ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 88. С. 5–11
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 88. P. 5–11
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.88.005-011

УДК 511.3

SIMULTANEOUS APPROXIMATION OF VALUES OF JACOBI ELLIPTIC FUNCTIONS IN THEIR REAL PERIODS

Yaroslav KHOLYAVKA, Olga MYLYO

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: ya_khol@franko.lviv.ua,
olga.mylyo@gmail.com

Let $\operatorname{sn}_i z$ be algebraically independent Jacobi elliptic functions, $(4K_i, 2iK_i')$ be the main periods and $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ be algebraic moduli of $\operatorname{sn}_i z$ $(i = 1, 2)$. We estimate from below the simultaneous approximation of $\operatorname{sn}_1 4K_2$, $\operatorname{sn}_2 4K_1$.

Key words: simultaneous approximation, Jacobi elliptic function.

1. Introduction

Jacobi's elliptic function $\operatorname{sn} z$ satisfies the equation $(\operatorname{sn}' z)^2 = (1-\operatorname{sn}^2 z)(1-\varkappa^2 \operatorname{sn}^2 z)$ ([1]). The number $\varkappa$ is called the modul $\operatorname{sn} z$, $0 < \varkappa < 1$, the number $\varkappa' = (1-\varkappa^2)^{1/2}$ is called its additional modulus. The pair of main periods of $\operatorname{sn} z$ is $(4K, 2iK')$, where K, K' are the complete elliptic integrals of the first kind that correspond to $\varkappa$, $\varkappa'$ [1].

Denote by $\operatorname{sn}_1 z$, $\operatorname{sn}_2 z$ two algebraically independent Jacobi elliptic functions determined by algebraic $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ respectively, $0 < \varkappa_1 < 1$, $0 < \varkappa_2 < 1$; $(4K_1, 2iK_1')$, $(4K_2, 2iK_2')$ are pairs of their main periods.

We denote by $d(P)$, $L(P)$ the degree and the length of the polynomial P with integers coefficients, by $d(\alpha)$, $L(\alpha)$ the degree and length of the algebraic number α [2]; ξ_i, $i = 1, 2$, algebraic numbers, $n_i = d(\xi_i)$ and $L_i = L(\xi_i)$ their degrees and lengths respectively, $n = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \xi_2)$.

Theorem 1. *Let*

$$T = n\left[\frac{\ln L_1}{n_1} + \frac{\ln L_2}{n_2} + \ln n\right]. \qquad (1)$$

2010 Mathematics Subject Classification: 11J82

If there exists $C > 0$ such that for all $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$, $|k_1|$, $|k_2| < t$, we have

$$|k_1 K_1 + k_2 K_2| > \exp(Ct^3), \tag{2}$$

and at least one of the numbers $\operatorname{sn}_1 4K_2$, $\operatorname{sn}_2 4K_1$ is transcendent, then for arbitrary algebraic numbers ξ_1, ξ_2,

$$\max\{|\operatorname{sn}_1 4K_2 - \xi_1|, |\operatorname{sn}_2 4K_1 - \xi_2|\} > \exp\left(-\Lambda T^2 \ln T\right), \tag{3}$$

where $\Lambda > 0$ is a constant that depends only on $\varkappa_1, \varkappa_2$.

The approximation estimate formulated in Theorem 1 can be used, for example, to study the properties of elliptic Jacobi curves. Similar estimates for other numbers can be found in [3]–[5].

2. Auxiliary statements

We formulate the basic lemmas, which are necessary to prove Theorem 1. Let c_i, for all i, be positive constants, dependent only on $\varkappa_1$ and $\varkappa_2$.

Lemma 1. *For each integer $m \geqslant 1$, there exist polynomials with the integer coefficients $P_{1,m}$ and $Q_{1,m}$ such that*

$$\operatorname{sn} mz = \frac{P_{1,m}(\operatorname{sn} z, \operatorname{sn}' z)}{Q_{1,m}(\varkappa^2, \operatorname{sn} z)},$$

where $L(P_{1,m}), L(Q_{1,m}) \leqslant \exp(c_1 m^2)$, $\deg P_{1,m}$, $\deg Q_{1,m} \leqslant m^2$, $i = 1, 2$.

Lemma 2. *Let $m \in \mathbb{N}$. Then there are polynomials $P_{s,l} \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$ such that*

$$(\operatorname{sn}^l z)^{(s)} = \frac{d^s}{d\, w^s}((\operatorname{sn} z)^l) = P_{s,l}(\varkappa^2, \operatorname{sn} z, \operatorname{sn}' z),$$

$\deg_{x_1} P_{s,l} \leq s + l$, $\deg_{x_2} P_{s,l} \leq s + 2l$, $\deg_{x_3} P_{s,l} \leq 1$, $L(P_{s,l}) \leq \exp(c_2 s \log(s + l))$.

Proofs of Lemma 1 and Lemma 2 are similar to the proof of properties of the function $\wp(z)$ [8].

Lemma 3 ([1]). *If z, w, $z + w$ are different from the poles $\operatorname{sn} z$, then*

$$\operatorname{sn}(z + w) = \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{sn}' w + \operatorname{sn} w \operatorname{sn}' z}{1 - \varkappa^2 \operatorname{sn} z^2 \operatorname{sn} w^2}.$$

Lemma 4 ([6]). *Let α, β be arbitrary algebraic numbers, $\gamma^2 = (1 - \alpha^2)(1 - \alpha^2\beta^2)$. Then*

$$L(\gamma) < \exp\left(6 \deg \mathbb{Q}(\alpha, \beta)\left(\frac{\ln L(\alpha)}{d(\alpha)} + \frac{\ln L(\beta)}{d(\beta)} + 1\right)\right), \quad d(\gamma) \geq \frac{\deg \mathbb{Q}(\alpha, \beta)}{\min(2d(\alpha), 4d(\beta))}.$$

Lemma 5 ([4]). *Let $B, P \in \mathbb{N}$, $Q_{p,b} \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, $0 \leq b < B$, $0 \leq p < P$, $L(Q_{p,b}) \leq L$, $\deg_{x_i} Q_{p,b} \leq \mathcal{N}_i$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ be algebraic numbers, $m = \deg \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. If $P > mB$, then the system of linear equations*

$$\sum_{p=0}^{P-1} x_p Q_{p,b}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0, \quad 0 \leq b < B,$$

has integer rational solutions $A_0, \ldots, A_{P-1}$ such that

$$0 < \max|A_i| < 1 + (LP)^{\frac{mB}{P - mB}} \left(\prod_{i=1}^{n} (1 + \mathcal{N}_i)\left(L(\alpha_i)(1 + d(\alpha_i))\right)^{\frac{\mathcal{N}_i}{d(\alpha_i)}}\right)^{\frac{mB}{P - mB}}.$$

Lemma 6 ([2]). *Let $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ be algebraic numbers, $P \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, $\deg_{x_i} P \le \mathcal{N}_i$, $m = \deg \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. If $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \not\equiv 0$, then*

$$|P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| \ge L(P)^{1-m} \prod_{i=1}^{n} L(\alpha_i)^{\frac{-\mathcal{N}_i m}{d(\alpha_i)}}.$$

Denote by $|f(z)|_D = \sup_{|z| \le D} |f(z)|$.

Lemma 7 ([5]). *The functions $\sigma(z)$ and $\sigma(z-\omega)\,\mathrm{sn}\, z$ are integer and for $M > 1$ estimates*

$$|\sigma(z-\omega)\,\mathrm{sn}\, z|_M, |\sigma(z)|_M \le C_1^{M^2}$$

hold, ω is the corresponding half-life of the Weierstrass function and $\sigma(z)$ be a σ-function of Weierstrass which corresponds to the function $\wp(z)$ associated with $\mathrm{sn}(z)$.

If ε is the distance from the nearest pole of $\mathrm{sn}\, z$ to z_0 and $|z_0| \le M$, then $|\sigma(z_0)| \ge \varepsilon C_2^{-M^2}$, where C_1, C_2 are constants dependent only on $\varkappa$.

Lemma 8 (the Hermite formula, [2]). *Let $f(\zeta)$ be a regular function in the circle Γ of radius R, $a_1, \ldots, a_m \in \Gamma$, $a_i \ne a_j$ if $i \ne j$, $s \in \mathbb{N}_0$. Then for an arbitrary inner point $z \in \Gamma$, other than $a_1, \ldots, a_m$, the equality*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Gamma} \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{z-a_k}{\zeta-a_k}\right)^{s+1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{m} \sum_{\tau=1}^{s} \frac{f^{(\tau)}(a_i)}{\tau!} \oint_{|\zeta-a_i|=\rho_i} \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{z-a_k}{\zeta-a_k}\right)^{s+1} \frac{(\zeta-a_i)^\tau}{\zeta-z} d\zeta$$

holds, where ρ_i is enough small, $\{\zeta : |\zeta - a_i| \le \rho_i\} \subset \Gamma$ and not contain points z i a_k, $k \ne i$.

Lemma 9 ([1], [7]). *Let $P \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$, $P(x_1, x_2) \not\equiv 0$, be a polynomial of degree at most $\mathcal{D}_1$ by x_1 and $\mathcal{D}_2$ by x_2, $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \ge 1$, $\mathrm{sn}_1\, z$, $\mathrm{sn}_2\, z$ be algebraically Jacobi independent elliptic functions. Then the number of zeros $P(\mathrm{sn}_1\, z, \mathrm{sn}_2\, z)$ given with their multiplicities at $|z| < K$ does not exceed $C_3 K^2(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2)$, where C_3 is some constant that is independent of the polynomial.*

3. Proof of Theorem 1

We will prove Theorem 1 using the second Gelfond method described in [2], [3]. Suppose that (1) does not hold, that is, for sufficiently large $\lambda \in \mathbb{N}$,

$$\max\{|\,\mathrm{sn}_1\, 4K_2 - \xi_1|, |\,\mathrm{sn}_2\, 4K_1 - \xi_2|\} < \exp\left(-\lambda^7\, T^2 \ln T\right). \tag{4}$$

Let

$$S = L = \lambda^3 \ln \lambda T,\ N = \lambda\sqrt{\lambda T}, \tag{5}$$

$$F(z) = \sum_{l_1=0}^{L} \sum_{l_2=0}^{L} C_{l_1,l_2}\, \mathrm{sn}_1^{l_1} z\ \mathrm{sn}_2^{l_2} z,\ C_{l_1,l_2} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{l_1,l_2,\tau}\zeta_\tau,\ C_{l_1,l_2,\tau} \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

where ζ_τ are the generic elements of $\mathbb{Q}(\xi_1, \xi_2)$.

Denote by $\varphi_{i,1}(z) = \mathrm{sn}_i(z + \frac{K_i}{2})$, $\varphi_{i,2}(w) = \mathrm{sn}_i(w + \frac{3K_i}{2})$, $i = 1, 2$. Then (Lemma 3)

$$\mathrm{sn}_i(z + w) = \frac{\varphi_{i,1}(z)\varphi'_{i,2}(w) + \varphi_{i,2}(w)\varphi'_{i,1}(z)}{1 - \varkappa_i^2\varphi_{i,1}^2(z)\varphi_{i,2}^2(w)} = \frac{\Lambda_{i,1}(z,w)}{\Lambda_{i,2}(z,w)}.$$

Let

$$G_{i,s,k,l}(\varkappa_i, z) = \frac{d^s}{d\,w^s}(\Lambda_{i,1}^k(z,w)\Lambda_{i,2}^l(z,w))|_{w=0}.$$

The so defined polynomials satisfy $\deg G_{i,s,k,l} \le 4(k+l)$, $\ln L(G_{i,s,k,l}) \le s\ln(s(k+l) + c_3(s+k+l))$.

With (3) just like in [7], [8], we get

$$F^{(s)}(z) = \frac{d^s}{d\,w^s}((\Lambda_{1,2}^{-L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{-L}(z,w))(F(z+w)\Lambda_{1,2}^{L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{L}(z,w)))|_{w=0} =$$
$$= \sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}\frac{d^{s-t}}{d\,w^{s-t}}(\Lambda_{1,2}^{-L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{-L}(z,w))|_{w=0}F_{s,t}(z),$$

where

(7) $$F_{s,t}(z) = \sum_{l_1=0}^{L}\sum_{l_2=0}^{L} C_{l_1,l_2}\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}G_{1,t-i,l_1,L-l_1}(\varkappa_1, z)G_{2,i,l_2,L-l_2}(\varkappa_2, z).$$

Applying Lemma 4 for $\alpha = \xi_1$, $\beta = \varkappa_1$, $\gamma = \xi_3$, we get the estimate $d(\xi_3)$ and $L(\xi_3)$ of the number ξ_3, which approximates $\mathrm{sn}'_1\,4K_2$, and in the case of $\alpha = \xi_2$, $\beta = \varkappa_2$, $\gamma = \xi_4$ we get the estimate $d(\xi_4)$ and $L(\xi_4)$ of the number ξ_4, which approximates $\mathrm{sn}'_2\,4K_1$. Denote by $F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\dots,\xi_4)$ and $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\dots,\xi_4)$ the expressions derived from $F^{(s)}(4n_1K_1 + 4n_2K_2)$ and $F_{s,t}(4n_1TK_1 + 4n_2K_2)$ by replacing $\mathrm{sn}_1\,4K_2$, $\mathrm{sn}_2\,4K_1$, $\mathrm{sn}'_1\,K_2$, $\mathrm{sn}'_2\,K_1$ by $\xi_1,\dots,\xi_4$ respectively and apply Lemma 5 to $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\dots,\xi_4)$. We will consider $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\dots,\xi_4)$ for $1 \le n_1, n_2 \le N$, $0 \le t \le s \le S$ as N^2S linear forms of nL^2 variables $C_{l_1,l_2,\tau}$. Having used Lemmas 1 – 6 and (3)–(7), we choose not all equal to zero $C_{l_1,l_2,\tau}$ such that for $1 \le n_1, n_2 \le N$, $0 \le t \le s \le S$,

(8) $$F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\dots,\xi_4) = 0,$$

(9) $$|C_{l_1,l_2,\tau}| < \exp(c_4\lambda^6\ln\lambda\,T^2\ln T).$$

With (4), (3), (9) and Lemmas 1 – 5 we get for $1 \le n_1, n_2 \le N$, $0 \le s \le S$,

(10) $$|F^{(s)}(4n_1K_1 + 4n_2K_2) - F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\dots,\xi_4)| < \exp(-\frac{1}{4}\lambda^7T^2\ln T).$$

From (8), (10) at $1 \le n_1, n_2 \le N$, $0 \le s \le S$ we get

(11) $$|F^{(s)}(4n_1K_1 + 4n_2K_2)| < \exp(-\frac{1}{4}\lambda^7T^2\ln T).$$

We show that (11) also holds for $1 \le n_1, n_2 \le N$, $0 \le s \le \lambda S$.

Let $\wp_i(u)$ and $\sigma_i(u)$ correspond to the functions $\mathrm{sn}_i\,z$, $i = 1, 2$, $u = z(e_{1,i} - e_{3,i})^{-1/2}$, [1],

$$G(z) = F(z)\sigma_1^L(u + \omega_{3,1})\sigma_2^L(u + \omega_{3,2}),$$

where $\omega_{j,i}$ is the half-period of $\wp_i(u)$. Choose the least possible integer r such that

(12) $$r > 32(N+1)(|K_1| + |K_2| + |K'_1| + |K'_2|).$$

Denote by $R = 48r$. Then with Lemmas 1 – 5, Lemma 8 and (1), (3), (3), (9), (12),

(13) $$|G(z)|_R < \exp(-\lambda^6 \ln \lambda T^2 \ln T).$$

From (13) we get for $0 \le s \le \lambda S$

(14) $$|G^{(s)}(z)|_r < \exp(-\tfrac{1}{2}\lambda^6 \ln \lambda T^2 \ln T).$$

For a sufficiently small ε in the ε-neighborhood of the points $4n_1K_1$ the function $\sigma_2(z-\omega_2)$ and in the ε-neighborhood of the points $4n_2K_2$ the function $\sigma_1(z-\omega_1)$ has no zeros, so from (2) and Lemma 7 for $n_1, n_2 \le 32N$ we obtain

(15) $$|\sigma_i(z-\omega_i)|_{z\in V(\varepsilon, 4n_1K_1+4n_2K_2)} > \exp(-c_5\lambda^5 \ln \lambda T^2).$$

From (13)–(15) for $1 \le n_1, n_2 \le N$, $0 \le s \le \lambda S$ we get

(16) $$|F^{(s)}(4n_1K_1 + 4n_2K_2)| < \exp(-\tfrac{\lambda^6}{3} \ln \lambda T^2 \ln T).$$

Given (10), for $1 \le n_1, n_2 \le N$ and $0 \le s \le \lambda S$, from (16) we obtain

(17) $$|F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \dots, \xi_4)| < \exp(-\tfrac{\lambda^6}{4} \ln \lambda T^2 \ln T).$$

Considering $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \dots, \xi_4)$ as a value of the corresponding polynomial in algebraic points, from lemma 6, (1), (3) we get for $0 \le t \le s \le \lambda S$, $1 \le n_1, n_2 \le N$, $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \dots, \xi_4) \ne 0$, we obtain the estimate

(18) $$|F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \dots, \xi_4)| > \exp(-\lambda^5 \ln \lambda T^2 \ln T).$$

From (3), (18) we get for $0 \le s \le \lambda S$, $1 \le n_1, n_2 \le N$

(19) $$|F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \dots, \xi_4)| > \exp(-2\lambda^5 \ln \lambda T^2 \ln T).$$

Since (17) and (19) are conflicting, we get for $1 \le n_1, n_2 \le N$, $0 \le s \le \lambda S$,

(20) $$F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \dots, \xi_4) = 0.$$

From (20) it follows that the polynomial $F(z)$ has at least $c_6\lambda^7 \ln \lambda T^2$ zeros (with multiplicities). From Lemma 9 we get that the number of zeros may not be more than $c_7\lambda^6 \ln \lambda T^2$, so for sufficiently large λ assumption (4) leads to a contradiction, which proves the theorem.

References

1. D. F. Lawden, *Elliptic functions and applications*, Springer, Berlin, 1989.
2. N. I. Fel'dman, *Hilbert's seventh problem*, Moskov State Univ., Moskov, 1982 (in Russian).
3. N. I. Fel'dman and Yu. V. Nesterenko, *Transcendental numbers*, Springer, Berlin, 1998.
4. E. Reyssat, *Approximation algébrique de nombres lies aux fonctions elliptiques et exponentielle*, Bull. Soc. Math. Fr. **108** (1980), 47–79. DOI: 10.24033/bsmf.1908
5. D. Masser, *Elliptic functions and transcendence*, Springer, Berlin, 1975.
6. Ya. M. Kholyavka, *On the simultaneous approximation of invariants of the elliptic function by algebraic numbers*, Diophantine Analysis, Mosk. Univ. Press, Moscow, 1986, Part 2, 114–121 (in Russian)
7. Ю. В. Нестеренко, *О мере алгебраической независимости значений эллиптической функции*, Изв. РАН. Сер. матем. 59 (1995), no. 4, 155–178; **English version:** Yu. V. Nesterenko, *On a measure of algebraic independence of values of an elliptic function,* Izv. Math. **59** (1995), no. 4, 815–838. DOI: 10.1070/IM1995v059n04ABEH000035

8. G. V. Chudnovsky, *Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points; Elliptic analogue of the Lindemann–Weierschtrass theorem*, Invent. Math. **61** (1980), 267–290. DOI: 10.1007/BF01390068

Стаття: надійшла до редколегії 11.04.2019
прийнята до друку 03.02.2020

СУМІСНІ НАБЛИЖЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЯКОБІ В ЇХНІХ ДІЙСНИХ ПЕРІОДАХ

Ярослав ХОЛЯВКА, Ольга МИЛЬО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mails: ya_khol@franko.lviv.ua,
olga.mylyo@gmail.com

Нехай $\operatorname{sn}_1 z$, $\operatorname{sn}_2 z$ – алгебрично незалежні еліптичні функції Якобі. Позначимо через $\varkappa_1$, $0 < \varkappa_1 < 1$, еліптичний модуль $\operatorname{sn}_1 z$, а через $\varkappa_2$, $0 < \varkappa_2 < 1$, – еліптичний модуль $\operatorname{sn}_2 z$. Будемо припускати, що $\varkappa_1$ та $\varkappa_2$ алгебричні числа. Також позначимо через $(4K_1,\, 2iK_1')$ пару основних періодів $\operatorname{sn}_1 z$, а через через $(4K_2,\, 2iK_2')$ – пару основних періодів $\operatorname{sn}_2 z$, де K_1, K_2, K_1' та K_2' є дійсними числами.
Еліптична функція Якобі $\operatorname{sn}_1 z$ задовольняє рівняння

$$(\operatorname{sn}_1' z)^2 = (1 - \operatorname{sn}_1^2 z)(1 - \varkappa_1^2 \operatorname{sn}_1^2 z),$$

а еліптична функція Якобі $\operatorname{sn}_2 z$ задовольняє рівняння

$$(\operatorname{sn}_2' z)^2 = (1 - \operatorname{sn}_2^2 z)(1 - \varkappa_2^2 \operatorname{sn}_2^2 z).$$

Числа $\varkappa_1' = (1-\varkappa_1^2)^{1/2}$ та $\varkappa_2' = (1-\varkappa_2^2)^{1/2}$ називають додатковими еліптичними модулями еліптичних функцій Якобі $\operatorname{sn}_1 z$ і $\operatorname{sn}_2 z$. Числа K_1, K_2, K_1' та K_2' є повні еліптичні інтеграли першого роду, що відповідають числам $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_1'$ та $\varkappa_2'$. Покладемо $I(v) = \int\limits_0^{\pi/2} (1 - v^2 \sin^2 t)^{-1/2} dt$. Тоді

$$K_1 = I(\varkappa_1),\ K_2 = I(\varkappa_2),\ K_1' = I(\varkappa_1') \text{ та } K_2' = I(\varkappa_2').$$

Число a називають *алгебричним числом*, якщо існує такий многочлен $P(x)$ з цілими коефіцієнтами, що $P(a) = 0$. Многочлен $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ назвемо *основним многочленом* для числа a, якщо він задовольняє такі умови: $P(a) = 0$; старший коефіцієнт $P(x)$ додатний; коефіцієнти $P(x)$ взаємно прості цілі числа; $P(x)$ незвідний над $\mathbb{Q}$. Довжиною $P(x)$ назвемо суму модулів його коефіцієнтів. *Степенем числа a* називають степінь його основного многочлена $P(x)$ і позначають $\deg a$, *довжиною числа a* називають довжину його основного многочлена $P(x)$ і позначають $L(a)$.
Нехай ξ_1, ξ_2 — довільні алгебричні числа, $n_1 = \deg(\xi_1)$, $n_2 = \deg(\xi_2)$,

$L_1 = L(\xi_1)$, $L_2 = L(\xi_2)$ та $n = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \xi_2)$.
У статті отримано оцінку сумісного наближення чисел $\mathrm{sn}_1\, 4K_2$ та $\mathrm{sn}_2\, 4K_1$.

Теорема 1. *Нехай*

$$T = n \left[\frac{\ln L_1}{n_1} + \frac{\ln L_2}{n_2} + \ln n \right.$$

Якщо існує така постійна $C > 0$, *що для всіх* $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$, $|k_1, |k_2| < t$, *справджується*

$$|k_1 K_1 + k_2 K_2| > \exp(Ct^3),$$

та хоча б одне з чисел $\mathrm{sn}_1\, 4K_2$, $\mathrm{sn}_2\, 4K_1$ *є трансцендентним, то для довільних алгебричних чисел* ξ_1, ξ_2, *справджується оцінка*

$$\max\{|\,\mathrm{sn}_1\, 4K_2 - \xi_1|, |\,\mathrm{sn}_2\, 4K_1 - \xi_2|\} > \exp\left(-\Lambda\, T^2 \ln T\right),$$

де $\Lambda > 0$ *є константа, залежна тільки від* $\varkappa_1, \varkappa_2$.

Зауважимо, що числа, кратні K_2, не є полюсами $\mathrm{sn}_1\, z$, а числа, кратні K_1, не є полюсами $\mathrm{sn}_2\, z$.
Оцінки наближень, подібні до отриманої в теоремі 1, можна використовувати для вивчення арифметичних властивостей еліптичних кривих Якобі.
Доведення теореми 1 проводиться за допомогою другого методу Гельфонда. Припускаємо, що для достатньо великого $\lambda \in \mathbb{N}$, виконується

$$\max\{|\,\mathrm{sn}_1\, 4K_2 - \xi_1|, |\,\mathrm{sn}_2\, 4K_1 - \xi_2|\} < \exp\left(-\lambda^7\, T^2 \ln T\right)$$

і покажемо, що це припущення приводить до протиріччя.
При доведенні вибираємо такі значення параметрів

$$S = L = \lambda^3 \ln \lambda T,\ N = \lambda \sqrt{\lambda T},$$

та допоміжну функцію

$$F(z) = \sum_{l_1=0}^{L} \sum_{l_2=0}^{L} C_{l_1,l_2}\, \mathrm{sn}_1^{l_1} z\ \mathrm{sn}_2^{l_2} z,\ C_{l_1,l_2} = \sum_{\tau=1}^{n} C_{l_1,l_2,\tau} \zeta_\tau,\ C_{l_1,l_2,\tau} \in \mathbb{Z},$$

де ζ_τ є твірними елементами $\mathbb{Q}(\xi_1, \xi_2)$.

Ключові слова: сумісні наближення, еліптична функція Якобі.