ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 89. С. 80–88
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 89. P. 80–88
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.89.080-088

УДК 519.217

АСИМПТОТИЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ НОРМУЮЧОГО МНОЖНИКА РІВНЯННЯ ВІДНОВЛЕННЯ

Оксана ЯРОВА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000
e-mail: oksanayarova93@gmail.com

Розглядається рівняння відновлення в нелінійній апроксимації. Мета роботи – знайти нелінійні нормуючі функції.

Ключові слова: рівняння відновлення, нормуючий множник, нелінійна апроксимація.

Розглянемо рівняння відновлення в матричній формі

$$X^{\varepsilon}(t) = A^{\varepsilon}(t) + \int_0^t F^{\varepsilon}(du) X^{\varepsilon}(t-u),$$

де $t \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$, $A^{\varepsilon}(t)$, $X^{\varepsilon}(t)$ — сім'ї відповідно заданих невід'ємних матричнозначних функцій $F^{\varepsilon}(dt)$ — сім'ї заданих невід'ємних матричнозначних мір.

Функцію F^{ε} запишемо в такому вигляді

$$F^{\varepsilon} = F + \delta_1(\varepsilon)B^1 + \delta_2(\varepsilon)B^2 + \ldots + \delta_n(\varepsilon)B^n + o(\delta_n(\varepsilon)),$$

де $B^1, \ldots, B^n$ — матриці, $\delta_1(\varepsilon) \to 0, \ldots, \delta_n(\varepsilon) \to 0$, при $\varepsilon \to 0$.

У працях [1]–[3] функцію $\rho^{(\varepsilon)}$ визначено так

$$\rho^{(\varepsilon)} = \sum_{s=1}^{r} \frac{1 - L^{\varepsilon}_{w_s w_s}}{m_s},$$

де $w_1 \in E_1, \ldots, w_r \in E_r$ — фіксовані індекси,

$$m_s = \frac{p_i^{(s)}}{p_{w_s}^{(s)}} a_{ij}$$

2020 Mathematics Subject Classification: 60J25 і p^s — лівий власний вектор матриці F^s,

$$L_{ij}^{\varepsilon} = F_{ij}^{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{n\in E_k\setminus\{w_k\}} F_{in}(\varepsilon)\cdot L_{nj}(\varepsilon).$$

Виконується слабка збіжність $L^{\varepsilon}(t)$ до $L(t)$, при $\varepsilon \to 0$. Крім того,

$$L_{ij} = L_{ij}(\infty) = 0, \qquad \text{при} \qquad i\in E_s, j\in E_k, s\neq k,$$

$$L_{w_s j} = \frac{p_i^{(s)}}{p_{w_s}^{(s)}}, \quad L_{iw_s} = 1, \quad \forall i,j\in E_s.$$

$$L_{ij} = F_{ij} + \sum_{n\in E_s\setminus\{w_s\}} F_{in}\cdot L_{nj}.$$

Введемо такі позначення

$$\pi_s = \sum_{i,j\in E_s} p_i^{(s)}\cdot a_{ij},$$

$$b_{sk}^m = \sum_{\substack{i\in E_s\\ j\in E_k}} p_i^{(s)}\cdot B_{ij}^m.$$

$$d_{sk}^{nm} = \sum_{\substack{i\in E_s\\ j\in E_k}} p_i^{(s)}\cdot (B^n V B^m)_{ij} = \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{i\in E_s\\ j\in E_k\\ l_1,l_2\in E_l}} p_i^{(s}\cdot B_{il_1}^n V_{l_1 l_2}^{(l)} B_{l_2 j}^m.$$

$V^{(l)}$ — узагальнена обернена матриця до матриці $\left[I - F^l\right]$,

$$V^{(l)}\left(I - F^l\right) = \left(I - F^l\right)V^{(l)} = I - \Pi^{(l)},$$

де $\Pi^{(l)} = \left[\overrightarrow{1}^{(l)} \bigotimes \overrightarrow{p}^{(l)}\right]$ — власний проектор матриці F^l, $V = \mathrm{diag}\{V^{(1)},\dots,V^{(r)}\}$.

Теорема 1. *Нехай μ_s — перший номер, для якого $b_{ss}^{\mu_s}\neq 0$, $s = 1,\dots,r$, $m = \min\{\mu_1,\dots,\mu_r\}$. Якщо існує таке s, для якого $d_{ss}^{11}\neq 0$, $d_{ss}^{22}\neq 0$, то:*

1) *якщо $\delta_1^2(\varepsilon) = o(\delta_m(\varepsilon))$, $\delta_2^2(\varepsilon) = o(\delta_m(\varepsilon))$, то*

$$\rho(\varepsilon) \sim -\delta_m(\varepsilon)\sum_{s=1}^{r}\frac{b_{ss}^m}{\pi_s};$$

2) *якщо $\delta_1^2(\varepsilon) = \alpha\delta_m(\varepsilon)$, $\delta_2^2(\varepsilon) = o(\delta_m(\varepsilon))$, то*

$$\rho(\varepsilon) \sim -\delta_m(\varepsilon)\sum_{s=1}^{r}\frac{b_{ss}^m + \alpha d_{ss}^{11}}{\pi_s};$$

3) *якщо $\delta_1^2(\varepsilon) = \alpha\delta_m(\varepsilon)$, $\delta_2^2(\varepsilon) = \beta\delta_m(\varepsilon)$, то*

$$\rho(\varepsilon) \sim -\delta_m(\varepsilon)\sum_{s=1}^{r}\frac{b_{ss}^m + \alpha d_{ss}^{11} + \beta d_{ss}^{22} + (d_{ss}^{11} + d_{ss}^{22})\sqrt{\alpha\beta}}{\pi_s};$$

4) *якщо* $\delta_m(\varepsilon) = o(\delta_1^2(\varepsilon))$, $\delta_2^2(\varepsilon) = o(\delta_m(\varepsilon))$, *то*

$$\rho(\varepsilon) \sim -\,\delta_1^2(\varepsilon) \sum_{s=1}^{r} \frac{d_{ss}^{11}}{\pi_s};$$

5) *якщо* $\delta_m(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon) \cdot \delta_2(\varepsilon)$, *то*

$$\rho(\varepsilon) \sim -\,\delta_m(\varepsilon) \sum_{s=1}^{r} \frac{b_{ss}^m + d_{ss}^{11} + d_{ss}^{22}}{\pi_s}.$$

Доведення. Розглянемо рівняння

$$L_{ij}^{\varepsilon} = F_{ij}^{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{n \in E_k \setminus \{w_k\}} F_{in}(\varepsilon) \cdot L_{nj}(\varepsilon).$$

Підставимо функцію F^s. У підсумку отримаємо таке співвідношення:

$$L_{iw_s}^{\varepsilon} = \delta_{ms} \cdot F_{iw_s} + \sum_{j \in E_m \setminus \{w_m\}} F_{ij} \cdot L_{jw_s}^{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{n} \delta_k(\varepsilon) B_{iw_s}^k +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \sum_{j \in E_l \setminus \{w_l\}} \delta_k(\varepsilon) B_{ij}^k \cdot L_{jw_s}^{\varepsilon}.$$

Перепишемо в такому вигляді:

$$L_{iw_s}^{\varepsilon} = \delta_{ms} \cdot F_{iw_s} + \sum_{j \in E_m \setminus \{w_m\}} F_{ij} \cdot L_{jw_s}^{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{n} \delta_k(\varepsilon) \sum_{j \in E_s} B_{ij}^k +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \sum_{j \in E_l \setminus \{w_l\}} \delta_k(\varepsilon) B_{ij}^k \cdot \left[L_{jw_s}^{\varepsilon} - L_{jw_s} \right].$$

Домножимо на $p_i^{(m)}$ і підсумуємо по всіх $i \in E_m$.

$$\sum_{i \in E_m} p_i^{(m)} \cdot L_{iw_s}^{\varepsilon} = \delta_{ms} \cdot p_{w_m}^{(m)} + \sum_{j \in E_m \setminus \{w_m\}} p_j^{(m)} \cdot L_{jw_s}^{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{n} \delta_k(\varepsilon) \sum_{i,j \in E_s} p_i^{(m)} B_{ij}^k +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \delta_k(\varepsilon) \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{i \in E_m \\ j \in E_l \setminus \{w_l\}}} p_i^{(m)} \cdot B_{ij}^k \cdot \left[L_{jw_s}^{\varepsilon} - L_{jw_s} \right].$$

Врахувавши, що $L_{w_m,w_s}^{\varepsilon} = \delta_{ms}$, отримаємо

$$L_{w_m,w_s}^{\varepsilon} - \delta_{ms} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{i \in E_m \\ i \in E_s}} \frac{p_i^{(m)} B_{ij}^k}{p_{w_m}^{(m)}} + \sum_{k=1}^{n} \delta_k(\varepsilon) \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{i \in E_m \\ j \in E_l \setminus \{w_l\}}} \frac{p_i^{(m)}}{p_{w_m}^{(m)}} B_{ij}^k \cdot \left[L_{jw_s}^{\varepsilon} - L_{jw_s} \right] =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \delta_k(\varepsilon) \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{i \in E_m \\ j \in E_l \setminus \{w_l\}}} \frac{p_i^{(m)}}{p_{w_m}^{(m)}} B_{ij}^k \left[L_{jw_s}^{\varepsilon} - L_{jw_s} \right].$$

Приймемо $m = s$

$$1 - L^{\varepsilon}_{w_s w_s} = -\sum_{k=1}^{n} \delta_k(\varepsilon) \frac{b^k_{ss}}{p^{(s)}_{w_s}} - \sum_{k=1}^{n} \delta_k(\varepsilon) \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{i \in E_s \\ j \in E_l \setminus \{w_l\}}} \frac{p^{(s)}_i}{p^{(s)}_{w_s}} B^k_{ij} \cdot \left[L^{\varepsilon}_{jw_s} - L_{jw_s}\right].$$

Якщо існує $s \in 1, \ldots, r$, то

$$b^1_{ss} = \sum_{i,j \in E_s} p^{(s)}_i B^1_{ij} \neq 0,$$
$$b^2_{ss} = \sum_{i,j \in E_s} p^{(s)}_i B^2_{ij} \neq 0,$$

та

$$1 - L^{\varepsilon}_{w_s w_s} = -\delta_1(\varepsilon) \frac{b^1_{ss}}{p^{(s)}_{w_s}} - \delta_1(\varepsilon) \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{i \in E_s \\ j \in E_l \setminus \{w_l\}}} \frac{p^{(s)}_i}{p^{(s)}_{w_s}} B^1_{ij} \left[L^{\varepsilon}_{jw_s} - L_{jw_s}\right] -$$
$$- \delta_2(\varepsilon) \frac{b^1_{ss}}{p^{(s)}_{w_s}} - \delta_2(\varepsilon) \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{i \in E_s \\ j \in E_l \setminus \{w_l\}}} \frac{p^{(s)}_i}{p^{(s)}_{w_s}} B^2_{ij} \left[L^{\varepsilon}_{jw_s} - L_{jw_s}\right].$$

Нехай

$$\delta_1(\varepsilon)[L^{\varepsilon}_{jw_s} - L_{jw_s}] = o(\delta_1(\varepsilon)),$$
$$\delta_2(\varepsilon)[L^{\varepsilon}_{jw_s} - L_{jw_s}] = o(\delta_2(\varepsilon)).$$

Тоді

$$1 - L^{\varepsilon}_{w_s w_s} = -\delta_1(\varepsilon) \frac{b^1_{ss}}{p^{(s)}_{w_s}} - \delta_2(\varepsilon) \frac{b^2_{ss}}{p^{(s)}_{w_s}} - o(\delta_1(\varepsilon)) - o(\delta_2(\varepsilon)).$$

Отож,

$$\rho^{\varepsilon} = \sum_{s=1}^{r} \frac{1 - L^{\epsilon}_{w_s w_s}}{m_s} =$$
$$= -\delta_1(\varepsilon) \sum_{s=1}^{r} \frac{b^1_{ss}}{p^{(s)}_{w_s} m_s} - \delta_2(\varepsilon) \sum_{s=1}^{r} \frac{b^2_{ss}}{p^{(s)}_{w_s} m_s} - o(\delta_1(\varepsilon)) =$$
$$= -\delta_1(\varepsilon) \sum_{s=1}^{r} \frac{b^1_{ss}}{\pi_s} - \delta_2(\varepsilon) \sum_{s=1}^{r} \frac{b^2_{ss}}{\pi_s} - o(\delta_1(\varepsilon)).$$

Тому

$$\rho^{\varepsilon} = -\delta_1(\varepsilon) \sum_{s=1}^{r} \frac{b^1_{ss}}{\pi_s} - \delta_2(\varepsilon) \sum_{s=1}^{r} \frac{b^2_{ss}}{\pi_s} - o(\delta_1(\varepsilon)).$$

Далі обчислимо C_{sk}^{ε}

$$\begin{aligned}C_{sk}^{\varepsilon} &= \frac{L_{w_s w_k}^{\varepsilon} - \delta_{sk}}{\rho^{\varepsilon} m_s} = \\ &= -\left[\delta_1(\varepsilon)\frac{b_{sk}^1}{m_s p_{w_s}} + \delta_2(\varepsilon)\frac{b_{sk}^2}{m_s p_{w_s}} + o(\delta_1(\varepsilon))\right] \times \\ &\quad \times \left[\delta_1(\varepsilon)\sum_{s=1}^{r}\frac{b_{ss}^1}{\pi_s} + \delta_2(\varepsilon)\sum_{s=1}^{r}\frac{b_{ss}^2}{\pi_s} + o(\delta_1(\varepsilon))\right]^{-1} = \\ &= -\delta_1(\varepsilon)\left[\frac{b_{sk}^1}{\pi_s} + \frac{\delta_2(\varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)}\frac{b_{sk}^2}{\pi_s} + o(1)\right]\cdot(\delta_1(\varepsilon))^{-1}\cdot\left[\sum_{s=1}^{r}\frac{b_{ss}^1}{\pi_s} + \sum_{s=1}^{r}\frac{b_{ss}^2}{\pi_s} + o(1)\right].\end{aligned}$$

У підсумку, отримуємо

$$C_{sk} = -\frac{b_{sk}^1}{\pi_s}\left[\sum_{s=1}^{r}\frac{b_{sk}^1}{\pi_s}\right]^{-1}.$$

Нехай $\mu_s > 1$ перший номер, для якого $b_{ss}^{\mu_s} \neq 0$. Тоді

$$1 - L_{w_s w_s}^{\varepsilon} = -\delta_{\mu_s}(\varepsilon)\frac{b_{ss}^{\mu_s}}{p_{w_s}^{(s)}} - o(\delta_{\mu_s}(\varepsilon)) - \sum_{k=1}^{n}\delta_k(\varepsilon)\sum_{l=1}^{r}\sum_{\substack{i\in E_s\\ j\in E_l\setminus\{w_l\}}}\frac{p_i^{(s)}}{p_{w_s}^{(s)}}\cdot B_{ij}^k\left[L_{jw_s}^{\varepsilon} - L_{jw_s}\right].$$

Отож,

$$\begin{aligned}L_{iw_s}^{\varepsilon} - L_{iw_s} = &\sum_{j\in E_m\setminus\{w_m\}} F_{ij}\left[L_{jw_s}^{\varepsilon} - L_{jw_s}\right] + \sum_{k=1}^{n}\delta_k(\varepsilon)\sum_{j\in E_k} B_{ij}^k + \\ &+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r}\sum_{j\in E_l\setminus\{m_l\}}\delta_k(\varepsilon) B_{ij}^k\left[L_{iw_s}^{\varepsilon} - L_{iw_s}\right] = \\ = &\sum_{j\in E_m\setminus\{w_m\}} F_{ij}\left[L_{jw_s}^{\varepsilon} - L_{jw_s}\right] + \delta_1(\varepsilon)\sum_{j\in E_s} B_{ij}^1 + \delta_2(\varepsilon)\sum_{j\in E_s} B_{ij}^2 + o(\delta_1(\varepsilon)).\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in E_m\setminus\{w_m\}}(\delta_{ij} - F_{ij})\left[L_{jw_s}^{\varepsilon} - L_{jw_s}\right] = \\ &\qquad = -\delta_{iw_m}\left[L_{w_s w_s}^{\varepsilon} - L_{w_s w_s}\right] + \delta_1(\varepsilon)\sum_{j\in E_s} B_{ij}^1 + \delta_2(\varepsilon)\sum_{j\in E_s} B_{ij}^2 + o(\delta_1(\varepsilon)) = \\ &\qquad = \delta_1(\varepsilon)\sum_{j\in E_s} B_{ij}^1 + \delta_2(\varepsilon)\sum_{j\in E_s} B_{ij}^2 + o(\delta_1(\varepsilon)).\end{aligned}$$

Домножимо обидві частини на $V_{ki}^{(m)}$, $k \in E_m$ і підсумуємо по всіх $i \in E_m$.

$$\sum_{j\in E_m\setminus\{w_m\}} \left(\delta_{kj} - p_j^{(m)}\right)\left[L^{\varepsilon}_{jw_s} - L_{jw_s}\right] =$$
$$= \delta_1(\varepsilon) \sum_{\substack{i\in E_m\\ j\in E_s}} V_{ki}^{(m)} B^1_{ij} + \delta_2(\varepsilon) \sum_{\substack{i\in E_m\\ j\in E_s}} V_{ki}^{(m)} B^2_{ij} + o(\delta_1(\varepsilon)).$$

Приймемо $k = w_m$. Тоді

$$\sum_{j\in E_m\setminus\{w_m\}} p_j^{(m)}\left[L^{\varepsilon}_{jw_s} - L_{jw_s}\right] =$$
$$= -\delta_1(\varepsilon) \sum_{\substack{i\in E_m\\ j\in E_s}} V_{w_m}^{(m)} B^1_{ij} - \delta_2(\varepsilon) \sum_{\substack{i\in E_m\\ j\in E_s}} V_{w_m}^{(m)} B^2_{ij} - o(\delta_1(\varepsilon)),$$

$$L^{\varepsilon}_{kw_s} - L_{kw_s} = \sum_{j\in E_m\setminus w_m} p_j^{(m)}\left[L^{\varepsilon}_{jw_s} - L_{jw_s}\right] + \delta_1(\varepsilon) \sum_{\substack{i\in E_m\\ j\in E_s}} V_{ki}^{(m)} B^1_{ij} +$$
$$+ \delta_2(\varepsilon) \sum_{\substack{i\in E_m\\ j\in E_s}} V_{ki}^{(m)} B^2_{ij} + o(\delta_1(\varepsilon)) =$$
$$= \delta_1(\varepsilon) \sum_{\substack{i\in E_m\\ j\in E_s}} \left[V_{ki}^{(m)} B^1_{ij} - V_{w_m i}^{(m)} B^1_{ij}\right] +$$
$$+ \delta_2(\varepsilon) \sum_{\substack{i\in E_m\\ j\in E_s}} \left[V_{ki}^{(m)} B^2_{ij} - V_{w_m i}^{(m)} B^2_{ij}\right] + o(\delta_1(\varepsilon)) =$$
$$= \delta_1(\varepsilon) \sum_{j\in E_s} \left[(V^{(m)}B^1)_{kj} - (V^{(m)}B^1)_{w_m j}\right] +$$
$$+ \delta_2(\varepsilon) \sum_{j\in E_s} \left[(V^{(m)}B^2)_{kj} - (V^{(m)}B^2)_{w_m j}\right] + o(\delta_1(\varepsilon)).$$

Враховуючи те, що

$$b^1_{sl} = \sum_{\substack{i\in E_s\\ j\in E_l}} p_i^{(s)} B^1_{ij} = 0,$$
$$b^2_{sl} = \sum_{\substack{i\in E_s\\ j\in E_l}} p_i^{(s)} B^2_{ij} = 0,$$

отримаємо

$$\sum_{\substack{i\in E_m\\ j\in E_l\setminus\{w_l\}}} p_i^{(m)} B^1_{ij}\left[L^{\varepsilon}_{jw_s} - L_{jw_s}\right] + \sum_{\substack{i\in E_m\\ j\in E_l\setminus\{w_l\}}} p_i^{(m)} B^2_{ij}\left[L^{\varepsilon}_{jw_s} - L_{jw_s}\right] =$$

$$= \delta_1(\varepsilon) \sum_{\substack{i\in E_m \\ k\in E_s \\ j\in E_l\setminus\{w_l\}}} p_i^{(m)} B_{ij}^1 \left[(V^{(l)}B^1)_{jk} - (V^{(l)}B^1)_{w_l k}\right] +$$

$$+ \delta_2(\varepsilon) \sum_{\substack{i\in E_m \\ k\in E_s \\ j\in E_l\setminus\{w_l\}}} p_i^{(m)} B_{ij}^2 \left[(V^{(l)}B^1)_{jk} - (V^{(l)}B^2)_{w_l k}\right] + o(\delta_1(\varepsilon)) =$$

$$= \delta_1(\varepsilon) \sum_{\substack{i\in E_m \\ k\in E_s}} p_i^{(m)} (B^1 V^{(l)} B^1)_{ik} + \delta_2(\varepsilon) \sum_{\substack{i\in E_m \\ k\in E_s}} p_i^{(m)} (B^2 V^{(l)} B^2)_{ik} + o(\delta_1(\varepsilon)).$$

Тоді

$$L^{\varepsilon}_{w_s w_k} - \delta_{sk} = \delta_{\mu_s}(\varepsilon)\frac{b_{sk}^{\mu_k}}{p_{w_s}^{(s)}} + o(\delta_{\mu_s}(\varepsilon)) + \delta_1^2(\varepsilon)\frac{d_{sk}^{11}}{p_{w_s}^{(s)}} + \delta_2^2(\varepsilon)\frac{d_{sk}^{22}}{p_{w_s}^{(s)}} +$$

$$+ \delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon)\left(\frac{d_{sk}^{11}}{p_{w_s}^{(s)}} + \frac{d_{sk}^{22}}{p_{w_s}^{(s)}}\right) + o(\delta_1^2(\varepsilon)) + o(\delta_2^2(\varepsilon)).$$

Отож, отримуємо

$$\rho_s^{\varepsilon} = -\delta_{\mu_s}(\varepsilon)\frac{b_{ss}^{\mu_s}}{\pi_s} - {}_1^2(\varepsilon)\frac{d_{ss}^{11}}{\pi_s} - \delta_2^2(\varepsilon)\frac{d_{ss}^{22}}{\pi_s} - \delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon)\left(\frac{d_{ss}^{11}}{\pi_s} + \frac{d_{ss}^{22}}{\pi_s}\right) + o(\delta_1^2(\varepsilon)) + o(\delta_2^2(\varepsilon)).$$

Приймемо $m = \min \mu_1, \ldots, \mu_r$.

Нехай існує s таке, що $d_{ss}^{11} \neq 0$ і $d_{ss}^{11} \neq 0$. Тоді

$$\rho^{\varepsilon} = -\sum_{s=1}^{r}\left(\delta_m(\varepsilon)\frac{b_{ss}^m}{\pi_s} + \delta_1^2\frac{d_{ss}^{11}}{\pi_s} + \delta_2^2\frac{d_{ss}^{22}}{\pi_s} + \delta_1(\varepsilon)\delta_2(\varepsilon)\frac{d_{ss}^{11}+d_{ss}^{22}}{\pi_s}\right) + o(\delta_1^2(\varepsilon)) + o(\delta_2^2(\varepsilon)).$$

Розглянемо такі випадки.

1. Якщо $\delta_1^2(\varepsilon) = o(\delta_m(\varepsilon))$, $\delta_2^2(\varepsilon) = o(\delta_m(\varepsilon))$, то

$$\rho(\varepsilon) \sim -\delta_m(\varepsilon)\sum_{s=1}^{r}\frac{b_{ss}^m}{\pi_s}.$$

2. Якщо $\delta_1^2(\varepsilon) = \alpha\delta_m(\varepsilon)$, $\delta_2^2(\varepsilon) = o(\delta_m(\varepsilon))$, то

$$\rho(\varepsilon) \sim -\delta_m(\varepsilon)\sum_{s=1}^{r}\frac{b_{ss}^m + \alpha d_{ss}^{11}}{\pi_s}.$$

3. Якщо $\delta_1^2(\varepsilon) = \alpha\delta_m(\varepsilon)$, $\delta_2^2(\varepsilon) = \beta\delta_m(\varepsilon)$, то

$$\rho(\varepsilon) \sim -\delta_m(\varepsilon)\sum_{s=1}^{r}\frac{b_{ss}^m + \alpha d_{ss}^{11} + \beta d_{ss}^{22} + (d_{ss}^{11} + d_{ss}^{22})\sqrt{\alpha\beta}}{\pi_s}.$$

4. Якщо $\delta_m(\varepsilon) = o(\delta_1^2(\varepsilon))$, $\delta_2^2(\varepsilon) = o(\delta_m(\varepsilon))$, то

$$\rho(\varepsilon) \sim -\delta_1^2(\varepsilon)\sum_{s=1}^{r}\frac{d_{ss}^{11}}{\pi_s}.$$

5. Якщо $\delta_m(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon) \cdot \delta_2(\varepsilon)$, то

$$\rho(\varepsilon) \sim -\delta_m(\varepsilon) \sum_{s=1}^{r} \frac{b_{ss}^m + d_{ss}^{11} + d_{ss}^{22}}{\pi_s}.$$

Теорему доведено. □

Отримані результати дають змогу розглянути проблему великих відхилень у нелінійній апроксимації. В [4]–[7] випадкові процеси та марковські випадкові еволюції розглядаються з нормуючими множниками ε та ε^2. Новизна цієї праці полягає у знаходженні нелінійних нормуючих множників.

Список використаної літератури

1. Я. І. Єлейко, І. І. Ніщенко, *Гранична теорема для матричозначної випадкової еволюції*, Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **53** (1999), 102–106.
2. Я. І. Єлейко, І. І. Ніщенко, *Про існування малого параметра для напівмарковського процесу*, Мат. методи фіз.-мех. поля **41** (1998), no. 4, 95–98.
3. Я. І. Єлейко, В. М. Шуренков, *Про асимптотичне зображення перронового кореня матричнозначної стохастичної еволюції*, Укр. мат. журн. **48** (1996), no. 1, 35–43; **English version:** Ya. I. Eleiko and V. M. Shurenkov, *Asymptotic representation of the perron root of a matrix-valued stochastic evolution*, Ukr. Math. J. **48** (1996), no. 1, 38–47. DOI: 10.1007/BF02390981
4. В. С. Королюк, *Марковские случайные эволюции с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии*, Доп. НАН України (2010), no. 6, 22–26.
5. В. С. Королюк, А. Ф. Турбин, *Полумарковские процессы и их приложения*, Київ, Наукова думка, 1976. 184 с.
6. В. С. Королюк, *Проблема великих відхилень для марковських випадкових еволюцій з незалежними приростами у схемі асимптотично малої дифузії*, Укр. мат. журн. **62** (2010), no. 5, 643–650. **English version:** V. S. Korolyuk, *Problem of large deviations for Markov random evolutions with independent increments in the scheme of asymptotically small diffusion*, Ukr. Math. J. **62** (2010), no. 5, 739–747. DOI: 10.1007/s11253-010-0384-9
7. А. В. Свищук, *Решение мартингальной проблемы для полумарковских случайных эволюций*, Институт математики АН УССР, Киев, 1990, С. 102–111.

Стаття: надійшла до редколегії 04.04.2020
доопрацьована 01.09.2020
прийнята до друку 23.12.2020

ASYMPTOTIC REPRESENTATION OF THE NORMALIZATION FACTOR FOR RENEWAL EQUATION

Oksana YAROVA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: oksanayarova93@gmail.com

The renewal equation in nonlinear approximation is considered. The purpose of the work is to find nonlinear normalization functions.

Key words: renewal equation, normalization factor, nonlinear approximation.