ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 12–21
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 12–21
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.012-021

УДК 512.53

ВАРІАНТИ НАПІВГРУПИ РІСА МАТРИЧНОГО ТИПУ

Олександра ДЕСЯТЕРИК

Міжнародний Науково Навчальний Центр Інформаційних Технологій та Систем НАН і МОН України,
просп. Глушкова, 40, 03680, м. Київ
e-mail: sasha.desyaterik@gmail.com

Встановлено необхідні та достатні умови регулярності варіанта та ізоморфності двох варіантів для матричної напівгрупи Ріса з сендвіч матрицею над групою з нулем.

Ключові слова: варіант, сендвіч напівгрупа, напівгрупа Ріса, ізоморфізм.

1. Вступ

Нехай $(S, \cdot)$ — напівгрупа. Для фіксованого елемента $a \in S$ визначимо на S нову операцію $*$ за допомогою рівності $x * y = x \cdot a \cdot y$. Операцію $*$ будемо називати *сендвіч-множенням.* Множина S з сендвіч-операцією $*$ знову є напівгрупою. Позначимо цю напівгрупу $(S, *_a)$ і називатимемо її *сендвіч-напівгрупою* чи *варіантом* напівгрупи $(S, \cdot)$.

Одним із перших задачу вивчення варіантів напівгруп поставив Ляпін у монографії [1]. Хоча він формулював цю задачу для напівгрупи перетворень, надалі дослідження варіантів поширилося на різні класи напівгруп (див., наприклад, [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] та главу 13 із [9]). Долінка та Іст вивчали варіанти скінченних напівгруп перетворень у [10] і варіанти напівгруп прямокутних матриць у [11]. У багатьох працях (див., наприклад, [12] та [13]) вивчали інтерасоціативності моноїдів, які тісно пов'язані з варіантами. Ізоморфізми інтерасоціативностей та варіантів фіксованих напівгруп вивчалися в [12, 13, 14].

Мета нашої праці дослідити варіанти напівгрупи Ріса матричного типу з сендвіч-матрицею над групою з нулем.

Нехай $G^0 = G \cup \{0\}$ — група G із приєднаним нулем 0, а I та J — довільні непорожні множини. $I \times J$*-матрицею Ріса над* групою G^0 називається $I \times J$-матриця

2010 Mathematics Subject Classification: 20M30, 20M17, 20M99 над G^0, яка містить не більше одного ненульового елемента. Матрицю Ріса, в якій ненульовий елемент g стоїть на місці kl, позначатимемо $A_{kl}(g)$ або $[g]_{kl}$. Розглянемо також довільну (але фіксовану) $J \times I$-матрицю $P = (p_{ji})_{i \in I,\, j \in J}$, де $p_{ji} \in G^0$. У множині всіх $I \times J$-матриць Ріса над G^0 визначимо множення $\circ$ правилом $A \circ B = A \cdot P \cdot B$. Тоді добуток $A_{kl}(g) \circ A_{uv}(h)$ є нульовою матрицею, якщо $p_{lu} = 0$, і матрицею Ріса $A_{kv}(g \cdot p_{lu} \cdot h)$, якщо $p_{lu} \neq 0$.

Операція $\circ$ є асоціативною, тому множина $\mathcal{M}^0(G; I, J; P)$ всіх $I \times J$-матриць Ріса над групою G^0 утворює напівгрупу стосовно цієї операції. Вона називається *напівгрупою Ріса матричного типу* із сендвіч-матрицею P над групою з нулем G^0. Якщо $|I| = n$ та $|J| = m$, то замість $\mathcal{M}^0(G; I, J; P)$ пишуть $\mathcal{M}^0(G; n, m; P)$.

2. Допоміжні результати

Напівгрупа S називається *регулярною*, якщо для довільного $a \in S$ існує такий $x \in S$, що $axa = a$. Будемо називати варіант $(S, *_a)$ *регулярним*, якщо $(S, *_a)$ є регулярною напівгрупою.

Лема 1 ([15], лема 3.1)**.** *Напівгрупа Ріса $\mathcal{M}^0(G; I, J; P)$ матричного типу з сендвіч-матрицею P над групою з нулем G^0 регулярна тоді і тільки тоді, коли кожний рядок і кожен стовпець матриці P містять ненульовий елемент.*

Лема 2 ([15], лема 3.6)**.** *Дві напівгрупи Ріса $S = \mathcal{M}^0(G; I, J; P)$ та $S' = \mathcal{M}^0(G; I, J; P')$ над однією і тією ж групою з нулем G^0 ізоморфні, якщо існують такі відображення $\iota \to u_\iota$ множини I у G та $\lambda \to v_\lambda$ множини J у G, що $p'_{\lambda\iota} = v_\lambda p_{\lambda\iota} u_\iota$ для всіх $\iota \in I$ та $\lambda \in J$, де $P = (p_{\lambda\iota})$ та $P' = (p'_{\lambda\iota})$.*

Зауважимо, що ізоморфізмом буде відображення $[g]_{kl} \mapsto [u_k g v_l]_{kl}$ і що $P' = VPU$, де V — діагональна $J \times J$-матриця, U — діагональна $I \times I$-матриця.

Наслідок 1 ([15], стор. 132)**.** *Для довільних $i \in I$ та $j \in J$ напівгрупа Ріса $\mathcal{M}^0(G; I, J; P)$ ізоморфна напівгрупі Ріса $\mathcal{M}^0(G; I, J; P')$ з такою сендвіч-матрицею P', в якій в j-му рядку та i-му стовпці трапляються лише нуль та одиниця групи G.*

$I \times J$-матриця U над групою G^0 називається *інвертовною*, якщо кожен рядок і кожен стовпець матриці U містить точно один ненульовий елемент напівгрупи G^0. Якщо $I \times J$-матриця інвертовна, то, очевидно, що $|I| = |J|$. Якщо ω — гомоморфізм групи з нулем G^0 у групу з нулем G_1^0 та $P = (p_{kl})$ — довільна $J \times I$-матриця над G^0, то через $\omega(P)$ позначимо $J \times I$-матрицю $(\omega(p_{kl}))$.

Лема 3 ([15], наслідок 3.12)**.** *Дві регулярні напівгрупи Ріса матричного типу $\mathcal{M}^0(G; I, J; P)$ та $\mathcal{M}^0(G'; I', J'; P')$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли існує ізоморфізм ω, який відображає G на G', та такі інвертовні $I \times I'$-матриця U та $J \times J'$-матриця V, що $\omega(P) = VP'U$.*

Далі вважаємо, що множини I та J є скінченними потужностей n та m, відповідно.

Нам знадобиться таке твердження для $(0,1)$-матриць, тобто матриць, елементами яких є тільки 0 та 1. Через $\mathcal{I}_{m \times n}$ позначимо матрицю порядку $m \times n$, всі елементи якої є одиницями.

Твердження 1. *Нехай P — $(0,1)$-матриця порядку $m \times n$, E_{ij} — матрична одиниця із $M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Перестановками рядків і стовпців матрицю $P \cdot E_{ij} \cdot P$ можна звести до вигляду*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I}_{r\times l} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де r — кількість одиниць у i-му стовпці матриці P, а l — кількість одиниць у j-му рядку матриці P.

Доведення. Нехай $P = (p_{rs})$ і $F = P \cdot E_{ij} \cdot P$. Тоді

$$F = \begin{pmatrix} p_{1i}1_{ij}p_{j1} & \cdots & p_{1i}1_{ij}p_{jk} & \cdots & p_{1i}1_{ij}p_{jn} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ p_{ti}1_{ij}p_{j1} & \cdots & p_{ti}1_{ij}p_{jk} & \cdots & p_{ti}1_{ij}p_{jn} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ p_{mi}1_{ij}p_{j1} & \cdots & p_{mi}1_{ij}p_{jk} & \cdots & p_{mi}1_{ij}p_{jn} \end{pmatrix}.$$

Якщо $p_{ti}1_{ij}p_{jk} = 1$, то $p_{ti} = 1$ та $p_{jk} = 1$. Тоді якщо $p_{ti} = 1$, то у t-му рядку матриці F одиниці будуть стояти тільки на тих місцях tx, для яких $p_{jx} = 1$ (тобто там, де стоять одиниці у j-му рядку матриці P). Аналогічно з рівності $p_{jk} = 1$ випливає, що одиниці у k-му стовпці матриці F стоять на тих місцях yk матриці F, для яких, де $p_{yi} = 1$ (тобто там, де стоять одиниці у i-му стовпці матриці P).

Якщо $p_{ti} = 0$, то t-й рядок матриці F є нульовим. Аналогічно, якщо $p_{jk} = 0$, то k-й стовпець матриці F нульовий.

Отож, місця одиниць у матриці F визначаються місцями одиниць у i-тому стовпці матриці та у j-му рядку матриці P, а загальна кількість одиниць у матриці F дорівнює $r \cdot l$. А якщо на якомусь місці в i-му стовпці матриці та у j-му рядку матриці P стоїть нуль, то нульовим буде весь відповідний рядок або стовпець матриці F. Тому перестановкою рядків і стовпців матрицю F зводимо до вигляду

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I}_{r\times l} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тут $\mathcal{I}_{r\times l}$ — матриця, всі елементи якої є одиницями, r — кількість одиниць у i-му стовпці матриці P, l — кількість одиниць у j-му рядку матриці P. □

3. Варіанти напівгрупи Ріса над групою з нулем

Нехай A_{ij} — фіксований елемент напівгрупи $\mathcal{M}^0(G; n, m; P)$. Очевидно, що варіант $(\mathcal{M}^0(G; n, m; P), *_{A_{ij}})$ теж є напівгрупою Ріса, але з сендвіч-матрицею $P \cdot A_{ij} \cdot P$. З'ясуємо, який вигляд може мати ця сендвіч-матриця.

Твердження 2. *Якщо у матриці $Q = P \cdot A_{ij} \cdot P$ на місці lk стоїть нуль, то нульовим буде або весь k-й стовпець, або весь l-й рядок, або одночасно k-й стовпець та l-й рядок.*

Доведення. Нехай $P = (p_{ij})$. Безпосередньо перевіряється, що

$$Q = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1i} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{ki} & \cdots & p_{kn} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mi} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix} \cdot A_{ij} \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1k} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ p_{j1} & \cdots & p_{jk} & \cdots & p_{jn} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mk} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_{1i}a_{ij}p_{j1} & \cdots & p_{1i}a_{ij}p_{jk} & \cdots & p_{1i}a_{ij}p_{jn} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ p_{li}a_{ij}p_{j1} & \cdots & p_{li}a_{ij}p_{jk} & \cdots & p_{li}a_{ij}p_{jn} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ p_{mi}a_{ij}p_{j1} & \cdots & p_{mi}a_{ij}p_{jk} & \cdots & p_{mi}a_{ij}p_{jn} \end{pmatrix}$$

Нехай $p_{li}a_{ij}p_{jk} = 0$. Це можливо, якщо або $p_{jk} = 0$, або $p_{li} = 0$, або одночасно $p_{jk} = 0$ та $p_{li} = 0$. Якщо $p_{jk} = 0$, то в матриці Q нульовим буде весь k-й стовпець. Якщо $p_{li} = 0$, то в матриці Q нульовим буде весь l-й рядок. Якщо ж одночасно $p_{jk} = 0$ та $p_{li} = 0$, то в матриці Q нульовими будуть k-й стовпець та l-й рядок. □

Твердження 3. *Якщо j-й рядок або i-й стовпець матриці P — нульові, то варіант $(\mathcal{M}^0(G; n, m; P), *_{[a]_{ij}})$ є напівгрупою з нульовим множенням.*

Доведення. Справді, для довільних елементів $[x]_{lk}$ і $[y]_{ht}$

$$[x]_{lk} *_{[a]_{ij}} [y]_{ht} = [x \cdot p_{ki} \cdot a \cdot p_{jh} \cdot y]_{kh} = 0,$$

оскільки принаймні один із множників p_{ki} та p_{jh} є нулем. □

Теорема 1. *Варіант $(\mathcal{M}^0(G; n, m; P), *_{A_{ij}})$ напівгрупи $\mathcal{M}^0(G; n, m; P)$ є регулярним тоді і тільки тоді, коли j-й рядок та i-й стовпець матриці P не містять нулів.*

Доведення. З леми 1 випливає, що варіант $(\mathcal{M}^0(G; n, m; P), *_{A_{ij}})$ є регулярним тоді і тільки тоді, коли матриця $PA_{ij}P$ не містить нульових рядків чи стовпців.

Із твердження 2 випливає таке: коли в матриці $PA_{ij}P$ є нульовий елемент, то ця матриця містить нульовий рядок або нульовий стовпець. А з доведення цього твердження випливає, що нульовий рядок або нульовий стовпець будуть тоді і тільки тоді, коли матриця P містить нуль у j-му рядку або i-му стовпці.

Тому для регулярності варіанта $(\mathcal{M}^0(G; n, m; P), *_{A_{ij}})$ необхідно і достатньо, щоб j-й рядок та i-й стовпець матриці P не містили нулів. □

Лема 4. *Нехай $\varphi : S \to S'$, $\varphi([g]_{ij}) = [\widetilde{u}_{ii} g \widetilde{v}_{jj}]_{ij}$ — ізоморфізм напівгруп Ріса $(S, \cdot) = M^0(G; n, m; P)$ і $(S', \circ) = M^0(G; n, m; P')$. Тоді для довільного елемента $[g]_{ij} \in S$ відображення φ є також ізоморфізмом варіанта $(M^0(G; n, m; P), *_{[a]_{ij}})$ на варіант $(M^0(G; n, m; P'), *_{\varphi([a]_{ij})})$.*

Доведення леми 4 випливає з рівностей

$$\begin{aligned}\varphi([x]_{st} *_{[a]_{ij}} [y]_{lr}) &= \varphi([x]_{st} \circ [a]_{ij} \circ [y]_{lr}) = \\ &= \varphi([x]_{st}) \cdot \varphi([a]_{ij}) \cdot \varphi([y]_{lr}) = \\ &= \varphi([x]_{st}) *_{[\widetilde{a}]_{ij}} \varphi([y]_{lr}).\end{aligned}$$

Теорема 2. *Усі регулярні варіанти напівгрупи Ріса $\mathcal{M}^0(G; n, m; P)$ попарно ізоморфні*

Доведення. Нехай $S_1 = (M^0(G; n, m; P), *_{[a]_{ij}})$ і $S_2 = (M^0(G; n, m; P), *_{[b]_{kl}})$ — два довільні регулярні варіанти напівгрупи Ріса $\mathcal{M}^0(G; n, m; P)$. За лемою 4 існують такі елементи $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in G$ та матриці P', j-й рядок і i-й стовпець якої містять лише нулі й одиниці групи G, і P'' з аналогічними l-м рядком і k-м стовпцем, що

$$(M^0(G; n, m; P), *_{[a]_{ij}}) \simeq (M^0(G; n, m; P'), *_{[\widetilde{a}]_{ij}}),$$
$$(M^0(G; n, m; P), *_{[b]_{kl}}) \simeq (M^0(G; n, m; P''), *_{[\widetilde{b}]_{kl}}).$$

Із регулярності варіантів і теореми 1 випливає, що ці рядки і стовпці насправді містять лише одиниці групи G. Звідси випливає, що сендвіч-матрицею варіанта $(M^0(G; n, m; P'), *_{[\widetilde{a}]_{ij}})$ як напівгрупи Ріса буде матриця $Q' = P' A_{ij}(\widetilde{a}) P'$, всі елементи якої дорівнюють $\widetilde{a}$. Аналогічно сендвіч-матрицею варіанта $(M^0(G; n, m; P''), *_{[\widetilde{b}]_{kl}})$ як напівгрупи Ріса буде матриця $Q'' = P'' A_{kl}(\widetilde{b}) P''$, всі елементи якої дорівнюють $\widetilde{b}$.

Для діагональних матриць $V = \mathrm{diag}(\widetilde{a})$ та $U = \mathrm{diag}(\widetilde{b}^{-1})$ виконується рівність $Q' = VQ''U$. Тому за лемою 3 варіанти

$$(\mathcal{M}^0(G; n, m; P'), *_{[\widetilde{a}]_{ij}}) \qquad \text{та} \qquad (\mathcal{M}^0(G; n, m; P'), *_{[\widetilde{b}]_{kl}})$$

ізоморфні. Звідси випливає, що ізоморфними також є варіанти S_1 та S_2. □

4. Ізоморфність напівгруп Ріса над тривіальною групою з нулем

Далі розглядаються напівгрупи Ріса над тривіальною групою з нулем $G^0 = \{0, 1\}$. Їхніми елементами є матричні одиниці та нульова матриця, а сендвіч-матриці таких напівгруп є $(0, 1)$-матрицями.

Твердження 4. *Якщо $(0, 1)$-матриця P' отримана з матриці P перестановкою двох рядків, то напівгрупи Ріса $\mathcal{M}^0(G; n, m; P)$ та $\mathcal{M}^0(G; n, m; P')$ ізоморфні.*

Доведення. Нехай матриця P' отримана з матриці P перестановкою k-го та l-го рядків:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{l1} & p_{l2} & \dots & p_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{l1} & p_{l2} & \dots & p_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_{11} & p'_{12} & \dots & p'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p'_{k1} & p'_{k2} & \dots & p'_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p'_{l1} & p'_{l2} & \dots & p'_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p'_{m1} & p'_{m2} & \dots & p'_{mn} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо таблиці множення напівгруп $\mathcal{M}^0(G^0; n, m; P)$ і $\mathcal{M}^0(G; n, m; P')$:

P	$\cdots$	$[1]_{1k}$	$\cdots$	$[1]_{1l}$	$\cdots$	$[1]_{ik}$	$\cdots$	$[1]_{il}$	$\cdots$
$[1]_{11}$	$\cdots$	$[p_{11}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{11}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{1i}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{1i}]_{1l}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{1l}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{1l}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{il}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{il}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{il}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{il}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{il}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

P'	$\cdots$	$[1]_{1k}$	$\cdots$	$[1]_{1l}$	$\cdots$	$[1]_{ik}$	$\cdots$	$[1]_{il}$	$\cdots$
$[1]_{11}$	$\cdots$	$[p_{11}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{11}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{1i}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{1i}]_{1l}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{1l}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{1l}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{il}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{il}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{il}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{il}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{il}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Бачимо, якщо у таблиці множення для напівгрупи $\mathcal{M}^0(G; n, m; P)$ для кожного $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ поміняти місцями рядки, що відповідають елементам $[1]_{jk}$ і $[1]_{jl}$, то отримаємо таблицю множення для $\mathcal{M}^0(G; n, m; P')$.

Розглянемо відображення

$$\varphi : \mathcal{M}^0(G; n, m; P) \to \mathcal{M}^0(G; n, m; P'),$$

визначене так: для довільних $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ та $h \neq l, k$ приймемо

$$\varphi([1]_{jk}) = [1]_{jl}, \quad \varphi([1]_{jl}) = [1]_{jk}, \quad \varphi([1]_{jh}) = [1]_{jh}.$$

Доведемо, що φ є ізоморфізмом. Для цього перевіримо, що виконується рівність $\varphi(X \cdot P \cdot Y) = \varphi(X) \cdot P' \cdot \varphi(Y)$ для довільних рісівських матриць $X, Y \in \mathcal{M}^0(G; n, m; P)$. Рівність очевидна, якщо $X = 0$ або $Y = 0$. Тому можна вважати, що $X = [1]_{ij}$, $Y = [1]_{rq}$. Далі розглянемо можливі випадки:

1) якщо $j = q = k$, то

$$\varphi([1]_{ik}\cdot P\cdot[1]_{rk}) = \varphi([p_{kr}]_{ik}) = [p'_{lr}]_{il} = [1]_{il}\cdot P'\cdot[1]_{rl} = \varphi([1]_{ik})\cdot P'\cdot\varphi([1]_{rk});$$

2) якщо $j = k$, $q = l$, то

$$\varphi([1]_{ik}\cdot P\cdot[1]_{rl}) = \varphi([p_{kr}]_{il}) = [p'_{lr}]_{ik} = [1]_{il}\cdot P'\cdot[1]_{rk} = \varphi([1]_{ik})\cdot P'\cdot\varphi([1]_{rl});$$

3) якщо $j = k$, $q \notin \{k, l\}$, то

$$\varphi([1]_{ik}\cdot P\cdot[1]_{rq}) = \varphi([p_{kr}]_{iq}) = [p'_{lr}]_{iq} = [1]_{il}\cdot P'\cdot[1]_{rq} = \varphi([1]_{ik})\cdot P'\cdot\varphi([1]_{rq});$$

4) якщо $j, q \notin \{k, l\}$, то

$$\varphi([1]_{ij}\cdot P\cdot[1]_{rq}) = \varphi([p_{jr}]_{iq}) = [p'_{jr}]_{iq} = [1]_{ij}\cdot P'\cdot[1]_{rq} = \varphi([1]_{ij})\cdot P'\cdot\varphi([1]_{rq}).$$

Випадки $1'$) $j = q = l$; $2'$) $j = l$, $q = k$; $3'$) $j = l$, $q \notin \{k, l\}$; $3''$) $q = k$, $j \notin \{k, l\}$; $3'''$) $q = l$, $j \notin \{k, l\}$ розглядаються аналогічно.

Подивимось, у яку таблицю перейде таблиця множення для напівгрупи $\mathcal{M}^0(G; n, m; P)$, якщо кожен елемент таблиці замінити його образом при відображенні φ. Цей перехід можна розбити на два етапи. На першому етапі для кожного i переставимо місцями рядки, що відповідають елементам $[1]_{ik}$ та $[1]_{il}$, а потім стовпці, які відповідають цим елементам. Отримаємо таблицю:

	$\cdots$	$[1]_{1l}$	$\cdots$	$[1]_{1k}$	$\cdots$	$[1]_{il}$	$\cdots$	$[1]_{ik}$	$\cdots$
$[1]_{11}$	$\cdots$	$[p_{11}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{11}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{1i}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{1i}]_{1k}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{1k}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{1k}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{1l}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{1k}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{il}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{il}$	$\cdots$	$[p_{l1}]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{il}$	$\cdots$	$[p_{li}]_{ik}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[1]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{il}$	$\cdots$	$[p_{k1}]_{ik}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{il}$	$\cdots$	$[p_{ki}]_{ik}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

На другому етапі для кожного елемента таблиці другий індекс k замінимо на l і навпаки, не змінюючи перших індексів та решти других індексів. Безпосередньо перевіряється, що отримана таблиця збігається з таблицею множення для напівгрупи $\mathcal{M}^0(G; n, m; P')$. Тому напівгрупи $\mathcal{M}^0(G; n, m; P)$ та $\mathcal{M}^0(G; n, m; P')$ є ізоморфними. $\square$

Якщо від напівгрупи Ріса $\mathcal{M}^0(G; n, m; P)$ перейти до дуальної напівгрупи $\mathcal{M}^0(G; m, n; P')$, то з твердження 4 одразу випливає дуальне

Твердження 5. *Якщо $(0,1)$-матриця P'' отримана з матриці P перестановкою двох стовпців, то напівгрупи Ріса $\mathcal{M}^0(G; n, m; P)$ та $\mathcal{M}^0(G; n, m; P'')$ ізоморфні.*

Наслідок 2. *Якщо матриця $\widetilde{P}$ отримана з матриці P за допомогою перестановок рядків і стовпців, то напівгрупи Ріса $\mathcal{M}^0(G;n,m;P)$ та $\mathcal{M}^0(G;n,m;\widetilde{P})$ ізоморфні.*

5. Варіанти напівгрупи Ріса над тривіальною групою з нулем

Твердження 6. *Якщо варіант $(\mathcal{M}^0(G;n,m;P),*_{A_{ij}})$ напівгрупи Ріса над тривіальною групою з нулем є регулярним, то він ізоморфний напівгрупі*

$$\mathcal{M}^0(G;n,m;\mathcal{I}_{m\times n}).$$

Доведення. Варіант $(\mathcal{M}^0(G;n,m;P),*_{A_{ij}})$ є напівгрупою Ріса $(\mathcal{M}^0(G;n,m;PA_{ij}P)$. Оскільки варіант $(\mathcal{M}^0(G;n,m;P),*_{A_{ij}})$ регулярний, то за теоремою 1 всі елементи j-го рядка та i-го стовпця матриці P є одиницями. Але тоді з твердження 1 випливає, що $PA_{ij}P=\mathcal{I}_{m\times n}$. □

Теорема 3. *Варіанти $S_1=(\mathcal{M}^0(G;n,m;P),*_{A_{ij}})$ та $S_2=(\mathcal{M}^0(G;n,m;P),*_{A_{lk}})$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли матриці $Q=PA_{ij}P$ та $F=PA_{lk}P$ після викреслення нульових рядків і стовпців збігаються.*

Доведення. Варіанти S_1 і S_1 є напівгрупами Ріса з матрицями Q та F, відповідно. За твердженням 1 перестановками рядків і стовпців матриці Q та F можна звести до вигляду

$$Q'=\begin{pmatrix}\mathcal{I}_{u\times v} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad F'=\begin{pmatrix}\mathcal{I}_{k\times t} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

відповідно. Це означає, що після викреслення з матриць Q та F нульових рядків і стовпців ми одержимо матриці $\mathcal{I}_{u\times v}$ та $\mathcal{I}_{k\times t}$, відповідно. Крім того, за наслідком 2 матимемо

$$\mathcal{M}^0(G;n,m;Q)\simeq\mathcal{M}^0(G;n,m;Q'),\qquad \mathcal{M}^0(G;n,m;F)\simeq\mathcal{M}^0(G;n,m;F').$$

Тому достатньо довести, що напівгрупи $\mathcal{M}^0(G;n,m;Q')$ і $\mathcal{M}^0(G;n,m;F')$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{I}_{u\times v}=\mathcal{I}_{k\times t}$.

Достатність умови очевидна, бо тоді $Q'=F'$.

Для доведення необхідності зауважимо, що в напівгрупі $\mathcal{M}^0(G;n,m;Q')$ добуток $[1]_{rs}\cdot[1]_{xy}=[q'_{sx}]_{ry}$ буде ненульовим тоді і тільки тоді, коли $1\leqslant s\leqslant u$ і $1\leqslant x\leqslant v$. Тому таблиця множення для напівгрупи $\mathcal{M}^0(G;n,m;Q')$ міститиме nu ненульових рядків, у кожному з яких буде mv одиниць. Аналогічно таблиця множення для напівгрупи $\mathcal{M}^0(G;n,m;F')$ буде містити nk ненульових рядків, у кожному з яких буде mt одиниць. Тому з ізоморфності напівгруп $\mathcal{M}^0(G;n,m;Q')$ і $\mathcal{M}^0(G;n,m;F')$ випливає, що $u=k$ і $v=t$. □

Позначимо через r_i кількість одиниць в i-му рядку матриці P, а через s_j — кількість одиниць у j-му стовпці матриці P.

Наслідок 3. *Якщо для матриці P множина $\{r_i : 0\leqslant i\leqslant m\}\setminus\{0\}$ має k елементів, а множина $\{s_j : 0\leqslant j\leqslant n\}\setminus\{0\}$ — l елементів, то напівгрупа Ріса $\mathcal{M}^0(G;n,m;P)$ має точно $k\cdot l+1$ попарно неізоморфних варіантів.*

Доведення. Якщо $r_i \neq 0$ і $s_j \neq 0$, то з твердження 1 та наслідку 2 випливає, що варіант $(\mathcal{M}^0(G;n,m;P), *_{[1]_{ij}})$ ізоморфний напівгрупі Ріса $\mathcal{M}^0(G;n,m;Q)$ із сендвіч-матрицею $Q = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{s_i \times r_j} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. За теоремою 3 різним парам (s_i, r_j) відповідають неізоморфні варіанти, що дає нам $k \cdot l$ попарно неізоморфних варіантів. Жоден із них не є напівгрупою із нульовим множенням. Крім того, маємо ще варіант $(\mathcal{M}^0(G;n,m;P), *_0)$, який є напівгрупою із нульовим множенням. $\square$

Список використаної літератури

1. Е. С. Ляпин, *Полугруппы,* Физматгиз, Москва, 1960.
2. J. B. Hickey, *Semigroups under a sandwich operation*, Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser. **26** (1983), no. 3, 371–382. DOI: 10.1017/S0013091500004442
3. J. B. Hickey. *On variants of a semigroup*, Bull. Austral. Math. Soc. **34** (1986), no. 3, 447–459. DOI: 10.1017/S0004972700010339
4. T. Khan and M. Lawson, *Variants of regular semigroups*, Semigroup Forum **62** (2001), no. 3, 358–374. DOI: 10.1007/s002330010034
5. O. O. Desiateryk, *Variants of commutative bands with zero,* Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka (2015), no. 4, 15–20.
6. I. Dolinka, I. Đurđev, and J. East, *Sandwich semigroups in diagram categories*, Preprint (arXiv:1910.10286).
7. I. Dolinka, I. Đurđev, J. East, P. Honyam, K. Sangkhanan, J. Sanwong, and W. Sommanee, *Sandwich semigroups in locally small categories I: Foundations*, Algebra Univers. **79** (2018), Art. ID 75, pp. 35. DOI: 10.1007/s00012-018-0537-5
8. I. Dolinka, I. Đurđev, J. East, P. Honyam, K. Sangkhanan, J. Sanwong, and W. W. Sommanee, *Sandwich semigroups in locally small categories II: Transformations*, Algebra Univers. **79** (2018), Art. ID 76, pp. 63. DOI: 10.1007/s00012-018-0539-3
9. O. Ganyushkin and V. Mazorchuk, *Classical finite transformation semigroups, an introduction*, **9** of Algebra and Appl., Springer, London, 2009.
10. I. Dolinka and J. East, *Variants of finite full transformation semigroups*, Int. J. Algebra Comput. **25** (2015), no. 8, 1187–1222. DOI: 10.1142/S021819671550037X
11. I. Dolinka and J. East, *Semigroups of rectangular matrices under a sandwich operation*, Semigroup Forum **96** (2018), no. 2, 253–300. DOI: 10.1007/s00233-017-9873-6
12. B. N. Givens, A. Rosin, and K. Linton, *Interassociates of the bicyclic semigroup*, Semigroup Forum **94** (2017), no. 1, 104–122. DOI: 10.1007/s00233-016-9794-9
13. М. Хилинський, *Інтерасоціативності поліциклічного моноїда*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **86** (2018), 77-90. DOI: 10.30970/vmm.2018.86.077-090
14. O. Gutik and K. Maksymyk, *On semitopological interassociates of the bicyclic monoid*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **82** (2016), 98–108.
15. А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп*, Том 1, пер. с англ., Мир, Москва, 1972.

Стаття: надійшла до редколегії 24.09.2019
доопрацьована 23.12.2019
прийнята до друку 03.02.2020

VARIANTS OF THE REES MATRIX SEMIGROUP

Oleksandra DESIATERYK

*International Research and Training Center for Information Technologies and Systems of NAS and MES of Ukraine,
Glushov Ave., 40, 03680, Kyiv, Ukraine
e-mail: sasha.desyaterik@gmail.com*

Let S be a semigroup, and let $a \in S$. Then the *variant* of S with respect to a is the semigroup with underlying set S and multiplication $\circ$ defined by $x \circ y = xay$.
Let S be an arbitrary semigroup, let I and Λ be (index) sets and let $P = (p_{\lambda i})$ be a $(\Lambda \times I)$-matrix over S, i.e. a mapping from the Cartesian product $\Lambda \times I$ into S. The following formula defines an operation on the set $M = I \times S \times \Lambda$:

$$(i, s, \lambda)(j, t, \mu) = (i, sp_{\lambda j}t, \mu).$$

Then M is a semigroup, called a *Rees semigroup of matrix type over S* and denoted by $\mathcal{M}(S; I, \Lambda; P)$. The matrix P is called the *sandwich matrix* of the semigroup $\mathcal{M}(S; I, \Lambda; P)$. If S is a semigroup with zero 0, then $Z = \{(i, 0, \lambda)\colon i \in I, \lambda \in \Lambda\}$ is an ideal in $\mathcal{M}(S; I, \Lambda; P)$ and the Rees quotient semigroup M/Z is denoted by $\mathcal{M}^0(S; I, \Lambda; P)$. In the case when $S = G^0$ is a group G^0 with an adjoined zero, instead of $\mathcal{M}^0(G^0; I, \Lambda; P)$ one writes $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ and calls it a *Rees semi-group of matrix type over the group G^0 with an adjoined zero.*
We obtained necessary and sufficiency conditions for regularity and isomorphism of two variants of the Rees matrix semigroup with a sandwich matrix over a trivial group with zero. In particular we show that variants $S_1 = (\mathcal{M}^0(G; n, m; P), *_{A_{ij}})$ and $S_2 = (\mathcal{M}^0(G; n, m; P), *_{A_{lk}})$ are isomorphic if and only if when the matrices $Q = PA_{ij}P$ and $F = PA_{lk}P$ coincide after deleting of zero-rows and zero-columns.

Key words: variant, sandwich semigroup, Rees semigroup, isomorphism.