ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. C. 22–31
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 22–31
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.021-030

УДК 512.53

ПРО ГОМОМОРФНІ РЕТРАКТИ МОНОЇДА $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$

Анатолій САВЧУК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: asavchuk1@meta.ua

Досліджено гомоморфні ретракти моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ коскінченних часткових ізометрій множини натуральних чисел $\mathbb{N}$. Зокрема, побудовано клас гомоморфних ретрактів моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, елементи якого містять підмоноїд $\mathscr{C}_\mathbb{N}$, породжений зсувами множини $\mathbb{N}$, такі, що $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ є гомоморфним ретрактом кожного такого моноїда.

Ключові слова: напівгрупа, ізометрія, часткова біекція, гомоморфний ретракт, конгруенція, біциклічний моноїд.

Ми користуватимемось термінологією з [8, 16, 17].

Надалі у тексті потужність множини A позначатимемо через $|A|$ і множину натуральних чисел — через $\mathbb{N}$.

Якщо визначене часткове відображення $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$ з множини X у множину Y, то через $\operatorname{dom}\alpha$ і $\operatorname{ran}\alpha$ будемо позначати його *область визначення* та *область значень*, відповідно, а через $(x)\alpha$ і $(A)\alpha$ — образи елемента $x \in \operatorname{dom}\alpha$ та підмножини $A \subseteq \operatorname{dom}\alpha$ при частковому відображенні α, відповідно. Часткове відображення $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$ називається *ко-скінченним*, якщо множини $X \setminus \operatorname{dom}\alpha$ та $Y \setminus \operatorname{ran}\alpha$ є скінченними.

Якщо S — напівгрупа, то її підмножина ідемпотентів позначається через $E(S)$. Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного її елемента x існує єдиний елемент $x^{-1} \in S$ такий, що $xx^{-1}x = x$ та $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. В інверсній напівгрупі S вище означений елемент x^{-1} називається *інверсним до* x. *В'язка* — це напівгрупа ідемпотентів, а *напівґратка* — це комутативна в'язка.

Нехай $\mathscr{I}_\lambda$ — множина всіх часткових взаємно однозначних перетворень ненульового кардинала λ з визначеною на ній напівгруповою операцією

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta \text{ якщо } x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \operatorname{dom}\alpha\colon y\alpha \in \operatorname{dom}\beta\}, \text{ для } \alpha,\beta \in \mathscr{I}_\lambda.$$

2010 Mathematics Subject Classification: 20M18, 20M20, 20M30

Напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda$ називається *симетричним інверсним моноїдом* (*симетричною інверсною напівгрупою*) над кардиналом λ (див. [8]). Симетричний інверсний моноїд введений Вагнером у праці [2] і він відіграє важливу роль у теорії напівгруп.

Відношення еквівалентності $\mathfrak{K}$ на напівгрупі S називається *конгруенцією*, якщо для елементів a і b напівгрупи S з того, що виконується умова $(a,b) \in \mathfrak{K}$ випливає, що $(ca,cb), (ad,bd) \in \mathfrak{K}$, для всіх $c,d \in S$. Відношення $(a,b) \in \mathfrak{K}$ ми також будемо записувати $a\mathfrak{K}b$, і в цьому випадку будемо говорити, що *елементи a і b є $\mathfrak{K}$-еквівалентними.* На кожній напівгрупі S існують такі конгруенції: *універсальна* $\mathfrak{U}_S = S \times S$ та *одинична* (*діагональ*) $\Delta_S = \{(s,s) \colon s \in S\}$. Такі конгруенції називаються *тривіальними.* Конгруенція $\mathfrak{K}$ на напівгрупі S називається *груповою*, якщо фактор-напівгрупа $S/\mathfrak{K}$ є групою. Кожна конгруенція $\mathfrak{K}$ на напівгрупі S породжує *природний гомоморфізм* $\mathfrak{K}^\natural \colon S \to S/\mathfrak{K}$, який ставить у відповідність кожному елементові $s \in S$ його клас $\mathfrak{K}$-еквівалентності $[s]_\mathfrak{K}$. Також, кожен напівгруповий гомоморфізм $h \colon S \to T$ породжує конгруенцію $\ker h$ на S

$$(s,t) \in \ker h \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad (s)h = (t)h, \qquad s,t \in S,$$

і в цьому випадку конгруенція $\ker h$ називається *ядром* гомоморфізму h (див. [8]). Перетворення напівгрупи S, яке є гомоморфізмом, називається *ендоморфізмом.*

Якщо S — напівгрупа, то на $E(S)$ визначено частковий порядок

$$e \preccurlyeq f \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad ef = fe = e.$$

Так означений частковий порядок на $E(S)$ називається *природним.*

Означимо відношення $\leqslant$ на інверсній напівгрупі S так

$$s \preccurlyeq t \qquad \text{тоді і лише тоді, коли} \qquad s = te,$$

для деякого ідемпотента $e \in S$. Так означений частковий порядок називається *природним частковим порядком* на інверсній напівгрупі S [16]. Очевидно, що звуження природного часткового порядку $\preccurlyeq$ інверсної напівгрупи S на її в'язку $E(S)$ є природним частковим порядком на $E(S)$. Інверсна напівгрупа S називається *факторизовною*, якщо для кожного елемента $s \in S$ існує елемент g групи одиниць напівгрупи S такий, що $s \preccurlyeq g$ стосовно природного часткового порядку $\preccurlyeq$ на S.

Часткове перетворення $\alpha \colon (X,d) \rightharpoonup (X,d)$ метричного простору (X,d) називається *ізометричним* або *частковою ізометрією*, якщо $d(x\alpha, y\alpha) = d(x,y)$ для довільних $x,y \in \operatorname{dom}\alpha \subseteq (X,d)$. Очевидно, що композиція двох часткових ізометрій метричного простору (X,d) знову є частковою ізометрією, а також, що обернене часткове відображення до часткової ізометрії є частковою ізометрією. Отож, часткові ізометрії метричного простору (X,d) стосовно операції композиції часткових перетворень є інверсним підмоноїдом симетричного інверсного моноїда над кардиналом $|X|$.

Напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty$ усіх часткових коскінченних ізометрій множини цілих чисел $\mathbb{Z}$ означена в праці Безущак [5], де описано її твірні та доведено, що вона має експоненціальний ріст. Зауважимо, що напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty$ інверсна і є, очевидно, піднапівгрупою напівгрупи всіх часткових коскінченних біекцій множини цілих чисел $\mathbb{Z}$, а елементи напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ — це саме звуження ізометрій множини цілих чисел $\mathbb{Z}$ на коскінченні підмножини в розумінні Лоусона (див. [16, с. 9]. У праці [1] описано відношення Ґріна та головні ідеали напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$. У [3] доведено, що фактор-напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty/\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ за мінімальною груповою конгруенцією $\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ ізоморфна групі $\mathbf{Iso}(\mathbb{Z})$ усіх ізометрій множини $\mathbb{Z}$, напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty$ є F-інверсною напівгрупою, а також, що напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathbf{Iso}(\mathbb{Z}) \ltimes_{\mathfrak{h}} \mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z})$ вільної напівґратки з одиницею $(\mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z}), \cup)$ групою $\mathbf{Iso}(\mathbb{Z})$. Також у [3] досліджувалася топологізація напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ та задача ізоморфного занурення дискретної напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ у гаусдорфові топологічні напівгрупи близькі до компактних.

Нехай $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ — множина усіх часткових коскінченних ізометрій множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ зі звичайною метрикою $d(n,m) = |n-m|$, $n, m \in \mathbb{N}$. Оскільки множина $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ замкнена стосовно операції композиції часткових відображень і взяття оберненого часткового відображення, то $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ — інверсний підмоноїд симетричного інверсного моноїда $\mathscr{I}_\omega$. Через $\mathbb{I}$ позначатимемо тотожне відображення множини натуральних чисел $\mathbb{N}$. Очевидно, що $\mathbb{I}$ — одиниця моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$.

У праці [4] досліджено алгебричні властивості напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Зокрема в [4], описано відношення Ґріна на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, її в'язку та доведено, що $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ — проста E-унітарна F-інверсна напівгрупа. Також описана найменша групова конгруенція $\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ на моноїді $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ та доведено, що фактор-напівгрупа $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty/\mathfrak{C}_{\mathbf{mg}}$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел. Наведено приклад конгруенції на моноїді $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, яка не є груповою. Також доведено, що конгруенція на $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є груповою тоді і лише тоді, коли її звуження на довільну піднапівгрупу S в $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі, є груповою конгруенцією на S. Властивості напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ та напівгруп, які її містять, вивчалися в працях [7, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. Напівгрупа усіх часткових коскінченних ізометрій n-го степеня множини натуральних чисел з евклідовою метрикою досліджувалася в [15].

Гомоморфною ретракцією називається відображення з напівгрупи S в S, яке є одночасно ретракцією та гомоморфізмом [8]. Образ напівгрупи S при її гомоморфній ретракції називається *гомоморфним ретрактом*. Тобто гомоморфний ретракт напівгрупи S — це така піднапівгрупа T в S, що існує гомоморфізм з S на T, для якого піднапівгрупа T є множиною всіх його нерухомих точок. Очевидно, що кожне тотожне відображення напівгрупи S є її гомоморфною ретракцією, а також, якщо e — ідемпотент в S, то стале відображення $h\colon S \to S$, $x \mapsto e$ є гомоморфною ретракцією напівгрупи S. Такі гомоморфні ретракції напівгрупи S будемо називати *тривіальними*, а образи напівгрупи S стосовно них — *тривіальними* гомоморфними ретрактами.

Добре відомо (див. [8, §1.12]), що біциклічний моноїд $\mathscr{C}(p,q)$ ізоморфний напівгрупі $\mathscr{C}_\mathbb{N}$, породженій частковими перетвореннями α та β множини натуральних чисел $\mathbb{N}$, які визначаються наступним чином:

$$\operatorname{dom}\alpha = \mathbb{N}, \quad \operatorname{ran}\alpha = \mathbb{N}\setminus\{1\}, \quad (n)\alpha = n+1$$

і

$$\operatorname{dom}\beta = \mathbb{N}\setminus\{1\}, \quad \operatorname{ran}\beta = \mathbb{N}, \quad (n)\beta = n-1.$$

Очевидно, що $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ є підмоноїдом в $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. За наслідком 1.32 з [8] усі гомоморфізми біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}(p,q)$ є, або ізоморфізмами, або ж груповими, і очевидно, що кожен автоморфізм біциклічної напівгрупи $\mathscr{C}(p,q)$ є тотожним відображенням.

Звідси випливає, що всі гомоморфні ретракції біциклічного моноїда $\mathscr{C}(p,q)$, а отже і моноїда $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ є тривіальними.

Зауважимо, що підмоноїд $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ є гомоморфним ретрактом у моноїді $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ ([4, наслідок 13]). Тому природно виникає задача: *описати всі нетривіальні гомоморфні ретракти моноїда* $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Це питання поставлено О. Гутіком на семінарі "Теорія полігонів і спектральні простори" у Львівському університеті в 2017 році. Також він уточнив це питання: *чи існують нетривіальні гомоморфні ретракти моноїда* $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ *відмінні від* $\mathscr{C}_\mathbb{N}$*?*

Ми досліджуємо гомоморфні ретракти моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Зокрема, побудовано клас гомоморфних ретрактів моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, елементи якого містять підмоноїд $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ такі, що $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ є гомоморфним ретрактом кожного такого моноїда.

Нехай β — довільний елемент напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Оскільки за лемою 1 з [4] кожен елемент напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є звуженням часткового зсуву множини натуральних чисел на коскінченну підмножину в $\mathbb{N}$ і $(\mathbb{N},\leqslant)$ — цілком впорядкована множина, то існує найменше натуральне число $n_\beta^\mathbf{d}\in\operatorname{dom}\beta$ таке, що $n\in\operatorname{dom}\beta$ для всіх натуральних $n\geqslant n_\beta^\mathbf{d}$ та існує найменше натуральне число $n_\beta^\mathbf{r}\in\operatorname{ran}\beta$ таке, що $n\in\operatorname{ran}\beta$ для всіх натуральних $n\geqslant n_\beta^\mathbf{r}$.

Твердження 1. *Нехай S — напівгрупа та $\mathfrak{H}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty\to S$ — негруповий гомоморфізм. Якщо $(\alpha)\mathfrak{H}=(\beta)\mathfrak{H}$ для деяких $\alpha,\beta\in\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, то $n_\alpha^\mathbf{d}=n_\beta^\mathbf{d}$ і $n_\alpha^\mathbf{r}=n_\beta^\mathbf{r}$.*

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли α,β є ідемпотентами моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Припустимо протилежне: існують $\alpha,\beta\in E(\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty)$ такі, що $n_\alpha^\mathbf{d}\neq n_\beta^\mathbf{d}$. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що $n_\alpha^\mathbf{d}<n_\beta^\mathbf{d}$. Приймемо $n_0=n_\alpha^\mathbf{d}+1$ і нехай ε_0 — тотожне відображення множини $\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n_0\}$. Тоді $\varepsilon_0\in\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, і оскільки $n_\alpha^\mathbf{d}<n_\beta^\mathbf{d}$, то очевидно, що $\varepsilon_0\cdot\alpha\preccurlyeq\varepsilon_0\cdot\beta$, $\varepsilon_0\cdot\alpha\neq\varepsilon_0\cdot\beta$ і $\varepsilon_0\cdot\alpha,\varepsilon_0\cdot\beta\in E(\mathscr{C}_\mathbb{N})$. Тоді за теоремою 22 [4] гомоморфний образ $(\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty)\mathfrak{H}$ є підгрупою в S, а це суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає рівність $n_\alpha^\mathbf{d}=n_\beta^\mathbf{d}$.

Нехай α,β — довільні різні елементи моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ такі, що $(\alpha)\mathfrak{H}=(\beta)\mathfrak{H}$. Оскільки моноїд $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є інверсним, то $(\alpha\alpha^{-1})\mathfrak{H}=(\beta\beta^{-1})\mathfrak{H}$ і $(\alpha^{-1}\alpha)\mathfrak{H}=(\beta^{-1}\beta)\mathfrak{H}$. Також, оскільки $\operatorname{dom}\gamma=\operatorname{dom}(\gamma\gamma^{-1})$ і $\operatorname{ran}\gamma=\operatorname{dom}(\gamma^{-1}\gamma)$ для довільного $\gamma\in\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, то з означень чисел $n_\gamma^\mathbf{d}$ і $n_\gamma^\mathbf{r}$ випливає, що $n_\gamma^\mathbf{d}=n_{\gamma\gamma^{-1}}^\mathbf{d}$ і $n_\gamma^\mathbf{r}=n_{\gamma^{-1}\gamma}^\mathbf{d}$. Далі, використавши твердження доведене для ідемпотентів, отримуємо рівності $n_\alpha^\mathbf{d}=n_\beta^\mathbf{d}$ і $n_\alpha^\mathbf{r}=n_\beta^\mathbf{r}$. $\square$

Для довільного елемента $\alpha\in\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ означимо:

- $\vec{\alpha}$ — звуження часткового відображення $\alpha\colon\mathbb{N}\rightharpoonup\mathbb{N}$ на множину $\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n_\alpha^\mathbf{d}\}$;
- $\iota_\alpha^\mathbf{d}$ — тотожне відображення множини $\operatorname{dom}\vec{\alpha}=\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n_\alpha^\mathbf{d}\}$;
- $\iota_\alpha^\mathbf{r}$ — тотожне відображення множини $\operatorname{ran}\vec{\alpha}=\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n_\alpha^\mathbf{r}\}$.

У праці [4] означено ендоморфізм $\mathfrak{H}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}\colon\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty\to\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, $\alpha\mapsto\vec{\alpha}$, та доведено, що підмоноїд $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є гомоморфним ретрактом. Твердження 2 описує конгруенцію, яка є ядром цього ендоморфізму.

Твердження 2. *Для елементів $\alpha,\beta\in\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ такі умови є еквівалентними:*

(i) $(\alpha)\mathfrak{H}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}=(\beta)\mathfrak{H}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}$;
(ii) $\iota_\alpha^\mathbf{d}\alpha=\iota_\beta^\mathbf{d}\beta$;

(*iii*) $\alpha\iota^{\mathbf{r}}_{\alpha}=\beta\iota^{\mathbf{r}}_{\beta}$;
(*iv*) $\iota^{\mathbf{d}}_{\alpha}\alpha=\beta\iota^{\mathbf{r}}_{\beta}$;
(*v*) $\alpha\iota^{\mathbf{r}}_{\alpha}=\iota^{\mathbf{d}}_{\beta}\beta$.

Доведення. За означеннями часткових відображень $\iota^{\mathbf{d}}_{\alpha}$, $\iota^{\mathbf{r}}_{\alpha}$ і ендоморфізму $\mathfrak{H}_{\mathscr{C}_{\mathbb{N}}}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}\to\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ маємо, що $(\alpha)\mathfrak{H}_{\mathscr{C}_{\mathbb{N}}}=\iota^{\mathbf{d}}_{\alpha}\alpha=\alpha\iota^{\mathbf{r}}_{\alpha}$ для довільного елемента $\alpha\in\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$, звідки випливають еквівалентності тверджень леми. $\square$

Означення 1. Нехай n_0 — довільне натуральне число та p — довільне натуральне число строго більше за 1. Через $\iota^{\langle -p\rangle}_{n_0}$ позначимо тотожне відображення множини

$$A_{n_0}=\begin{cases}\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n_0\}, & \text{якщо } n_0-p\notin\mathbb{N};\\ \{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n_0\}\cup\{n_0-p\}, & \text{якщо } n_0-p\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

На моноїді $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ означимо відношення $\sim_{\langle -p\rangle}$ так:

$$\alpha\sim_{\langle -p\rangle}\beta \qquad \text{тоді і тільки тоді, коли} \qquad \iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha}}\alpha=\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\beta}}\beta.$$

Очевидно, що $\sim_{\langle -p\rangle}$ — рефлексивне, симетричне та транзитивне відношення на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$.

Також з того, що кожен елемент моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ за лемою 1 з [4] є частковим зсувом множини натуральних чисел $\mathbb{N}$, то виконується перше випловлення леми 1, а її друге висловлення безпосередньо випливає з означення еквівалентності $\sim_{\langle -p\rangle}$.

Лема 1. *Нехай p — довільне натуральне число $\geqslant 2$. Тоді*

(1) $\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha}}\alpha=\alpha\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{r}}_{\alpha}}$ *для кожного* $\alpha\in\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$;
(2) *якщо* $\alpha\sim_{\langle -p\rangle}\beta$ *для* $\alpha,\beta\in\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$, *то* $n^{\mathbf{d}}_{\alpha}=n^{\mathbf{d}}_{\beta}$ *і* $n^{\mathbf{r}}_{\alpha}=n^{\mathbf{r}}_{\beta}$.

Твердження 3. *Якщо p — довільне натуральне число $\geqslant 2$, то $\sim_{\langle -p\rangle}$ — конгруенція на напівгрупі $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$.*

Доведення. Нехай $\alpha\sim_{\langle -p\rangle}\beta$ для деяких $\alpha,\beta\in\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ і γ — довільний елемент напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$.

Оскільки за лемою 1 з [4] кожен елемент моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ є частковим зсувом множини $\mathbb{N}$, то існують цілі числа z_α, z_β і z_γ такі, що

$$(i)\alpha=i+z_\alpha, \qquad (j)\beta=j+z_\beta \qquad \text{і} \qquad (k)\gamma=k+z_\gamma$$

для довільних $i\in\operatorname{dom}\alpha$, $j\in\operatorname{dom}\beta$ і $k\in\operatorname{dom}\gamma$. Також з рівності $\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha}}\alpha=\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\beta}}\beta$ випливає, що $z_\alpha=z_\beta$, а за лемою 1(2) отримуємо рівності $n^{\mathbf{d}}_{\alpha}=n^{\mathbf{d}}_{\beta}$ і $n^{\mathbf{r}}_{\alpha}=n^{\mathbf{r}}_{\beta}$.

Очевидно, що виконується лише один з таких випадків:

$$(a)\ n^{\mathbf{r}}_{\alpha}<n^{\mathbf{d}}_{\gamma}; \qquad (b)\ n^{\mathbf{r}}_{\alpha}=n^{\mathbf{d}}_{\gamma}; \qquad (c)\ n^{\mathbf{r}}_{\alpha}>n^{\mathbf{d}}_{\gamma}.$$

Зауважимо спочатку, оскільки моноїд $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ є підмоноїдом симетричного інверсного моноїда $\mathscr{I}_{\mathbb{N}}$ над множиною $\mathbb{N}$, то

$$\operatorname{dom}(\alpha\gamma)=(\operatorname{dom}\gamma\cap\operatorname{ran}\alpha)\alpha^{-1}, \qquad \operatorname{ran}(\alpha\gamma)=(\operatorname{dom}\gamma\cap\operatorname{ran}\alpha)\gamma,$$

$$\operatorname{dom}(\beta\gamma)=(\operatorname{dom}\gamma\cap\operatorname{ran}\beta)\beta^{-1}, \qquad \operatorname{ran}(\beta\gamma)=(\operatorname{dom}\gamma\cap\operatorname{ran}\beta)\gamma.$$

Припустимо, що $n_{\alpha}^{\mathbf{r}} < n_{\gamma}^{\mathbf{d}}$. З того, що кожен елемент моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ є частковим зсувом множини $\mathbb{N}$ ([4, лема 1]) і з рівностей $n_{\alpha}^{\mathbf{d}} = n_{\beta}^{\mathbf{d}}$ і $z_{\alpha} = z_{\beta}$ випливає, що

$$n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}} = (n_{\gamma}^{\mathbf{d}})\alpha^{-1} = n_{\beta\gamma}^{\mathbf{d}} = (n_{\gamma}^{\mathbf{d}})\beta^{-1} > n_{\alpha}^{\mathbf{d}}.$$

Розглянемо два можливі випадки.

1. Якщо $n_{\alpha}^{\mathbf{d}} + 1 = n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}$, то $n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}} - p \notin \operatorname{dom}\alpha$ і $n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}} - p \notin \operatorname{dom}\beta$, а отже

$$n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}} - p \notin \operatorname{dom}(\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma) = \operatorname{dom}(\iota_{n_{\beta\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta\gamma) = \left\{n \in \mathbb{N} \colon n \geqslant n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}\right\}.$$

Тоді, очевидно, що $(i)\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma = (i)\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta\gamma = i + z_{\alpha} + z_{\gamma}$ для всіх $i \in \operatorname{dom}(\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma)$.

2. Якщо $n_{\alpha}^{\mathbf{d}} + 1 < n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}$, то $n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}} - p \in \operatorname{dom}\alpha$ і $n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}} - p \in \operatorname{dom}\beta$, а отже,

$$n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}} - p \in \operatorname{dom}(\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma) = \operatorname{dom}(\iota_{n_{\beta\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta\gamma) = \left\{n \in \mathbb{N} \colon n \geqslant n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}\right\} \cup \left\{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}} - p\right\}.$$

Очевидно, що

$$(i)\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma = (i)\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta\gamma = i + z_{\alpha} + z_{\gamma}$$

для всіх $i \in \operatorname{dom}(\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma)$.

Припустимо, що $n_{\alpha}^{\mathbf{r}} = n_{\gamma}^{\mathbf{d}}$. Тоді

$$n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}} = (n_{\alpha}^{\mathbf{r}})\alpha^{-1} = n_{\alpha}^{\mathbf{d}} = n_{\beta}^{\mathbf{d}} = (n_{\beta}^{\mathbf{r}})\beta^{-1} = n_{\beta\gamma}^{\mathbf{d}},$$

оскільки $z_{\alpha} = z_{\beta}$, $n_{\alpha}^{\mathbf{d}} = n_{\beta}^{\mathbf{d}}$ і $n_{\alpha}^{\mathbf{r}} = n_{\beta}^{\mathbf{r}}$, а отже, матимемо, що

$$\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma = \iota_{n_{\alpha}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma = \iota_{n_{\beta}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta\gamma = \iota_{n_{\beta\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta\gamma.$$

Припустимо, що $n_{\alpha}^{\mathbf{r}} > n_{\gamma}^{\mathbf{d}}$. З того, що кожен елемент моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ є частковим зсувом множини $\mathbb{N}$ ([4, лема 1]) і з рівностей $n_{\alpha}^{\mathbf{d}} = n_{\beta}^{\mathbf{d}}$ і $z_{\alpha} = z_{\beta}$ випливає, що $n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}} = n_{\alpha}^{\mathbf{d}} = n_{\beta}^{\mathbf{d}} = n_{\beta\gamma}^{\mathbf{d}}$, а отже, маємо, що

$$\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma = \iota_{n_{\alpha}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma = \iota_{n_{\beta}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta\gamma = \iota_{n_{\beta\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta\gamma.$$

Отож, ми довели, що з рівності $\iota_{n_{\alpha}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha = \iota_{n_{\beta}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta$ випливає рівність $\iota_{n_{\alpha\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\gamma = \iota_{n_{\beta\gamma}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta\gamma$ для довільного елемента γ напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$.

З рівності $\iota_{n_{\alpha}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha = \iota_{n_{\beta}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta$ та леми 1(1) випливає, що $\alpha\iota_{n_{\alpha}^{\mathbf{r}}}^{\langle -p\rangle} = \beta\iota_{n_{\beta}^{\mathbf{r}}}^{\langle -p\rangle}$. Оскільки $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ — інверсна напівгрупа, то

$$\iota_{n_{\alpha^{-1}}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha^{-1} = \iota_{n_{\alpha}^{\mathbf{r}}}^{\langle -p\rangle}\alpha^{-1} = \left(\alpha\iota_{n_{\alpha}^{\mathbf{r}}}^{\langle -p\rangle}\right)^{-1} = \left(\beta\iota_{n_{\beta}^{\mathbf{r}}}^{\langle -p\rangle}\right)^{-1} = \iota_{n_{\beta}^{\mathbf{r}}}^{\langle -p\rangle}\beta^{-1} = \iota_{n_{\beta^{-1}}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta^{-1}.$$

Тоді з першої частини доведення випливає, що для довільного елемента γ напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_{\infty}$ справджується рівність

$$\iota_{n_{\alpha^{-1}\gamma^{-1}}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha^{-1}\gamma^{-1} = \iota_{n_{\beta^{-1}\gamma^{-1}}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta^{-1}\gamma^{-1}.$$

Далі, скориставшись тим, що $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ — інверсна напівгрупа та лемою 1(1), отримуємо

$$\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\gamma\alpha}}\gamma\alpha=\gamma\alpha\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{r}}_{\gamma\alpha}}=\gamma\alpha\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha^{-1}\gamma^{-1}}}=\gamma\beta\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\beta^{-1}\gamma^{-1}}}=\gamma\beta\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{r}}_{\gamma\beta}}=\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\gamma\beta}}\gamma\beta.$$

Отже, $\sim_{\langle -p\rangle}$ — конгруенція на $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. □

Теорема 1. *Нехай p — довільне натуральне число $\geqslant 2$. Тоді відображення $\mathfrak{H}^{\langle -p\rangle}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty\to\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, $\alpha\mapsto\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_\alpha}\alpha$, є ендоморфізмом. Більше того підмоноїд $\mathscr{C}^{\langle -p\rangle}_\mathbb{N}=\left\{\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_\alpha}\alpha\colon \alpha\in\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty\right\}$ є гомоморфним ретрактом напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$.*

Доведення. Нехай α і β — довільні елементи напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$. Спочатку доведемо рівність

$$\operatorname{dom}\left(\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha\beta}}\alpha\beta\right)=\operatorname{dom}\left(\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha}}\alpha\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\beta}}\beta\right). \tag{1}$$

Розглянемо два можливі випадки.

1. Нехай $n^{\mathbf{r}}_\alpha\geqslant n^{\mathbf{d}}_\beta$. Оскільки за лемою 1 з [4] кожен елемент моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є частковим зсувом множини $\mathbb{N}$, то $n^{\mathbf{d}}_{\alpha\beta}=(n^{\mathbf{r}}_\alpha)\alpha^{-1}=n^{\mathbf{d}}_\alpha$. Знову за лемою 1 [4] отримаємо, що

$$\operatorname{dom}\left(\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha\beta}}\alpha\beta\right)=\begin{cases}\left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n^{\mathbf{d}}_\alpha\right\}\cup\left\{n^{\mathbf{d}}_\alpha-p\right\}, & \text{якщо } n^{\mathbf{d}}_\alpha-p\in\operatorname{dom}\alpha\\ & \text{і } (n^{\mathbf{d}}_\alpha-p)\alpha\in\operatorname{dom}\beta;\\ \left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n^{\mathbf{d}}_\alpha\right\}, & \text{в іншому випадку,}\end{cases}$$

$$\operatorname{dom}\left(\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha}}\alpha\right)=\begin{cases}\left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n^{\mathbf{d}}_\alpha\right\}\cup\left\{n^{\mathbf{d}}_\alpha-p\right\}, & \text{якщо } n^{\mathbf{d}}_\alpha-p\in\operatorname{dom}\alpha;\\ \left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n^{\mathbf{d}}_\alpha\right\}, & \text{в іншому випадку,}\end{cases}$$

і

$$\operatorname{dom}\left(\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\beta}}\beta\right)=\begin{cases}\left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant (n^{\mathbf{d}}_\alpha)\alpha\right\}\cup\left\{(n^{\mathbf{d}}_\alpha-p)\alpha\right\}, & \text{якщо } (n^{\mathbf{d}}_\alpha-p)\alpha\in\operatorname{dom}\beta;\\ \left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant (n^{\mathbf{d}}_\alpha)\alpha\right\}, & \text{в іншому випадку.}\end{cases}$$

Отже, якщо $n^{\mathbf{r}}_\alpha\geqslant n^{\mathbf{d}}_\beta$, то виконується рівність (1).

2. Нехай $n^{\mathbf{r}}_\alpha< n^{\mathbf{d}}_\beta$. Оскільки за лемою 1 з [4] кожен елемент моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є частковим зсувом множини $\mathbb{N}$, то $n^{\mathbf{d}}_{\alpha\beta}=(n^{\mathbf{d}}_\beta)\alpha^{-1}>n^{\mathbf{d}}_\alpha$. Знову за лемою 1 [4] отримаємо, що

$$\operatorname{dom}\left(\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha\beta}}\alpha\beta\right)=\begin{cases}\left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant (n^{\mathbf{d}}_\beta)\alpha^{-1}\right\}\cup & \text{якщо } (n^{\mathbf{d}}_\beta)\alpha^{-1}-p\in\operatorname{dom}\alpha\\ \quad\cup\left\{(n^{\mathbf{d}}_\beta)\alpha^{-1}-p\right\}, & \text{і } (n^{\mathbf{d}}_\beta)\alpha^{-1}-p\in\operatorname{dom}\beta;\\ \left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant (n^{\mathbf{d}}_\beta)\alpha^{-1}\right\}, & \text{в іншому випадку,}\end{cases}$$

$$\operatorname{dom}\left(\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\alpha}}\alpha\right)=\begin{cases}\left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant (n^{\mathbf{d}}_\beta)\alpha^{-1}\right\}\cup & \text{якщо } (n^{\mathbf{d}}_\beta)\alpha^{-1}-p\in\operatorname{dom}\alpha;\\ \quad\cup\left\{(n^{\mathbf{d}}_\beta)\alpha^{-1}-p\right\}, & \\ \left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant (n^{\mathbf{d}}_\beta)\alpha^{-1}\right\}, & \text{в іншому випадку,}\end{cases}$$

і

$$\operatorname{dom}\left(\iota^{\langle -p\rangle}_{n^{\mathbf{d}}_{\beta}}\beta\right)=\begin{cases}\left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n^{\mathbf{d}}_\beta\right\}\cup\left\{n^{\mathbf{d}}_\beta-p\right\}, & \text{якщо } n^{\mathbf{d}}_\beta-p\in\operatorname{dom}\beta;\\ \left\{n\in\mathbb{N}\colon n\geqslant n^{\mathbf{d}}_\beta\right\}, & \text{в іншому випадку.}\end{cases}$$

Отже, якщо $n_\alpha^{\mathbf{r}} < n_\beta^{\mathbf{d}}$, то виконується рівність (1).

Оскільки за лемою 1 з [4] кожен елемент моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є частковим зсувом множини $\mathbb{N}$, то існують цілі числа z_α і z_β такі, що

$$(i)\alpha = i + z_\alpha \qquad \text{i} \qquad (j)\beta = j + z_\beta,$$

для довільних $i \in \operatorname{dom}\alpha$ і $j \in \operatorname{dom}\beta$, то з означення часткового відображення $\iota_{n_0}^{\langle -p\rangle}$ випливає, що

$$(n)\iota_{n_{\alpha\beta}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\beta = (n)\alpha\beta = (n+z_\alpha)\beta = n + z_\alpha + z_\beta$$

і

$$(n)\iota_{n_\alpha^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\iota_{n_\beta^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta = (n)\alpha\iota_{n_\beta^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta = (n+z_\alpha)\iota_{n_\beta^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta = (n+z_\alpha)\beta = n + z_\alpha + z_\beta,$$

для всіх $n \in \operatorname{dom}\left(\iota_{n_{\alpha\beta}^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\beta\right) = \operatorname{dom}\left(\iota_{n_\alpha^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\alpha\iota_{n_\beta^{\mathbf{d}}}^{\langle -p\rangle}\beta\right)$. Отож, ми довели, що відображення $\mathfrak{H}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}^{\langle -p\rangle}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є гомоморфізмом.

Очевидно, що $\mathscr{C}_\mathbb{N}^{\langle -p\rangle}$ — підмоноїд моноїда $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ і $(\alpha)\mathfrak{H}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}^{\langle -p\rangle} = \alpha$ для довільного $\alpha \in \mathscr{C}_\mathbb{N}^{\langle -p\rangle}$. $\square$

З означення ендоморфізмів $\mathfrak{H}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ і $\mathfrak{H}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}^{\langle -p\rangle}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ випливає

Наслідок 1. *Нехай p_1 і p_2 — довільні різні натуральні числа $\geqslant 2$. Тоді*

$$\mathfrak{H}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}^{\langle -p_1\rangle} \circ \mathfrak{H}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}^{\langle -p_2\rangle} = \mathfrak{H}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}^{\langle -p_2\rangle} \circ \mathfrak{H}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}}^{\langle -p_1\rangle} = \mathfrak{H}_{\mathscr{C}_\mathbb{N}},$$

а отже, підмоноїд $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ є гомоморфним ретрактом моноїда $\mathscr{C}_\mathbb{N}^{\langle -p\rangle}$, для довільного $p \geqslant 2$.

Зауваження 1. Кожна групова конгруенція на моноїді $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, яка відмінна від універсальної, породжує гомоморфізм напівгрупи $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, який не може бути її ендоморфізмом, оскільки всі $\mathscr{H}$-класи в $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ є тривіальними (див. [4, твердження 1]).

Також, очевидно, що підпростір $\mathbb{N}_{[p]} = \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, p\}$ в $\mathbb{N}$ ізометричний самому простору $\mathbb{N}$ для довільного натурального числа p, стосовно відображення $h_{[p]}\colon n \mapsto n + p$. Ця ізометрія породжує ін'єктивний ендоморфізм $\mathscr{H}_{[p]}\colon \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty \to \mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, який не має жодної нерухомої точки та визначається $\mathscr{H}_{[p]}\colon \alpha \mapsto \alpha_{[p]}$, де $\operatorname{dom}\alpha_{[p]} = \{n \in \mathbb{N}\colon n - p \in \operatorname{dom}\alpha\}$, $\operatorname{ran}\alpha_{[p]} = \{n \in \mathbb{N}\colon n - p \in \operatorname{ran}\alpha\}$ і $(i)\alpha_{[p]} = (i-p)\alpha + p$, для всіх $i \in \operatorname{dom}\alpha_{[p]}$.

Подяка

Автор висловлює подяку науковому керівникові Олегу Гутіку за корисні поради та зауваження.

Список використаної літератури

1. О. О. Безущак, *Відношення Ґріна інверсної напівгрупи частково визначених коскінченних ізометрій дискретної лінійки*, Вісник Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. (2008), no. 1, 12–16.
2. В. В. Вагнер, *Обобщенные группы*, ДАН СССР **84** (1952), 1119–1122.
3. О. Гутік, А. Савчук, *Про напівгрупу* $\mathbf{ID}_\infty$, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **83** (2017), 5–19.

4. О. Гутік, А. Савчук, Напівгрупа часткових коскінченних ізометрій натуральних чисел, Буковинський математичний журнал **6** (2018), no. 1-2, 42–51. DOI: 10.31861/bmj2018.01.042
5. O. Bezushchak, *On growth of the inverse semigroup of partially defined co–finite automorphisms of integers*, Algebra Discrete Math. (2004), no. 2, 45–55.
6. I. Chuchman and O. Gutik, *Topological monoids of almost monotone, injective cofinite partial selfmaps of positive integers*, Carpathian Math. Publ. **2** (2010), no. 1, 119–132.
7. I. Chuchman and O. Gutik, *On monoids of injective partial selfmaps almost everywhere the identity*, Demonstr. Math. **44** (2011), no. 4, 699–722. DOI: 10.1515/dema-2013-0340
8. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Vol. I., Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1961; Vol. II., Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1967.
9. O. V. Gutik and I. V. Pozdniakova, *Congruences on the monoid of monotone injective partial selfmaps of $L_n \times_{\mathrm{lex}} \mathbb{Z}$ with co-finite domains and images*, Мат. методи фіз.-мех. поля **57** (2014), no. 3, 7–15; reprinted version: J. Math. Sci. **217** (2016), no. 2, 139–148. DOI: 10.1007/s10958-016-2962-3
10. O. Gutik and I. Pozdnyakova, *On monoids of monotone injective partial selfmaps of $L_n \times_{\mathrm{lex}} \mathbb{Z}$ with cofinite domains and images*, Algebra Discr. Math. **17** (2014), no. 2, 256–279.
11. O. Gutik and D. Repovš, *Topological monoids of monotone, injective partial selfmaps of $\mathbb{N}$ having cofinite domain and image*, Stud. Sci. Math. Hungar. **48** (2011), no. 3, 342–353. DOI: 10.1556/SScMath.48.2011.3.1176
12. O. Gutik and D. Repovš, *On monoids of injective partial selfmaps of integers with cofinite domains and images*, Georgian Math. J. **19** (2012), no. 3, 511–532. DOI: 10.1515/gmj-2012-0022
13. O. Gutik and D. Repovš, *On monoids of injective partial cofinite selfmaps*, Math. Slovaca **65** (2015), no. 5, 981–992. DOI: 10.1515/ms-2015-0067
14. O. V. Gutik and A. S. Savchuk, On inverse submonoids of the monoid of almost monotone injective co-finite partial selfmaps of positive integers, Carpathian Math. Publ. **11** (2019), no. 2, 296–310. DOI: 10.15330/cmp.11.2.296-310
15. O. Gutik and A. Savchuk, *On the monoid of cofinite partial isometries of $\mathbb{N}^n$ with the usual metric*, Proc. Int. Geom. Center **12** (2019), no. 3, 51–68. DOI: 10.15673/tmgc.v12i3.1553
16. M. Lawson, *Inverse Semigroups. The Theory of Partial Symmetries*, Singapore: World Scientific, 1998.
17. M. Petrich, *Inverse Semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

Стаття: надійшла до редколегії 03.02.2019
доопрацьована 23.05.2019
прийнята до друку 03.02.2020

ON HOMOMORPHIC RETRACTS OF THE MONOID $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$

Anatolii SAVCHUK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: asavchuk1@meta.ua

A *homomorphic retraction* is a map from a semigroup S into S which is both a retraction and a homomorphism. The image of the homomorphic retraction is called a *homomorphic retract.*
A partial transformation $\alpha\colon (X,d) \rightharpoonup (X,d)$ of a metric space (X,d) is called *isometric* or a *partial isometry,* if $d(x\alpha, y\alpha) = d(x,y)$ for all $x, y \in \operatorname{dom}\alpha$. It is obvious that the composition of two partial isometries of a metric space (X,d) is a partial isometry, and the converse partial map to a partial isometry is a partial isometry. Hence the set of partial isometries of a metric space (X,d) with the operation of composition of partial isometries is an inverse submonoid of the symmetric inverse monoid over the set X.
A partial transformation $\alpha\colon X \rightharpoonup X$ of a set X is called *co-finite* if both sets $X \setminus \operatorname{dom}\alpha$ and $X \setminus \operatorname{ran}\alpha$ are finite.
Let $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ be the set of all partial cofinite isometries of the set of positive integers $\mathbb{N}$ with the usual metric $d(n,m) = |n-m|$, $n, m \in \mathbb{N}$. Then $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ with the operation of composition of partial isometries is an inverse submonoid of $\mathscr{I}_\omega$.
We study homomorphic retracts of the monoid $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$ of co-finite partial isometries of the set of positive integers $\mathbb{N}$. In particular, we construct a class of homomorphic retracts of $\mathbf{I}\mathbb{N}_\infty$, whose elements contain the submonoid $\mathscr{C}_\mathbb{N}$, where $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ is generated by shifts of the set $\mathbb{N}$ such that $\mathscr{C}_\mathbb{N}$ is a homomorphic retract of any element from this class. This gives a positive answer on Gutik's question: *Do there exist non-trivial homomorphic retracts distinct from $\mathscr{C}_\mathbb{N}$?*
This question was posed on the seminar *S-acts Theory and Spectral Spaces* at the Lviv University in 2017.

Key words: semigroup, isometry, partial bijection, homomorphic retract, congruence, bicyclic monoid.