_n + \frac{|\gamma_0|}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2} g_{n-1} + \frac{q a_{n+1}}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2},$$

яка збігається з формулою (7), якщо

$$\xi_n = \frac{|\beta_0|n + |\gamma_1|}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2}, \quad \eta_n = \frac{|\gamma_0|}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2}, \quad b_n = q\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2}.$$

Легко перевірити, що умови 1) - 4) леми 3 збігаються тепер, відповідно, з умовами:

1^d) $|\beta_0| + |\gamma_1| + q a_2 \leq (1+\beta_1) + \gamma_2/2$;

2^d) $\dfrac{(n+1)a_{n+1}}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2} \leq \dfrac{na_n}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2}$ для всіх $n \geq 2$;

3^d) $|\gamma_0| \leq \dfrac{(12-2\gamma_2)|\beta_0| + (18+6\beta_1+\gamma_2)|\gamma_1|}{12(1+\beta_1)+6\gamma_2}$;

4^d) $\dfrac{n+1}{n}\dfrac{|\beta_0|n+|\gamma_1|}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2} \le \dfrac{n}{n-1}\dfrac{|\beta_0|(n-1)+|\gamma_1|}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2}$ і

$$\frac{n+1}{n-1}\frac{|\gamma_0|}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2} \le \frac{n}{n-2}\frac{|\gamma_0|}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2}$$

для всіх $n \ge 3$.

Друга нерівність в умові 4^d) очевидна. Оскільки $(n+1)/n < n/(n-1)$, то перша нерівність в умові 4^d) правильна, якщо

$$\frac{|\beta_0|n+|\gamma_1|}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2} \le \frac{|\beta_0|(n-1)+|\gamma_1|}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2}$$

для всіх $n \ge 3$. Ця нерівність рівносильна нерівності

$$(n^2-n-\beta_1-\gamma_2)|\beta_0|+|\gamma_1|(2n+\beta_1) \ge 0$$

для всіх $n \ge 3$. Позаяк функція (x^2-x) є зростаючою на $[3,+\infty)$, то остання нерівність правильна, якщо $(6-\beta_1-\gamma_2)|\beta_0|+|\gamma_1|(6+\beta_1) \ge 0$.

Отже, правильна така теорема.

Теорема 4. *Нехай* $\gamma_2 > 0$, $\beta_1 > -1$, $\dfrac{\gamma_2 a_1 - \gamma_1 a_0}{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)} \in (0,+\infty)$, $\beta_0 \le 0$, $\gamma_0 \le 0$, $\gamma_1 \le 0$, $|\beta_0|+|\gamma_1|+a_2\dfrac{\gamma_2(\beta_1+\gamma_2)}{\gamma_2 a_1-\gamma_1 a_0} \le 1+\beta_1+\dfrac{\gamma_2}{2}$, $|\gamma_0| \le \dfrac{(12-2\gamma_2)|\beta_0|+(18+6\beta_1+\gamma_2)|\gamma_1|}{12(1+\beta_1)+6\gamma_2}$ *і* $(6-\beta_1-\gamma_2)|\beta_0|+|\gamma_1|(6+\beta_1) \ge 0$, *а* $R[A] \ge 1$ *і*

$$0 < \frac{(n+1)a_{n+1}}{(n+1)(n+\beta_1)+\gamma_2} \le \frac{na_n}{n(n+\beta_1-1)+\gamma_2}$$

для всіх $n \ge 2$. *Тоді існує розв'язок* (15) *диференціального рівняння* (3) *з* $R[f] = R[A]$, *який є близькою до опуклої в* $\mathbb{D}$ *функцією.*

4. Зауваження

1. Умова $(6-\beta_1-\gamma_2)|\beta_0|+|\gamma_1|(6+\beta_1) \ge 0$ виконується, якщо $\beta_1+\gamma_2 \le 6$.

2. Якщо $0 < (n+1)a_{n+1} \le na_n$, тобто функція $A(z)$ задовольняє умову леми Александера, то умови на a_n у теоремах 1—4 виконуються.

3. Припустимо, що $\gamma_2 = a_0 = \beta_1 = a_1 = \beta_0 = \gamma_1 = \gamma_0 = 0$, а $A(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ і $R[A] \ge 1$. Тоді рівняння (3) матиме вигляд $w'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-2}$, а розв'язком цього рівняння буде функція

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n(n-1)} z^n. \tag{17}$$

Якщо $0 < \dfrac{a_{n+1}}{n} \le \dfrac{a_n}{n-1}$ для всіх $n \ge 2$, тобто виконується умова 2^a), то за лемою Александера функція (17) близька до опуклої. Умову 2^a) задовольняє послідовність $a_n = 1/n!$. Тоді $A(z) = e^z - 1 - z$ — ціла функція і функція (17) також є цілою функцією. Умову 2^a) задовольняють також коефіцієнти аналітичної в $\mathbb{D}$ функції

$A(z) = \dfrac{z^2}{(1-z)^2} = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)z^n$. У цьому випадку $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{z^n}{n} = \ln\dfrac{1}{1-z}$ є також аналітичною в $\mathbb{D}$ функцією.

Зрозуміло, що коефіцієнти не всіх близьких до опуклих в $\mathbb{D}$ функцій задовольняють умови леми Александера. Наприклад, зіркова, і отже, близька до опуклої функція $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$ є розв'язком рівняння

$$z^2w'' + (z^2+z)w' + w = \frac{2z}{(1-z)^3} \qquad (\beta_1 = \beta_0 = \gamma_2 = 1,\ \gamma_0 = \gamma_1 = 0),$$

але коефіцієнти функції $A(z) = \dfrac{2z}{(1-z)^3}$ не задовольняють умову 2^d).

Список використаної літератури

1. G. M. Golusin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Amer. Math. Soc., Providence, 1969.
2. W. Kaplan, *Close-to-convex schlicht functions*, Michigan Math. J. **1** (1952), no. 2, 169–185. DOI: 10.1307/mmj/1028988895
3. S. M. Shah, *Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation, II*, J. Math. Anal. Appl. **142** (1989), no. 2, 422–430. DOI: 10.1016/0022-247X(89)90011-5
4. З. М. Шеремета, *Близькість до опуклості цілих розв'язків одного диференціального рівняння*, Мат. методи фіз.-мех. поля. **42** (1999), no. 3, 31—35.
5. З. М. Шеремета, *О свойствах целых решений одного дифференциального уравнения*, Дифференц. уравнения **36** (2000), no. 8, 1045–1050; **English version:** Z. M. Sheremeta, *The properties of entire solutions of one differential equation*, Diff. Equat. **36** (2000), no. 8, 1155–1161. DOI: 10.1007/BF02754183.
6. O. M. Mulyava, M. M. Sheremeta, and Yu. S. Trukhan, *Properties of solutions of a heterogeneous differential equation of the second order*, Carpathian Math. Publ. **11** (2019), no. 2, 379–398. DOI: 10.15330/cmp.11.2.379-398
7. J. F. Alexander, *Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions*, Annals of Math. **17** (1915), no. 1, 12–22. DOI: 10.2307/2007212
8. A. W. Goodman, *Univalent function*, Vol. **II**, Mariner Publishing Co., 1983.

Стаття: надійшла до редколегії 26.04.2019
доопрацьована 07.06.2019
прийнята до друку 03.02.2020

CLOSENESS-TO-CONVEXITY OF SOLUTIONS OF A SECOND ORDER NONHOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATION

Yuriy TRUKHAN, Myroslav SHEREMETA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: yurkotrukhan@gmail.com, m.m.sheremeta@gmail.com

An analytic univalent in $\mathbb{D}=\{z:\ |z|<1\}$ function $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_nz^n$ is said to be convex in $\mathbb{D}$ if $f(\mathbb{D})$ is a convex domain. According to W. Kaplan the function f is said to be close-to-convex in $\mathbb{D}$ if there exists a convex in $\mathbb{D}$ function Φ such that $\mathrm{Re}\,(f'(z)/\Phi'(z))>0\,(z\in\mathbb{D})$. We consider a nonhomogeneous Shah differential equation

$$z^2w''+(\beta_0z^2+\beta_1z)w'+(\gamma_0z^2+\gamma_1z+\gamma_2)w=A(z),$$

where $A(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, and radius of convergence of the last power series is $R[A]\geqslant 1$. Conditions on coefficients a_n of power expansion of the function $A(z)$ and on parameters β_0, β_1, γ_0, γ_1, γ_2 under which a Shah equation has close-to-convex in the unit disc solutions are investigated. We consider two cases: $\gamma_2=0$ and $\gamma_2>0$. In the case $\gamma_2=0$ two subcases are possible: $2a)$ $\beta_1=a_1=0$ and $2b)$ $\beta_1\neq 0$ and $a_1\neq 0$. If $\gamma_2=a_0=\beta_1=a_1=0$, $\beta_0\leq 0$, $\gamma_0\leq 0$, $\gamma_1\leq 0$, $|\beta_0|+|\gamma_1|+a_2\leq 1$ and $|\gamma_0|\leq|\beta_0|+3|\gamma_1|/2$, $R[A]\geq 1$ and $0<\dfrac{a_{n+1}}{n}\leq\dfrac{a_n}{n-1}$ for all $n\geq 2$ it is proved that there exists a solution $f(z)$ of the nonhomogeneous Shah differential equation with $R[f]=R[A]$, which is a close-to-convex in $\mathbb{D}$ function. In the case $2b)$ it is proved that if $\gamma_2=a_0=0$, $\beta_1>-1$, $a_1/\beta_1\in(0,+\infty)$, $\beta_0\leq 0$, $\gamma_0\leq 0$, $\gamma_1\leq 0$, $|\beta_0|+|\gamma_1|+a_2\dfrac{\beta_1}{a_1}\leq(1+\beta_1)$ and $|\gamma_0|\leq\dfrac{|\beta_0|}{1+\beta_1}+\dfrac{(3+\beta_1)|\gamma_1|}{2(1+\beta_1)}$, $R[A]\geq 1$ and $0<\dfrac{a_{n+1}}{n+\beta_1}\leq\dfrac{a_n}{n-1+\beta_1}$ for all $n\geq 2$ then there exists a solution $f(z)$ of the nonhomogeneous Shah differential equation with $R[f]=R[A]$, which is close-to-convex in $\mathbb{D}$ function. In the case $\gamma_2>0$ possible subcases are 3a) $\beta_1+\gamma_2=a_1-\gamma_1f_0=0$ and 3b) $\beta_1+\gamma_2\neq 0$ and $a_1-\gamma_1f_0\neq 0$. In both of this subcases the sufficient conditions on coefficients a_n and on parameters β_0, β_1, γ_0, γ_1, γ_2 under which a nonhomogeneous Shah equation has close-to-convex in the unit disc solutions are found.

Key words: nonhomogeneous differential equation, close-to-convex function.