ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 59–69
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 59–69
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.059-069

УДК 512.546

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЗА МАРКОВИМ НАБОРІВ ТИХОНОВСЬКИХ ПРОСТОРІВ 2: СПЕЦІАЛЬНІ ІЗОМОРФІЗМИ

Назар ПИРЧ

Українська Академія Друкарства,
вул. Підголоско, 19, 79020, м. Львів
e-mail: pnazar@ukr.net

Вивчаємо умови існування спеціального ізоморфізму між вільними топологічними групами, що зберігає інваріантність підгруп, а також досліджуються співвідношення між еквівалентністю наборів для різних функторів топологічної алгебри.

Ключові слова: вільна топологічна група, вільна абелева топологічна група, спеціальний ізоморфізм вільних груп, сім'я топологічних просторів, вільне топологічне кільце, вільне абелеве топологічне кільце.

1. Вступ

Ми продовжуємо вивчати еквівалентних за Марковим набори тихоновських просторів, розпочаті в [4]. У другому підрозділі ми вивчаємо умови існування спеціального ізоморфізму між вільними топологічними групами. У третьому підрозділі досліджуємо еквівалентність наборів для різних функторів топологічної алгебри.

Термінологія і позначення взято з [4]. Тут ми лише нагадаємо, що через $F(X)$ позначаємо вільну топологічну групу тихоновського простору X у сенсі Маркова, через $A(X)$ — вільну абелеву топологічну групу простору X у сенсі Маркова, через $L(X)$ — вільний локально-опуклий простір над X. Для підпростору Y простору X позначимо через $G(Y, X)$ (або скорочено $G(Y)$) групову оболонку множини Y у $F(X)$.

Означення 1. Нехай $\{X_i : i \in I\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_i : i \in I\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y. Скажемо, що сім'я $(X, \{X_i : i \in I\})$ є M-еквівалентною сім'ї $(Y, \{Y_i : i \in I\})$, якщо існує топологічний

2010 Mathematics Subject Classification: 22A05

ізоморфізм $h\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $h(A_i) \subseteq G(B_i)$ і $h^{-1}(B_i) \subseteq G(A_i)$ для всіх $i \in I$. Позначатимемо це так

$$(X, \{X_i\colon i \in I\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_i\colon i \in I\}).$$

Міняючи в цьому означенні функтор вільної топологічної групи на функтори вільної абелевої топологічного та вільного локально опуклого простору, отримаємо поняття A-еквівалентних і L-еквівалентних наборів.

2. Еквівалентність наборів і спеціальні ізоморфізми

Скажемо, що ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$ є *спеціальним*, якщо композиція $e^*_Y \circ i$ є постійним відображенням, де $e^*_Y\colon F(Y) \to \mathbb{Z}$ — гомоморфізм, який продовжує функцію $e_Y : Y \to \mathbb{Z}$, яка тотожно рівна 1 на Y. Аналогічно означується поняття спеціального ізоморфізму між вільними абелевими топологічними групами. У [2] було встановлено, що для довільних двох M-еквівалентних просторів існує спеціальний ізоморфізм між їхніми вільними топологічними групами. У [3] і [11] цей результат було узагальнено на випадок M-еквівалентних відображень і M-еквівалентних пар.

Будемо говорити, що підпростір A топологічного простору X є *$*$-зв'язним* в X, якщо для довільних двох неперетинних відкрито-замкнених підмножин U та V таких, що $U \cup V = X$ маємо, що для $A \subseteq U$ та $A \subseteq V$.

Узагальнюючи теорему 3.9 з [2] доведемо таке твердження.

Твердження 1. *Якщо $(X, \{X_s\colon s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s\colon s \in S\})$, і простір $A = \bigcup\limits_{s \in S} X_s$ є $*$-зв'язним в X, то звуження кожного топологічного ізоморфізму $i\colon F(X) \to F(Y)$ на підгрупу $G(A)$ є спеціальним ізоморфізмом.*

Доведення. Нехай $e_Y : Y \to \mathbb{Z}$ — функція, яка тотожно рівна 1 на Y, $e^*_Y : F(Y) \to \mathbb{Z}$ — гомоморфізм, який продовжує функцію e_Y. Доведемо, що $i \circ e^*_Y|_A = \mathrm{const}$. Припустимо протилежне. Нехай $z_1, z_2 \in i \circ e^*_Y(A)$ і $z_1 < z_2$. Тоді $F_1 = (-\infty, z_1]$ та $F_2 = (z_1, +\infty)$ — диз'юнктні відкрито-замкнені, взаємодоповнювані підмножини в $\mathbb{Z}$. Тоді відкрито-замкнені множини $U = (i \circ e^*_Y)^{-1}(F_1)$ та $V = (i \circ e^*_Y)^{-1}(F_2)$ задовольняють такі умови:

$$U \cup V = X, \quad U \cap V = \varnothing, \quad U \cap A \neq \varnothing, \quad V \cap A \neq \varnothing,$$

що суперечить $*$-зв'язності множини A в X. □

Теорема 1 та її доведення є незначною модифікацією теореми 3.1 з [2] та її доведення.

Теорема 1. *Якщо $(X, \{X_s\colon s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s\colon s \in S\})$, і простір $A = \bigcap\limits_{s \in S} X_s$ є непорожнім, то існує спеціальний топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $i(G(X_s)) = G(Y_s)$ для всіх $s \in S$.*

Щоб довести це твердження, нам потрібно декілька лем.

Через $\mathbb{Z}$ будемо позначати адитивну групу цілих чисел наділену дискретною топологією.

Нехай $A \subseteq X, \varphi\colon F(X) \to \mathbb{Z}$ неперервний гомоморфізм такий, що $\varphi(G(A)) = \mathbb{Z}$. Позначимо через

$$\mathrm{ord}_A\varphi = \min\{|\ k\ |: k \in \varphi(A)\backslash\{0\}\}.$$

Лема 1. *Якщо* $\mathrm{ord}_A\varphi > 1$*, то існує топологічний ізоморфізм* $j\colon F(X) \to F(X)$ *такий, що* $j(G(X_s)) = G(Y_s)$ *для всіх* $s \in S$ *і* $\mathrm{ord}_A(\varphi \circ j) < \mathrm{ord}_A\varphi$.

Доведення. Нехай $\mathrm{ord}_A\varphi = q > 1$. Тоді існує елемент $a_0 \in A$ такий, що $\varphi(a_0) = s$, $\|s\| = q$. Оскільки $\varphi(A)$ породжує $\mathbb{Z}$, то існує $p \in \varphi(A)$, що не ділиться на q. Поділимо p на q з остачею

$$p = ms + r, \qquad 0 < r < q = \|s\|.$$

Позначимо для кожного $k \in Z$ через $X_k = X \cap \varphi^{-1}(k)$. Тоді X_k — відкрито-замкнений підпростір в X. Означимо відображення $j_0\colon X \to F(X)$ так:

$$j_0(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \notin X_p; \\ a_0^{-m}x, & \text{якщо } x \in X_p. \end{cases}$$

Нехай $j\colon F(X) \to F(X)$ — гомоморфізм, який продовжує відображення $j_0(x)$. Відображення $j_0(x)$ неперервне з огляду на неперервність операції множення в топологічній групі $F(X)$ і відкрито-замкнености множин $X_k, k \in \mathbb{Z}$. Означимо відображення $j_0^*\colon X \to F(X)$ за формулою

$$j_0^*(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \notin X_p; \\ a_0^{m}x, & \text{якщо } x \in X_p. \end{cases}$$

Нехай $j^*\colon F(X) \to F(X)$ — гомоморфізм, який продовжує відображення $j_0^*(x)$. Легко бачити, що j^* — неперервний гомоморфізм, обернений до j. Отже, j — топологічний ізоморфізм. Нехай $a_1 \in X_p \cap A$. Тоді

$$\varphi \circ j(a_1) = \varphi(a_0^{-m}x_1) = -m\varphi(a_0) + \varphi(x_1) = -ms + p = r < q.$$

Очевидно, що $j(G(X_s)) = G(Y_s)$ для всіх $s \in S$. □

Понижуючи за допомогою леми 1 порядок ізоморфізму φ, ми за скінченну кількість разів отримаємо таку лему.

Лема 2. *Існує топологічний ізоморфізм* $j\colon F(X) \to F(X)$ *такий, що* $j(G(X_s)) = G(Y_s)$ *для всіх* $s \in S$ *і* $ord_A(\varphi \circ j) = 1$.

Отже, існує топологічний ізоморфізм $j\colon F(X) \to F(X)$ такий, що для деякого елемента $a_0 \in A$ виконується одна з умов $\varphi \circ j(a_0) = 1$ або $\varphi \circ j(a_0) = -1$ і $j(G(A)) = G(A)$. У другому випадку розглянемо композицію ізоморфізму j з ізоморфізмом α заданим для елементів простору X за правилом $\alpha(x) = x$, якщо $\varphi \circ j(x) \neq 1$ і $\alpha(x) = x^{-1}$, якщо $\varphi \circ j(x) = -1$. Очевидно α — топологічний ізоморфізм, причому $(\varphi \circ \alpha \circ j)(a_0) = 1$ і $(\varphi \circ \alpha \circ j)(G(X_s)) = G(X_s$ для всіх $s \in S$.

Ми довели таке твердження.

Лема 3. *Для кожного неперервного гомоморфізму* $\varphi\colon F(X) \to \mathbb{Z}$ *такого, що* $\varphi(G(A)) = \mathbb{Z}$*, існують топологічний ізоморфізм* $j\colon F(X) \to F(X)$ *і елемент* $a_0 \in A$ *такі, що* $j(G(X_s)) = G(X_s)$ *для всіх* $s \in S$ *і* $(\varphi \circ j)(a_0) = 1$.

Лема 4. *Для кожного неперервного гомоморфізму* $\varphi\colon F(X) \to \mathbb{Z}$ *такого, що* $\varphi(G(A)) = \mathbb{Z}$ *існує топологічний ізоморфізм* $u\colon F(X) \to F(X)$ *такий, що* $u(G(X_s)) = G(Y_s)$ *для всіх* $s \in S$ *і* $(\varphi \circ u)(X) = 1$.

Доведення. Виберемо ізоморфізм $j\colon F(X) \to F(X)$ і елемент $a_0 \in A$ такі як у лемі 3 Позначимо $F_k = X \cap (\varphi \circ j)^{-1}(k)$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$. Тоді множини $F_k, k \in \mathbb{Z}$ є відкрито-замкнені в X, причому $a_0 \in F_1$. Визначимо відображення $l_0\colon X \to F(X)$ за правилом $l_0(x) = a_0^{-k+1}x$, якщо $x \in F_k, k \in \mathbb{Z}$ і нехай $l\colon F(X) \to F(X)$ — гомоморфізм, що продовжує відображення l_0. Очевидно, відображення l_0 неперервне, а отже, неперервним є гомоморфізм l. Відображення $l_0^*\colon X \to F(X)$ означене як $l_0^*(x) = a_0^{k-1}x$, якщо $x \in F_k, k \in \mathbb{Z}$ є неперервним, а отже, неперервним є гомоморфізм $l^*\colon F(X) \to F(X)$, що його продовжує. Легко бачити, що l^* — гомоморфізм, обернений до l, тому l є топологічним автоморфізмом групи $F(X)$.

Приймемо $u = j \circ l$, тоді $u\colon F(X) \to F(X)$ — топологічний ізоморфізм. Доведемо, що u — потрібний автоморфізм групи $F(X)$. Якщо $x \in X$, то $x \in F_k$ при деякому $k \in \mathbb{Z}$. Тоді

$$\begin{aligned}\varphi(u(x)) &= \varphi(j(l(x))) = \\ &= \varphi(j(a_0^{-k+1}x)) = \\ &= \varphi(j(a_0) \times (-k+1) + \varphi(j(x)) = \\ &= -k + 1 + k = 1.\end{aligned}$$

Оскільки $j(G(X_s)) = G(Y_s)$ для всіх $s \in S$ і $l(G(X_s)) = G(Y_s)$ для всіх $s \in S$, то $u(G(X_s)) = G(Y_s)$ для всіх $s \in S$. $\square$

Доведення теореми 1. Нехай $i\colon F(X) \to F(Y)$ — топологічний ізоморфізм такий, що $i(G(X_s)) = G(Y_s)$ для всіх $s \in S$. Нехай також $e_Y^*\colon F(X) \to \mathbb{Z}$ — гомоморфізм, що продовжує функцію e_Y, яка тотожно рівна 1 на просторі Y. Очевидно, що $e_Y^* \circ i(G(X_s)) = e_Y^*(Y_s) = \mathbb{Z}$. Застосовуючи лему 4 до гомоморфізму $\varphi = e_Y^* \circ i$, отримаємо спеціальний ізоморфізм $i^* = i \circ u\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $i^*(G(X_s)) = G(Y_s)$. $\square$

Подібно можемо довести твердження аналогічне до теореми 1 для A-еквівалентних наборів. Модифікація аналогічного твердження для L-еквівалентних наборів проводиться аналогічно до відповідної теореми з [2].

Твердження 2. *Нехай* $(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\})$, *простори* $A = \bigcap\limits_{s \in S} X_s$ *і* $B = \bigcap\limits_{s \in S} Y_s$ *непорожні,* $a \in A$, $b \in B$ — *довільні точки. Тоді існує спеціальний топологічний ізоморфізм* $h\colon A(X) \to A(Y)$ *такий, що* $h(G(X_s)) = G(Y_s)$ *для всіх* $s \in S$ *і* $h(a) = b$.

Доведення. Нехай $(X, A) \overset{A}{\sim} (Y, B)$. За теоремою 1 існує спеціальний топологічний ізоморфізм $j\colon A(X) \to A(Y)$ такий, що $j(G(A)) = G(B)$. Нехай

$$W = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n = j^{-1}(b),$$

де $a_i \in A$. Оскільки j спеціальний ізоморфізм, то $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Розглянемо відображення $f, g\colon X \to A(X)$ означені за формулами

$$f(x) = x + W - a \qquad \text{і} \qquad g(x) = x - W + a.$$

Нехай $f^*, g^*\colon A(X) \to A(X)$ — їхні гомоморфні продовження. Тоді

$$\begin{aligned} f^* \circ g^*(x) &= f^*(x - W + a) = \\ &= (x + W - a) - [\lambda_1(x_1 + W - a) + \lambda_2(x_2 + W - a) + \ldots + \\ &\quad + \lambda_n(x_n + W - a)] + (a + W - a) = \\ &= x + W - a - [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n] - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \times (W - a) + W = \\ &= x + W - a - W - 1 \times (W - a) + W = x. \end{aligned}$$

Отже, $f^* \circ g^* = g^* \circ f^* = 1_{A(X)}$. Отож, f^* спеціальний автоморфізм такий, що $f^*(a) = W$ і $f^*(G(X_s)) = G(X_s)$. Тоді $h = j \circ f^*$ спеціальний топологічний ізоморфізм такий, що

$$h(G(X_s)) = j \circ f^*(G(X_s)) = j(G(X_s)) = G(Y_s)$$

і $h(a) = j \circ f^*(a) = j(W) = b$. □

Аналогічне твердження правильне також для відношення L-еквівалентності топологічних просторів.

Нехай $\{X_s\colon s \in S\}$ — сім'я замкнених диз'юнктних підпросторів в X. Позначимо через $p\colon X \to X/\{X_s\colon s \in S\}$ — проекцію, яка стягує кожен підпростір X_s у точку. Якщо на просторі $X/\{X_s\colon s \in S\}$ означити найсильнішу цілком регулярну топологію, що робить відображення p неперервним, тоді відображення p буде R-факторним.

Наслідок 1. *Нехай*

$$(X, \{X_s\colon s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s\colon s \in S\})$$

і простір $A = \bigcap_{s \in S} X_s$ *замкнений та непорожній. Тоді*

$$(X/A, \{X_s/A\colon s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y/B, \{Y_s/B\colon s \in S\}),$$

де $B = \bigcap_{s \in S} Y_s$ *(тут на* X_s/A *і* Y_s/B *визначено топології індуковані відповідно з* X/A *та* Y/B*).*

Для топологічного простору X, та відміченої точки $a \in X$ позначимо через $AG(X, a)$ вільну абелеву топологічну групу простору X з одиницею a.

Твердження 3. *Нехай*

$$(X, \{X_s : s \in S\}) \overset{A}{\sim} (Y, \{Y_s : s \in S\}),$$

простори $A = \bigcap\limits_{s\in S} X_s$, $B = \bigcap\limits_{s\in S} Y_s$ *непорожнім,* $a \in A$, $b \in B$ *— довільні точки. Тоді існує топологічний ізоморфізм* $h\colon AG(X,a) \to AG(Y,b)$ *такий, що* $h(G(X_s)) = G(Y_s)$ *для всіх* $s \in S$.

Доведення. За твердженням 2 існує спеціальний топологічний $i\colon A(X) \to A(Y)$ такий, що $i(a) = b$. та $i(G(X_s) = G(Y_s)$ Тотожне відображення $X \to X$ продовжується до неперервного гомоморфізму $f_x\colon A(X) \to AG(X,a)$ у вільну абелеву граєвську топологічну групу простору X з одиницею в точці a. Аналогічно тотожне відображення $Y \to Y$ продовжується до неперервного гомоморфізму $f_y\colon A(Y) \to AG(Y,b)$ у вільну абелеву граєвську топологічну групу простору Y з одиницею в точці b. Неперервне відображення $m_x\colon X \to AG(Y,b)$, означене як $m(x) = f_y \circ i|_X$, має ту властивість, що $m_x(a) = b$, а отже, продовжується до неперервного гомоморфізму $j_x\colon AG(X,a) \to AG(Y,b)$. Аналогічно неперервне відображення $m_y\colon Y \to AG(X,a)$, означене як $m(y) = f_x \circ i^{-1}|_Y$, має ту властивість, що $m_y(b) = a$, отже, продовжується до неперервного гомоморфізму $j_y\colon AG(Y,b) \to AG(X,a)$. Отримаємо, що

$$j_y \circ j_x(x) = f_x \circ i \circ i^{-1}(x) = x$$

для всіх $x \in X$. Аналогічно

$$j_x \circ j_y(y) = f_y \circ i^{-1} \circ i(y) = y$$

для всіх $y \in Y$. Отже, j_x — топологічний ізоморфізм вільних абелевих граєвських груп $AG(X,a)$ і $AG(Y,b)$. □

Узагальнюючи теорему 3.9 з [2], доведення залишається аналогічним. Сформулюємо таке твердження.

Твердження 4. *Нехай* X, Y *— тихоновські простори,* $\{X_s\colon s \in S\}$ *— сім'я диз'юнктних підпросторів в* X, $\{Y_s\colon s \in S\}$ *— сім'я диз'юнктних підпросторів в* Y, *причому* R*-факторні простори* $X/\{X_s\colon s \in S\}$ *та* $Y/\{Y_s\colon s \in S\}$ *є гаусдорфовими. Якщо існує топологічний ізоморфізм* $i\colon F(X) \to F(Y)$ *такий, що* $i(G(X_s)) = G(Y_s)$ *для всіх* $s \in S$, *а його звуження на підгрупу* $G(A)$, *де* $A = \bigcup\limits_{s\in S} X_s$, *є спеціальним ізоморфізмом, то* R*-факторні простори* $X/\{X_s\colon s \in S\}$ *та* $Y/\{Y_s\colon s \in S\}$ *є* M*-еквівалентними.*

Наслідок 2. *Нехай* X, Y *— тихоновські простори,* $\{X_s\colon s \in S\}$ *— сім'я диз'юнктних підпросторів в* X, $\{Y_s\colon s \in S\}$ *— сім'я диз'юнктних підпросторів в* Y, *причому* R*-факторні простори* $X/\{X_s\colon s \in S\}$ *та* $Y/\{Y_s\colon s \in S\}$ *є гаусдорфовими. Якщо* $(X, \{X_s\colon s \in S\}) \overset{M}{\sim} (Y, \{Y_s\colon s \in S\})$, *а множина* $A = \bigcup\limits_{s\in S} X_s$ *зв'язна в* X, *то* R*-факторні простори* $X/\{X_s\colon s \in S\}$ *та* $Y/\{Y_s\colon s \in S\}$ *є* M*-еквівалентними.*

Доведення. З теореми 1 випливає, що існує топологічний ізоморфізм $i\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $i(G(A)) = G(B)$. З теореми 3.9. роботи Окунєва [9] випливає, що існує топологічний ізоморфізм $j\colon F(X/A) \to F(X/B)$ такий, що $j \circ q_A^* = q_B^* \circ i$, де $q_A^*\colon F(X) \to F(X/A)$, $q_B^*\colon F(Y) \to F(Y/B)$ — гомоморфізми, що продовжують відображення q_A і q_B, відповідно, тобто $q_A \overset{M}{\sim} q_B$. □

3. Еквівалентність наборів і вільні топологічні алгебри

Розвиваємо ідеї, які пов'язані з ізоморфною класифікацією вільних топологічних напівгруп, груп та кілець з роботи [1], а також ідеї пов'язані з ізоморфною класифікацією вільних топологічних напівгруп [7]. Нас цікавитимуть ізоморфізми вільних топологічних алгебр, що залишають інваріантними сім'ї підалгебр. Також досліджуємо умови тополого-алгебричної еквівалентності гомоморфізмів, які продовжують неперервні відображення тихоновських просторів. Для топологічного простору позначимо через $S(X)$ вільну топологічну напівгрупу над простором X, через $S_A(X)$ віллльну абелеву топологічну напівгрупу над простором X, через $R(X)$ — вільне топологічне кільце над простором X, через $R_A(X)$ — вільне абелеве топологічне кільце над простором X. Для вільної топологічної алгебри $F(X)$ над простором X та підпростору $Y \subseteq X$ позначимо через $\langle Y \rangle$ підалгебру в $F(X)$, породжену множиною твірних Y.

Твердження 5. *Нехай $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору X, $\{Y_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів топологічного простору Y. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *існує гомеоморфізм $h: X \to Y$ такий, що $h(X_s) = Y_s$ для всіх $s \in S$;*
(2) *існує топологічний ізоморфізм вільних топологічних напівгруп $i: S(X) \to S(Y)$ такий, що $i(\langle X_s \rangle) \subseteq \langle Y_s \rangle$ для всіх $s \in S$;*
(3) *існує топологічний ізоморфізм вільних абелевих топологічних напівгруп $j: S_A(X) \to S_A(Y)$ такий, що $j(\langle X_s \rangle) \subseteq \langle Y_s \rangle$ для всіх $s \in S$.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2) Нехай $i: S(X) \to S(Y)$ — гомоморфне продовження відображення $h: X \to Y$ до гомоморфізму вільних топологічних напівгруп. За побудовою $i(X_s) = Y_s$, тобто $i(\langle X_s \rangle) \subseteq \langle Y_s \rangle$ для всіх $s \in S$.

Імплікація (2) $\Rightarrow$ (3) доводиться аналогічно до твердження 2.10 з [4].

(3) $\Rightarrow$ (1) Нехай $j: S_A(X) \to S_A(Y)$ такий, що $j(\langle X_s \rangle) \subseteq \langle Y_s \rangle$ для всіх $s \in S$. Нагадаємо, що атомом називається елемент топологічної напівгрупи, який не можна подати у вигляді добутку двох елемнтів, кожен з яких відмінний від нейтрального. Очевидно, що при ізоморфізмі топологічних напівгруп образом множини атомів першої напівгрупи є множина атомів другої напівгрупи. Залишається зауважити, що множиною атомів напівгрупи $S_A(X)$ є X. Тому звуження ізоморфізму $j: S_A(X) \to S_A(Y)$ на підпростір X є гомеоморфізмом $h: X \to Y$ таким, що $h(X_s) = Y_s$. □

Нижче ми розглядаємо (абелеві) топологічні кільця; означення можна знайти в монографії [6].

Твердження 6. *Нехай $\{X_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів тихоновського простору X, $\{Y_s : s \in S\}$ — сім'я підпросторів тихоновського простору Y. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *існує топологічний ізоморфізм вільних абелевих топологічних груп $h: A(X) \to A(Y)$ такий, що $h(X_s) \subseteq \langle Y_s \rangle$ для всіх $s \in S$;*
(2) *існує топологічний ізоморфізм вільних топологічних кілець $i: R(X) \to R(Y)$ такий, що $i(X_s) \subseteq \langle Y_s \rangle$ для всіх $s \in S$;*

(3) *існує топологічний ізоморфізм вільних абелевих топологічних кілець* $j\colon R_A(X) \to R_A(Y)$ *такий, що* $j(X_s) \subseteq \langle Y_s \rangle$ *для всіх* $s \in S$.

Доведення. Імплікації (1) $\Rightarrow$ (2) та (2) $\Rightarrow$ (3) доводяться аналогічно до твердження 2.10 [4].

(3) $\Rightarrow$ (1) Нехай $j\colon R_A(X) \to R_A(Y)$ — ізоморфізм вільних абелевих топологічних кілець такий, що $j(X_s) \subseteq \langle Y_s \rangle$ для всіх $s \in S$. Оскільки кожна абелева топологічна група після введення на ній нульового множення перетворюється на абелеве кільце, то тотожні відображення $id_X \colon X \to X$ та $id_Y \colon Y \to Y$ продовжуються до неперервних гомоморфізмів $p_X \colon R_A(X) \to A(X)$ та $p_Y \colon R_A(Y) \to A(Y)$. Як було встановлено у [1] існує топологічний ізоморфізм $h\colon A(X) \to A(Y)$ такий, що $p_Y \circ j = i \circ p_X$. За побудовою $h(X_s) \subseteq G(Y_s)$, $h^{-1}(Y_s) \subseteq G(X_s)$. □

Твердження 7. *Нехай* $f_1\colon X_1 \to Y_1$, $f_2\colon X_2 \to Y_2$ *— неперервні відображення топологічних просторів. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *існують гомеоморфізми* $h_1\colon X_1 \to X_2$ *та* $h_2\colon Y_1 \to Y_2$ *такі, що* $h_2 \circ f_1 = f_2 \circ h_1$;

(2) *існують топологічні ізоморфізми вільних топологічних напівгруп* $i_1\colon S(X_1) \to S(X_2)$ *та* $i_2\colon S(Y_1) \to S(Y_2)$ *такі, що* $i_2 \circ f_1^* = f_2^* \circ i_1$, *де* $f_1^*\colon S(X_1) \to S(Y_1)$, $f_2^*\colon S(X_2) \to S(Y_2)$ *гомоморфізми, що продовжують відображення* f_1 *та* f_2;

(3) *існують топологічні ізоморфізми вільних абелевих топологічних напівгруп* $j_1\colon S_A(X_1) \to S_A(X_2)$ *та* $j_2\colon S_A(Y_1) \to S_A(Y_2)$ *такі, що* $j_2 \circ f_1^* = f_2^* \circ j_1$, *де* $f_1^*\colon S_A(X_1) \to S_A(Y_1)$, $f_2^*\colon S_A(X_2) \to S_A(Y_2)$ *гомоморфізми, що продовжують відображення* f_1 *та* f_2.

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2) Нехай $h_1\colon X_1 \to X_2$ та $h_2\colon Y_1 \to Y_2$ — гомеоморфізми такі, що $h_2 \circ f_1 = f_2 \circ h_1$. Продовження $i_1\colon S(X_1) \to S(X_2)$ та $i_2\colon S(Y_1) \to S(Y_2)$ гомеоморфізмів h_1 та h_2 до неперервних гомоморфізмів є топологічними ізоморфізмами. Оскільки

$$i_2 \circ f_1^*|_{X_1} = h_2 \circ f_1 = f_2 \circ h_1 = f_2^* \circ i_1|_{X_1},$$

то $i_2 \circ f_1^* = f_2^* \circ i_1$.

Імлікація (2) $\Rightarrow$ (3) доводиться аналогічно до твердження 2.2 з [11].

(3) $\Rightarrow$ (1) Нехай $j_1\colon S_A(X_1) \to S_A(X_2)$ та $j_2\colon S_A(Y_1) \to S_A(Y_2)$ — топологічні ізоморфізми такі, що $j_2 \circ f_1^* = f_2^* \circ j_1$, де $f_1^*\colon S_A(X_1) \to S_A(Y_1)$, $f_2^*\colon S_A(X_2) \to S_A(Y_2)$ гомоморфізми, що продовжують відображення f_1 та f_2. Як уже зазначалось, у доведенні твердження 5 $j_1(X_1) = X_2$, $j_2(Y_1) = Y_2$. Тому відображення $h_1 = j_1|_{X_1}$, $h_2 = j_2|_{Y_1}$ є гомеоморфізмами такими, що $h_2 \circ f_1 = f_2 \circ h_1$. □

Твердження 8. *Нехай* $f_1\colon X_1 \to Y_1$, $f_2\colon X_2 \to Y_2$ *— неперервні відображення тихоновських просторів. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *існують топологічні ізоморфізми вільних абелевих топологічних груп* $h_1\colon A(X_1) \to A(X_2)$ *та* $h_2\colon A(Y_1) \to A(Y_2)$ *такі, що* $i_2 \circ Af_1^* = Af_2^* \circ i_1$, *де* $Af_1^*\colon A(X_1) \to A(Y_1)$, $Af_2^*\colon A(X_2) \to A(Y_2)$ *гомоморфізми, що продовжують відображення* f_1 *та* f_2;

(2) *існують топологічні ізоморфізми вільних топологічних кілець* $i_1\colon R(X_1)\to R(X_2)$ *та* $i_2\colon R(Y_1)\to R(Y_2)$ *такі, що* $i_2\circ Rf_1^*=Rf_2^*\circ i_1$*, де* $Rf_1^*\colon R(X_1)\to R(Y_1)$, $Rf_2^*\colon R(X_2)\to R(Y_2)$ *гомоморфізми, що продовжують відображення* f_1 *та* f_2*;*

(3) *існують топологічні ізоморфізми вільних абелевих топологічних кілець* $j_1\colon R_A(X_1)\to R_A(X_2)$ *та* $j_2\colon R_A(Y_1)\to R_A(Y_2)$ *такі, що* $j_2\circ f_1^*=f_2^*\circ j_1$*, де* $f_1^*\colon R_A(X_1)\to R_A(Y_1)$, $f_2^*\colon R_A(X_2)\to R_A(Y_2)$ *гомоморфізми, що продовжують відображення* f_1 *та* f_2*.*

Доведення. Імплікації (1) $\Rightarrow$ (2) та (2) $\Rightarrow$ (3) доводяться аналогічно до твердження 2.2 [11].

(3) $\Rightarrow$ (1) Нехай $p_1\colon R_A(X_1)\to A(X_1)$, $p_2\colon R_A(X_2)\to A(X_2)$, $q_1\colon R_A(Y_1)\to A(Y_1)$, $q_2\colon R_A(Y_2)\to A(Y_2)$ — природні гомоморфізми, описані у твердженні 6. Для ізоморфізму $j_1\colon R_A(X_1)\to R_A(X_2)$ існує топологічний ізоморфізм вільних абелевих топологічних груп $h_1\colon A(X_1)\to A(X_2)$ такий, що $h_1\circ p_1=p_2\circ j_1$. Аналогічно для ізоморфізму $j_2\colon R_A(Y_1)\to R_A(Y_2)$ існує топологічний ізоморфізм вільних абелевих топологічних груп $h_2\colon A(Y_1)\to A(Y_2)$ такий, що $h_2\circ q_1=q_2\circ j_2$. За побудовою $Af_1\circ p_1=q_1\circ f_1^*$ і $Af_2\circ p_2=q_2\circ f_2^*$. Нехай $x\in X_1$, тоді $p_1(x)=x$. Отож,

$$\begin{aligned} h_1\circ Af_2(x) &= j_1\circ q_2\circ Af_2(x) = \\ &= j_1\circ f_2^*\circ q_2(x) = \\ &= f_1^*\circ j_2\circ q_2(x) = \\ &= f_1^*\circ q_1\circ h_2(x) = \\ &= Af_1\circ h_2(x). \end{aligned}$$

□

Твердження 9. *Нехай* $f_1\colon X_1\to Y_1$, $f_2\colon X_2\to Y_2$ *— A-еквівалентні відображення. Тоді для довільних* $x_1\in X_1$ *та* $x_2\in X_2$ *існують топологічні ізоморфізми вільних абелевих топологічних в сенсі Граєва* $s_1\colon AG(X_1,x_1)\to AG(X_2,x_2)$ *та* $s_2\colon AG(Y_1,f(x_1))\to AG(Y_2,f(x_2))$ *такі, що* $s_2\circ f_1^{**}=f_2^{**}\circ s_1$*, де* $f_1^{**}\colon AG(X_1,x_1)\to AG(Y_1,f(x_1))$ *і* $f_2^{**}\colon AG(X_2,x_2)\to AG(Y_2,f(x_2)$ *гомоморфізми, що продовжують відображення* f_1 *та* f_2*.*

Доведення. З того, що відображення $f_1\colon X_1\to Y_1$, $f_2\colon X_2\to Y_2$ є A-еквівалентними, за теоремою з [3] випливає, що існують топологічні ізоморфізми $h_1\colon A(X_1)\to A(X_2)$ та $h_2\colon A(Y_1)\to A(Y_2)$ такі, що ${}_2\circ f_1^*=f_2^*\circ i_1$, де $f_1^*\colon A(X_1)\to A(Y_1)$, $f_2^*\colon AG(X_2)\to AG(Y_2)$ гомоморфізми, що продовжують відображення f_1 та f_2. Нехай $p_i\colon A(X_i)\to AG(X_i,x_i)$, $q_i\colon A(Y_i)\to AG(Y_i,f(x_i))$ — гомоморфізми, що продовжують тотожні вкладення $X_i\hookrightarrow X_i$ та $Y_i\hookrightarrow Y_i$. Як було встановлено у [10], якщо для ізоморфізму $h_1\colon A(X_1)\to A(X_2)$ виконується умова $h_1(x_1)=x_2$, то існує топологічний ізоморфізм $s_1\colon AG(X_1,x_1)\to AG(X_2,x_2)$ такий, що $s_1\circ p_1=g_1\circ h_1$. Аналогічно доводиться, що існує топологічний ізоморфізм $s_2\colon AG(Y_1,f(x_1))\to AG(Y_2,f(x_2))$ такий, що $s_2\circ p_2=g_2\circ h_2$. За побудовою $f_1^{**}\circ p_1=q_1\circ f_1^*$ і $f_2^{**}\circ p_2=q_2\circ f_2^*$. Нехай

$x \in X_1$, тоді $p_1(x) = x$. Отож,

$$\begin{aligned} s_1 \circ f_2^{**}(x) &= h_1 \circ q_2 \circ f_2^{**}(x) = \\ &= h_1 \circ f_2^{*} \circ q_2(x) = \\ &= f_1^{*} \circ h_2 \circ q_2(x) = \\ &= f_1^{*} \circ q_1 \circ s_2(x) = \\ &= f_1^{**} \circ s_2(x). \end{aligned}$$

□

Аналогічно доводиться таке твердження

Твердження 10. *Нехай $f_1 \colon X_1 \to Y_1$, $f_2 \colon X_2 \to Y_2$ — L-еквівалентні відображення. Тоді для довільних $x_1 \in X_1$ та $x_2 \in X_2$ існують топологічні ізоморфізми вільних локально опуклих просторів в сенсі Граєва $i_1 \colon LG(X_1, x_1) \to LG(X_2, x_2)$ та $i_2 \colon LG(Y_1, f(x_1)) \to LG(Y_2, f(x_2))$ такі, що $i_2 \circ f_1^* = f_2^* \circ i_1$, де $f_1^* \colon LG(X_1, x_1) \to LG(Y_1, f(x_1))$ і $f_2^* \colon LG(X_2, x_2) \to LG(Y_2, f(x_2)$ гомоморфізми, що продовжують відображення f_1 та f_2.*

Подяка

Автор висловлює подяку проф. М. Зарічному та рецензентові за корисні поради, коментарі та зауваження.

Список використаної літератури

1. В. И. Арнаутов, *Об изоморфизмах свободных топологических групп, колец и модулей порожденных топологическими пространствами*, Изв. АН Респ. Молдова (1993), no. 2(12), 63–71.
2. О. Г. Окунев, *M-эквивалентность произведений*, Тр. ММО **56** (1995), 192–205; **English version in:** O. G. Okunev, *M-equivalence of products*, Trans. Moscow Math. Soc. (1995), 149–158.
3. Н. М. Пирч, *M-еквівалентність пар і відображень*, Мат. методи фіз.-мех. поля. **49** (2006), no. 2, 21–26.
4. Н. М. Пирч, *Еквівалентність за Марковим наборів тихоновських просторів 1: загальні властивості*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **84** (2017), 38–46.
5. A. V. Arhangel'skii and M. G. Tkachenko, *Topological groups and related structures*, Atlantis Press, Amsterdam-Paris, 2008, 781p.
6. V. I. Arnautov, S. T. Glavatsky, and A. V. Mikhalev, *Introduction to the theory of topological rings and modules*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, 197. M. Dekker, New York, 1996. 502 p.
7. T. Banakh, I. Guran, and O. Gutik *Free topological inverse semigroups*, Mat. Stud. **15** (2001), no. 1, 23–43.
8. M. M. Choban, *Algebraic equivalence of topological spaces*, Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. (2001), no. 1 (35), 12–36.
9. O. G. Okunev, *A method for consructing examples of M-equivalent spaces*, Topology Appl. **36** (1990), no. 2, 157–171. DOI: 10.1016/0166-8641(90)90006-N; Correction: Topology Appl. **49** (1993), no. 2, 191–192. DOI: 10.1016/0166-8641(93)90044-E
10. N. M. Pyrch, *Orthogonal retractions and the relation of M-equivalence*, Mat. Stud. **20** (2003), no. 2, 151–161.

11. N. M. Pyrch, *O*n M-equivalence of mappings, Mat. Stud. **24** (2005), no. 1, 21–30.

Стаття: надійшла до редколегії 23.02.2019
доопрацьована 30.04.2019
прийнята до друку 03.02.2020

ON MARKOV EQUIVALENCE OF THE BUNDLES OF TYCHONOFF SPACES 2: SPECIAL ISOMORPHISMS

Nazar Pyrch

Ukrainian Academy of Printing,
Pidgolosko Str., 19, 79020 Lviv, Ukraine
e-mail: pnazar@ukr.net

Let X be a Tychonov space. By $F(X)$ we denote the free topological group of X in the sense of Markov. For any subspace Y of X we denote by $G(Y,X)$ (or simply $G(Y)$) the group hull of Y in $F(X)$.
Given families $\{X_i : i \in I\}$, $\{Y_i : i \in I\}$ of subspaces of topological spaces X and Y respectively, we say that $(X, \{X_i : i \in I\})$ is *M-equivalent* to $(Y, \{Y_i : i \in I\})$, if there exists a topological isomorphism $h\colon F(X) \to F(Y)$ such that $h(A_i) \subseteq G(B_i)$ and $h^{-1}(B_i) \subseteq G(A_i)$ for all $i \in I$.
An isomorphism $i\colon F(X) \to F(Y)$ is called special if the composition $e^*_Y \circ i$ is a constant map, where $e^*_Y\colon F(Y) \to \mathbb{Z}$ is the homomorphism extending the map $e_Y\colon Y \to \mathbb{Z}$ which is identically 1 on Y. Okunev proved that, for any two M-equivalent space, there exists a special homomorphism between their free topological groups. In his previous papers, the author extended this result over the case of M-equivalent maps and M-equivalent pairs of topological spaces.
Generalizing these results we consider the conditions for existence of special isomorphisms between free topological groups preserving subgroups. Also we consider relations between F-equivalence of bundles of subspaces of topological spaces for some functors of topological algebra (e.g, the functors of free (Abelian) topological group, free (Abelian) topological ring, and free locally convex space.

Key words: free topological group, free Abelian topological group, special isomorphism of the free groups, bundle of topological spaces, free topological ring, free Abelian topological ring.