ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 51–58
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 51–58
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.051-058

УДК 512.536.7+512.543

ПРО ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНІ ГРУПИ З НУЛЕМ

Катерина МАКСИМИК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: kate.maksymyk15@gmail.com

Досліджуємо алгебричні умови на групу G, при виконанні яких локально компактна трансляційно неперервна топологія на дискретній групі G з приєднаним нулем є або компактною, або дискретною.
Введено електорально гнучкі та електорально стійкі групи та вивчаються їхні властивості. Зокрема, доведено, що кожна група, яка містить нескінченну циклічну підгрупу нескінченного індексу та кожна незліченна комутативна група є електорально гнучкими, а також, що кожна зліченна локально скінченна група є електорально стійкою.
Основним результатом праці є таке твердження: якщо G — дискретна електорально гнучка нескінченна група, то кожна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0 є або дискретною, або компактною. На довільній нескінченній віртуально циклічній групі (а отже, на електорально стійкій групі) з приєднаним нулем G^0 побудовано недискретну некомпактну локально компактну трансляційно неперервну топологію, яка індукує на G дискретну топологію.

Ключові слова: група, нуль, локально компактний, дискретний, компактний, напівтопологічна напівгрупа, топологічна напівгрупа, електорально гнучкий, електорально стійкий, кінець.

Ми користуватимемося термінологією з [3, 10, 24]. Усі простори вважаються гаусдорфовими, якщо не зазначено інше.

Надалі для групи G через G^0 позначається група G з приєднаним нулем [10]. У комутативній групі G добуток двох елементів a і b позначатимемо через $a + b$, а обернений елемент до $a \in G$ позначатимемо через $-a$.

Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного елемента $x \in S$ існує єдиний елемент $y \in S$ такий, що $xyx = x$ і $yxy = y$. У цьому випадку кажуть, що y є *інверсним* елементом до x в S, а відображення з S у S, що ставить кожному елементу

2010 Mathematics Subject Classification: 20E34, 20F69, 22M15, 54E45

його інверсний, називається *інверсією* [10]. Очевидно, що група з приєднаним нулем є інверсною напівгрупою.

Напівгрупа S із заданою на ній топологією τ називається *(напів)топологічною*, якщо напівгрупова операція в (S,τ) є (нарізно) неперервною, і в цьому випадку кажуть, що τ є *напівгруповою* (*трансляційно неперервною*) топологією на S [9]. Інверсна топологічна напівгрупа (S,τ) з неперервною інверсією називається *топологічною інверсною напівгрупою*, а топологія τ в цьому випадку називається *інверсною напівгруповою* топологією на S.

Відомо, якщо S — напівтопологічна напівгрупа з нулем 0 така, що $S\setminus\{0\}$ — компактний простір, чи G^0 — група з приєднаним нулем, що є топологічною інверсною напівгрупою, то нуль 0 є ізольованою точкою. В загальному випадку навіть для локально компактних груп з приєднаним нулем, які є топологічними напівгрупами, це не так [9, 18]. Однак нуль в компактній топологічній 0-простій напівгрупі є ізольованою точкою [21]. Проте ці результати на можна поширити на локально компактні цілком 0-прості топологічні напівгрупи [20] і на компактні цілком 0-прості напівтопологічні зліченні напівгрупи [15]. Карл Гофманн у праці [17] описав структуру локально компактної топологічної групи з приєднаним нулем у випадку локально компактних топологічних напівгруп. Приєднання нуля до близьких до компактних (напів)топологічних груп та топологія в нулі для деяких класів локально компактних напівгруп вивчалось в працях [2, 5, 6, 13, 14, 16, 19, 20, 23, 25, 26].

Мета нашої праці — дослідити алгебричні умови на групи, при виконанні яких локально компактна трансляційно неперервна топологія на дискретній групі з приєднаним нулем є або дискретною, або компактною.

Дослідження цієї праці мотивовані проблемою 7 з [7]: “*яка хороша структура замикання групи в напівтопологічній напівгрупі?*” та наступним простим твердженням.

Твердження 1. *Якщо T_1-напівтопологічна напівгрупа S містить власну щільну дискретну підгрупу G, то $I = S\setminus G$ — двобічний ідеал в S.*

Доведення. За лемою 3 з [1], G — відкритий підпростір в S.

Зафіксуємо довільний елемент $y\in I$. Якщо $xy = z\notin I$ для деякого $x\in G$, то існує відкритий окіл $U(y)$ точки y у просторі S такий, що $\{x\}\cdot U(y) = \{z\}\subset G$. Окіл $U(y)$ містить нескінченну кількість елементів групи G, а це суперечить тому, що в групі зсуви є бієктивними відображеннями. З отриманого протиріччя випливає, що $xy\in I$ для всіх $x\in G$ й $y\in I$. Доведення того, що $yx\in I$ для всіх $x\in G$ і $y\in I$ є аналогічним. З вище наведених міркувань випливає, що I — двобічний ідеал в S. $\square$

Будемо говорити, що нескінченна група G є:

- *електорально гнучкою*, якщо для довільного розбиття $G = A\sqcup B$ групи G на дві нескінченні множини, існують нескінченна множина $I\subseteq A$ та елемент $x\in G$ такі, що $I\cdot x\subseteq B$;
- *електорально стійкою*, якщо G не є електорально гнучкою.

Електорально гнучкі та електорально стійкі групи введені проф. Т. О. Банахом, і були анонсовані на семінарі “Топологія та її застосування” у Львівському університеті в 2019 році.

Підмножина A групи G називається *трансляційно майже стійкою*, якщо для довільного $x \in G$ симетрична різниця $A\Delta(A \cdot x)$ скінченна. Очевидно, що кожна скінченна підмножина в довільній групі, а також коскінченні підмножини в нескінченних групах трансляційно майже стійкі. Також, в адитивній групі цілих чисел множина натуральних чисел є трансляційно майже стійкою. Виникає природне питання: *у яких нескінченних групах їх трансляційно майже стійкі підмножини вичерпуються скінченними та коскінченними підмножинами?* Це питання також мотивоване наступною дихотомією локально компактних напівтопологічних груп з приєднаним нулем.

Лема 1. *Нехай G — дискретна група така, що кожна нескінченна трансляційно майже стійка підмножина в G є коскінченною. Тоді кожна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0 є або дискретною, або компактною.*

Доведення. Очевидно, що дискретна топологія на G^0 є трансляційно неперервною та локально компактною.

Нехай τ — недискретна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0 і U_0 — нескінченний відкритий компактний окіл нуля 0 в просторі (G^0, τ). Оскільки кожен лівий чи правий зсув у (G^0, τ) на елемент групи G є гомеоморфізмом, то симетрична різниця $U_0\Delta(U_0 \cdot x)$ є скінченною для довільного $x \in G$. З припущення теореми випливає, що $U_0 \setminus \{0\}$ — коскінченна підмножина в G. $\square$

Твердження 2. *Нескінченна група G є електорально гнучкою тоді і лише тоді, коли кожна нескінченна трансляційно майже стійка підмножина в G є коскінченною.*

Доведення. Припустимо, що існує електорально гнучка нескінченна група G, що містить нескінченну трансляційно майже стійку підмножину A в G з нескінченним доповненням $B = G \setminus A$. Тоді існують нескінченна множина $I \subseteq A$ й елемент $x \in G$ такі, що $I \cdot x \subseteq B$, а це суперечить трансляційній майже стійкості підмножини A в G.

Припустимо, що в групі G кожна нескінченна трансляційно майже стійка підмножина є коскінченною, але група G не є електорально гнучкою. Тоді існує розбиття $G = A \sqcup B$ групи G на дві нескінченні множини таке, що для довільних нескінченної множини $I \subseteq A$ та елемента $x \in G$ такі, що множина $I \cdot x \cap B$ скінченна. Отже, $A \cdot x \cap B = A \cdot x \cap (G \setminus A)$ — скінченна множина, а це суперечить нашому припущенню. $\square$

З леми 1 і твердження 2 випливає така теорема.

Теорема 1. *Нехай G — дискретна електорально гнучка нескінченна група. Тоді кожна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0 є або дискретною, або компактною.*

Наслідок 1. *Нехай G — дискретна електорально гнучка група. Тоді кожна гаусдорфова напівгрупова локально компактна топологія на G^0 є дискретною.*

Твердження 3. *Нехай G — електорально гнучка нескінченна зліченна група. Тоді кожна гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0 є або дискретною, або компактною.*

Доведення. Нехай τ — гаусдорфова трансляційно неперервна локально компактна топологія на G^0. Оскільки нуль напівгрупи G^0 є замкненою підмножиною в (G^0, τ), то за наслідком 3.3.10 з [11], G — локально компактний простір. Оскільки група G — зліченна, то за теоремою Бера про категорії (див. теорема 3.9.3 з [11]) простір G містить ізольовану в G, а отже, і в (G^0, τ), точку. З того, що всі зсуви в (G^0, τ) на елементи групи G є гомеоморфізмами випливає, що всі точки в G є ізольованими. Далі скористаємося теоремою 1. □

Наслідок 2. *Нехай G — електорально гнучка зліченна група. Тоді кожна гаусдорфова напівгрупова локально компактна топологія на G^0 є дискретною.*

Наступні два твердження дають достатні умови, при виконанні яких група є електорально гнучкою.

Нагадаємо [3], що *індексом підгрупи H* у групі G називається потужність множини класів суміжності в кожному (правому або лівому) з розкладів групи G за цією підгрупою H.

Твердження 4. *Якщо комутативна група G містить нескінченну циклічну підгрупу $Z \subset G$ нескінченного індексу, то G є електорально гнучкою.*

Доведення. Нехай z — породжуючий елемент групи Z. Розглянемо розбиття $G = A \sqcup B$ групи G на дві нескінченні множини. Розглянемо множини

$$J_+ = \{a \in A \colon a + z \in B\} \qquad \text{і} \qquad J_- = \{a \in A \colon a - z \in B\}.$$

Якщо одна з цих множин нескінченна, то доведення завершено. Тому ми припустимо що множина $J = J_+ \cup J_-$ — скінченна.

Якщо множини $A \setminus (J + Z)$ і $B \setminus (J + Z)$ непорожні, то ми можемо зафіксувати точки $a \in A \setminus (J + Z)$ і $b \in B \setminus (J + Z)$, і зауважимо, що для нескінченної множини $I = a + Z \subseteq A$ і точки $x = ba^{-1}$ матимемо

$$x + I = b - a + a + Z = b + Z \subseteq B.$$

Отже, можемо припускати, що одна з множин $A \setminus (J + Z)$ або $B \setminus (J + Z)$ є порожньою. Якщо множина $A \setminus (J + Z)$ порожня, то $A \subseteq J + Z$ і за принципом Діріхле (див. [8, підрозділ 3.1]) для деякого елемента $a \in A$ множина $I = A \cap (a + Z)$ є нескінченною. Тоді для довільного елемента $b \in G \setminus (J + Z) \subseteq B$ маємо, що $b - a + I \subseteq b + Z \subseteq B$.

Якщо множина $B \setminus (J + Z)$ порожня, то $B \subseteq J + Z$ і для деякого елемента $b \in B$ множина $B \cap (b + Z)$ нескінченна. Тоді для довільного елемента $a \in G \setminus (J + Z) \subseteq A$ матимемо, що множина

$$I = a - b + (B \cap (b + Z)) \subseteq a + A \subseteq A$$

нескінченна та $b - a + I \subseteq B$. □

Нагадаємо [22], що група G називається *локально скінченною*, якщо кожна її скінченна підмножина міститься в скінченній підгрупі в G.

Твердження 5. *Кожна незліченна комутативна група G є електорально гнучкою.*

Доведення. Нехай $G = A \sqcup B$ — розбиття групи G на дві нескінченні множини. Якщо множина A зліченна, то виберемо довільний елемент $x \in G \setminus A - A$ і стверджуємо, що $(x + A) \cap A = \varnothing$, а отже, $x + A \subseteq B$. Якщо множина B є зліченною, то можемо вибрати елемент $x \in G$ такий, що $I = (x + B) \subseteq A$, а отже, $-x + I \subseteq B$.

Далі припускатимемо, що обидві множини A і B є незліченними. Зафіксуємо довільну нескінченну зліченну підгрупу $Z \subset G$. Якщо для деякого елемента $z \in Z$ множина $(A+z) \cap B$ є нескінченною, то доведення завершене. Отже, припускатимемо, що для кожного елемента $z \in Z$ множина $F_z = (A + z) \cap B$ є скінченною. Тоді множина

$$S = (A + Z) \cap (B + Z) = \bigcup_{z,z' \in Z} (A + z) \cap (B + z')$$

є непорожньою і щонайбільше зліченною. Позаяк множини A і B незліченні, то існують елементи $a \in A \setminus S$ і $b \in B \setminus S$. Тоді для нескінченної множини $I = a + Z \subseteq A$ та елемента $x = b - a$ отримуємо, що $x + I = b + Z \subseteq B$, звідки випливає, що група G електорально гнучка. □

Твердження 6. *Кожна зліченна локально скінченна група G є електорально стійкою.*

Доведення. Зобразимо групу G як об'єднання $\bigcup_{n \in \omega} G_n$ строго зростаючої послідовності скінченних груп. Для довільного $n \in \omega$ зафіксуємо підмножину $A_n \subseteq G_{n+1} \setminus G_n$, яка має одноточковий перетин $A_n \cap (x \cdot G_n)$ з кожним суміжним класом $x \cdot G_n$, де $x \in G_{n+1} \setminus G_n$.

Приймемо

$$A = G_0 \cup \bigcup_{n \in \omega} (A_{2n} \cdot G_{2n}) \qquad \text{і} \qquad B = \bigcup_{n \in \omega} (A_{2n+1} \cdot G_{2n+1}).$$

Тоді для довільного елемента $x \in G$ множина $(A \cdot x) \cap B$ є скінченною. □

Нагадаємо [12, 27], що група G називається *віртуально циклічною*, якщо G містить циклічну підгрупу скінченного індексу.

З тверджень 4, 5 і 6 випливають такі два наслідки.

Наслідок 3. *Нетривіальна комутативна група без кручень G електорально стійка тоді і лише тоді, коли G ізоморфна адитивній групі цілих чисел $\mathbb{Z}$.*

Наслідок 4. *Комутативна група G є електорально стійкою тоді і лише тоді, коли G є або зліченною та локально скінченною, або є віртуально циклічною.*

Нагадаємо [12, 27], що група G має *більше ніж один кінець*, якщо існує нескінченна підмножина $S \subset G$ з нескінченним у G доповненням така, що симетрична різниця $S \Delta (S \cdot x)$ є скінченною для довільного $x \in G$. Будемо також говорити, що група G має *один кінець*, якщо існує така єдина нескінченна підмножина $S \subset G$ із скінченним доповненням, яка задовольняє вищезгадані умови. Очевидно, що нескінченні електорально гнучкі групи — це саме групи з одним кінцем.

У класичній комбінаторній теорії груп добре відома наступна теорема, яка описує нескінченні групи з двома кінцями.

Теорема 2 ([12, 27])**.** *Для групи G такі умови є еквівалентними:*

(*i*) *G — група з двома кінцями;*

(*ii*) *G — нескінченна віртуально циклічна група.*

Зауваження 1. 1. З теореми 2 випливає, що адитивна група цілих чисел $\mathbb{Z}$, а також її прямий добуток з довільною скінченною групою, має два кінці. Також на адитивній групі цілих чисел з приєднаним нулем $\mathbb{Z}^{\mathbf{0}}$ існує рівно чотири гаусдорфові локально компактні трансляційно неперервні топології (див. твердження 4.5 з [14]), причому три з них є напівгруповими.

2. З твердження 5 випливає, що наступні групи є електорально гнучкими:
   (а) n-а пряма степінь адитивної групи цілих чисел $\mathbb{Z}^n$ для $n \geqslant 2$;
   (б) n-а пряма степінь адитивної групи раціональних чисел $\mathbb{Q}^n$ для $n \geqslant 1$;
   (в) n-а пряма степінь адитивної групи дійсних чисел $\mathbb{R}^n$ для $n \geqslant 1$;
   (г) n-а пряма степінь мультиплікативної групи дійсних чисел $(\mathbb{C}^*)^n$ для $n \geqslant 1$ та її підгрупа n-вимірний тор $\mathbb{T}^n$, як n-а пряма степінь одиничного кола $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$.
3. З твердження 4 випливає, що вільна (абелева) група F_X над множиною X потужності $\geqslant 2$ є електорально гнучкою.

З наступного прикладу випливає, що на нескінченній віртуально циклічній групі з приєднаним нулем G^0 існують недискретні некомпактні локально компактні трансляційно неперервні топології, які індукують на G дискретну топологію.

Приклад 1. Нехай G — нескінченна віртуально циклічна група та K_1 і K_2 — кінці в групі G. Для $i = 1, 2$ означимо на G^0 топологію τ_i наступним чином:

(1) усі елементи групи G є ізольованими точками в (G^0, τ_i);

(2) сім'я $\mathscr{B}_i(0) = \{g_1 K_i g_2 \cup \{0\} \colon g_1, g_2 \in G\}$ є базою топології τ_i в нулі напівгрупи G^0.

Оскільки K_i — кінець в G, то τ_i — трансляційно неперервна гаусдорфова локально компактна топологія на напівгрупі G^0, яка не є ні дискретною, ні компактною.

Зауважимо, що топології τ_1 і τ_2 у випадку адитивної групи цілих чисел $\mathbb{Z}$ є напівгруповими [14].

Подяка

Автор висловлює подяку проф. Т. О. Банаху, О. В. Равському та науковому керівникові О. В. Гутіку за корисні поради, коментарі та зауваження.

Список використаної літератури

1. О. Гутік, А. Савчук, Про напівгрупу ID^{∞}, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **83** (2017), 5–19.
2. В. В. Деменчук, Минимальные топологические полугруппы с замкнутыми главными идеалами, Изв. вузов. Матем. 1986, no. 7(290), 36–39; **English version**: V. V. Demenchuk, *Minimal topological semigroups with closed principal ideals*, Soviet Math. (Iz. VUZ) **30** (1986), no. 7, 48–53.
3. А. Г. Курош, *Теория групп*, 3-е изд., Наука, Москва, 1967, 648 с.

4. S. Bardyla, *Classifying locally compact semitopological polycyclic monoids*, Mat. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka 13 (2016), 21–28.
5. S. Bardyla, *On locally compact semitopological graph inverse semigroups*, Mat. Stud. **49** (2018), no. 1, 19–28.
6. S. Bardyla and O. Gutik, *On a semitopological polycyclic monoid*, Algebra Discrete Math. **21** (2016), no. 2, 163–183.
7. J. F. Berglund, *Problems about semitopological semigroups*, Semigroup Forum **19** (1980), 373–383. DOI: 10.1007/BF02572530
8. R. A. Brualdi, *Introductory combinatorics*, 5th ed., Pearson Education, Inc., Prentice Hall 2009.
9. J. H. Carruth, J. A. Hildebrant, and R. J. Koch, *The theory of topological semigroups*, Vol. I, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1983; Vol. II, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1986.
10. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. I., Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1961; Vol. II., Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1967.
11. R. Engelking, *General topology*, 2nd ed., Heldermann, Berlin, 1989.
12. D. B. A. Epstein, *Ends*, Topology of 3-manifolds and related topics, Proc. Univ. of Georgia Institute, 1961. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962, pp. 110–117,
13. O. Gutik, *On the dichotomy of a locally compact semitopological bicyclic monoid with adjoined zero*, Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. **80** (2015), 33–41.
14. O. Gutik, *On locally compact semitopological* 0*-bisimple inverse* ω*-semigroups*, Topol. Algebra Appl. **6** (2018), 77–101. DOI: 10.1515/taa-2018-0008
15. O. V. Gutik and K. P. Pavlyk, *Topological semigroups of matrix units*, Algebra Discrete Math. (2005), no. 3, 1–17.
16. O. Gutik and O. Ravsky, *On feebly compact inverse primitive (semi)topological semigroups*, Mat. Stud. **44** (2015), no. 1, 3–26.
17. K. H. Hofmann, *Locally compact semigroups in which a subgroup with compact complement is dense*, Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1963), 19–51. DOI: 10.1090/S0002-9947-1963-0144319-2
18. R. J. Koch and A. D. Wallace, Notes on inverse semigroups, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **9** (1964), no. 1, 19–24.
19. Z. Mesyan, J. D. Mitchell, M. Morayne, and Y. H. Péresse, *Topological graph inverse semigroups*, Topology Appl. **208** (2016), 106–126. DOI: 10.1016/j.topol.2016.05.012
20. W. S. Owen, *The Rees theorem for locally compact semigroups*, Semigroup Forum **6** (1973), 133–152. DOI: 10.1007/BF02389118
21. A. B. Paalman-de-Miranda, *Topological semigroup*, Math. Centre Tracts **11**. Math. Centrum, Amsterdam, 1964.
22. D. J. S. Robinson, *A course in the theory of groups*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1996.
23. A. I. Roset, *Topologically* 0*-simple semigroups*, Semigroup Forum, **15** (1977), no. 1, 149–157. DOI:10.1007/bf02195745
24. W. Ruppert, *Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory*, Lect. Notes Math., **1079**, Springer, Berlin, 1984. DOI: 10.1007/BFb0073675
25. L. B. Šneperman, *The Rees theorem for weakly uniform semigroups*, Semigroup Forum, **23** (1981), no. 1, 261–273. DOI: 10.1007/bf02676650
26. L. B. Šneperman, *Weakly uniform completely O-simple semigroups of matrix type*, Semigroup Forum, **31** (1985), 25–32. DOI: 10.1007/bf02572637

27. C. T. C. Wall, *Poincaré complexes I,* Ann. Math. **86** (1967), no. 2, 213–245. DOI: 10.2307/1970688

Стаття: надійшла до редколегії 03.02.2019
доопрацьована 23.05.2019
прийнята до друку 03.02.2020

ON LOCALLY COMPACT GROUPS WITH ZERO

Kateryna MAKSYMYK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: kate.maksymyk15@gmail.com

This paper is motivated by Hofmann's results (1963) on the structure of a locally compact topological group with adjoined zero and Berlund's problem (1980): *What is the fine structure of the closure of a group?*
We study algebraic properties on a group G such that if the discrete group G has these properties then every locally compact shift continuous topology on G with adjoined zero is either compact or discrete. We introduce electorally flexible and electorally stable groups and establish their properties. In particular, we prove that every group with an infinite cyclic subgroup of infinite index and every uncountable commutative group are electorally flexible, and show that every countable locally finite group is electorally stable.
The main result of the paper is the following: if G is a discrete electorally flexible group then every Hausdorff locally compact shift-continuous topology on G with adjoined zero is either compact or discrete. Also, we construct a non-discrete non-compact Hausdorff locally compact shift-continuous topology on any discrete virtually cyclic group (and hence on an electorally stable group) G with adjoined zero.

Key words: group, zero, locally compact, discrete, compact, semitopological semigroup, topological semigroup, electorally flexible, electorally stable, end.