ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 87. С. 82–108
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 87. P. 82–108
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.87.082-108

УДК 517.928.2 : 517.927

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ЖОРСТКОЇ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ГЕОМЕТРИЧНОМУ ГРАФІ

Геннадій ГРАБЧАК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, м. Львів
e-mail: hrabchak_1999@yahoo.com

Досліджено асимптотичну поведінку власних значень і власних функцій жорсткої спектральної задачі для оператора Лапласа на геометричному графі. В механічній інтерпретації задача моделює власні коливання мережеподібної системи натягнутих струн, що складається з двох частин з різко контрастними властивостями жорсткості, але за лінійних густин одного порядку. Побудовано головні члени асимптотик власних значень і власних функцій задачі. Обґрунтування асимптотичних наближень опирається на факт рівномірної резольвентної збіжності деякої сім'ї необмежених самоспряжених операторів до оператора граничної задачі.

Ключові слова: геометричний граф, диференціальні рівняння на графах, сингулярні збурення, жорстка задача, спектр, власні значення, асимптотика, рівномірна резольвентна збіжність.

Жорсткі (*stiff*) задачі належать до класу задач математичної теорії сильно неоднорідних пружних середовищ, в яких коефіцієнти біля старших похідних за просторовими змінними в диференціальному виразі мають суттєво різний порядок на різних частинах області задання [1]. В механічних системах ці коефіцієнти описують жорсткість матеріалу. Малим безрозмірним параметром є відношення коефіцієнтів жорсткості менш жорсткої і більш жорсткої компонент середовища, тоді як їхня густина одного порядку. Здобутки теорії зумовлені розвитком сучасних технологій: виробництвом нових матеріалів з наперед заданими властивостями (композити), складною геометричною конфігурацією досліджуваних систем тощо. Вони ґрунтуються на досягненнях теорій сингулярних збурень і усереднення, представлених насамперед методами теорії операторів і широким спектром асимптотичних методів (див. [1]–[6] з бібл.).

2010 Mathematics Subject Classification: 47A75, 34B45, 34E15, 74K05

Геометричні графи моделюють конфігурацію фізичних і технічних мережеподібних конструкцій: пружних струнних сіток, мереж хвилеводів, електричних і гідравлічних мереж, складних молекул, мезоскопічних систем, фотонних кристалів, нейронів тощо. Процеси в таких системах зазвичай описують диференціальними рівняннями на цих графах. Це сприяло розвитку теорії крайових задач для диференціальних рівнянь на геометричних графах і особливо, завдяки застосуванням у квантовій фізиці, спектральної теорії та обернених спектральних задач (див. [7]–[13] з бібл.). Задачі на графах виникають і як граничні в асимптотичних дослідженнях моделей в трубчастих структурах малого радіуса, що моделюють наноструктури [13], чи в багатовимірних тонких областях, що стягуються до графів [14].

Сингулярно збурені спектральні задачі на графах, які моделюють власні коливання струнних сіток із локальним збуренням густини в околах незакріплених вузлів, розглядали в [15]–[16]. В [17] досліджено задачу про власні коливання пружної сітки зі збуренням густини нелокального характеру. Виокремлемо працю [18], в якій виконано асимптотичний аналіз розв'язків мішаної задачі на зірковому графі для гіперболічного рівняння другого порядку з малим параметром біля старших похідних за просторовою змінною. Проте різкої межі між задачами зі збуренням густини та зі збуренням жорсткості звісно ж немає. Адекватні моделі враховують обидва види цих збурень за різних співвідношень їхньої сили, ще й можливу складну геометрію областей [6].

В праці досліджено асимптотичні властивості спектра і власних підпросторів жорсткої задачі для оператора Лапласа на геометричному графі. Вона моделює власні коливання пружної струнної сітки, що складається з двох частин із суттєво різними характеристиками жорсткості. Вивчається асимптотика, коли малий параметр прямує до нуля, власних значень і власних функцій з фіксованими номерами – низькочастотна; існують ще високочастотні форми власних коливань, пов'язані з явищем резонансу [19, 20]. Граничною задачею є спектральна задача на підграфі, яка відповідає менш жорсткій компоненті. Спектральний параметр входить у рівняння і крайові умови. Наведено її операторне формулювання. Для обґрунтування асимптотичних наближень, застосовуючи вироблені в [21] підходи, вихідну задачу зведено до задачі на тому ж підграфі, на якому одержано граничну. Їй в операторному формулюванні відповідає деяка сім'я необмежених самоспряжених операторів, що збігається в сенсі рівномірної резольвентної збіжності до оператора граничної задачі. Використовуючи цей факт і результати теорії збурень операторів, обґрунтовано асимптотичні наближення та з'ясовано апроксимаційні оцінки для власних значень і власних підпросторів.

1. **Деякі поняття теорії диференціальних рівнянь на графах**

Нехай $G = G(V, E)$ – скінченний геометричний граф в $\mathbb{R}^3$; V – множина його вершин, E – ребер. Інколи позначатимемо їх через $V(G)$ і $E(G)$. Ребра є гладкими неперетинними кривими з натуральною параметризацією. Припускаємо наявність кратних ребер і петель. Вершини, які з'єднує ребро g, назвемо *інцидентними* цьому ребру; відповідно g інцидентне згаданим вершинам. Множину ребер, інцидентних вершині a, позначимо через $I(a)$. Кількість таких ребер називається *степенем*, чи *валентністю*, $\deg(a)$ вершини a; у цьому випадку ребро-петлю враховують двічі.

Функцією на графі називатимемо відображення $f\colon G \to \mathbb{R}$, де G трактуємо як підмножину в $\mathbb{R}^3$; f_g – *звуження* f *на ребро* g. Функція f *є неперервною на графі*, якщо вона неперервна на кожному ребрі і в кожній вершині. *Неперервність* f *у вершині* a означає, що $\lim\limits_{g \ni x \to a} f_g(x) = f(a)$ для всіх $g \in I(a)$.

Нехай $C(G)$ – простір неперервних на графі G функцій. Уведемо простір

$$C^n(G) = \{f \in C(G)\colon f_g \in C^n(\overline{g}),\ g \in E\};$$

може бути $n = \infty$. Диференціювання на ребрі g виконуємо за натуральним параметром цієї кривої: $f'(x) = \dfrac{d}{ds} f(\vartheta_g(s))|_{\vartheta_g(s)=x}$, $x \in g$, де ізометрія $\vartheta_g\colon [0,\ L_g] \to \overline{g}$ задає натуральну параметризацію ребра g довжини L_g. Для вершини a під $\frac{df}{dg}(a)$ розуміємо *граничне значення похідної звуження* f_g *на прилеглому до вершини* a *кінці ребра* g*, взятої в напрямі від вершини.* Через $C\{G\}$ позначимо простір функцій, визначених на G і рівномірно неперервних на ребрах, але не обов'язково неперервних у вершинах; $C^n\{G\} = \{f \in C\{G\}\colon f_g \in C^n(\overline{g}),\ g \in E\}$, $1 \leqslant n \leqslant \infty$.

Під *інтегралом на графі* від функції f розуміємо суму $\int\limits_G f\,dG = \sum\limits_{g \in E} \int\limits_g f\,dg$.

Нехай $L \equiv \dfrac{d^2}{dx^2} + \nu\varrho$, де $\nu \in \mathbb{R}$, $\varrho \in C\{G\}$. Для кожної пари функцій u, v з класу $C^2(\Gamma)$ справджується формула

$$\int\limits_G Lu\,v\,dG = \sum_{a \in V}\Big(u(a)\sum_{g \in I(a)}\frac{dv}{dg}(a) - v(a)\sum_{g \in I(a)}\frac{du}{dg}(a)\Big) + \int\limits_G u\,Lv\,dG \tag{1.1}$$

– аналог формули Гріна на графі.

Нехай $L_2(G)$ – простір Лебега зі скалярним добутком $(u,v)_{L_2(G)} = \int\limits_G u\overline{v}\,dG$ і нормою $\|u\|_{L_2(G)} = (u,u)^{1/2}_{L_2(\Gamma)}$. Ваговий з вагою r простір Лебега позначимо через $L_2(r,G)$. Введемо простір Соболєва

$$W_2^k(G) = \left\{f \in C(G)\colon f_g \in W_2^k(g) \text{ для всіх } g \in E\right\}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

із скалярним добутком $(u,v)_{W_2^k(G)} = \sum\limits_{i=0}^{k}(u^{(i)}, v^{(i)})_{L_2(G)}$ та породженою ним нормою $\|u\|_{W_2^k(G)} = (u,u)^{1/2}_{W_2^k(G)}$. Нехай $V_* \subset V$. Через $W_2^k(G, V_*)$, $k \in \mathbb{N}$, позначимо підпростір простору $W_2^k(G)$, що складається з функцій, які набувають нульових значень у вершинах з V_*.

Нехай $P \in C^1\{G\}$, $Q \in C\{G\}$. *Крайовою задачею* для диференціального рівняння другого порядку $(Pu')' + Qu = f$ на графі G називаємо сукупність диференціальних рівнянь $(P_g u_g')' + Q_g u_g = f_g$ на ребрах $g \in E$ графа і деяких умов у його вершинах. Дотримуючись [5], розіб'ємо множину V вершин графа на дві неперетинні підмножини ∂G і J. У точках з множини ∂G, яку назвемо *межею* графа G, значення розв'язку u вважаємо відомими: $u(a) = \varphi(a)$ для всіх $a \in \partial G$. У вершинах з J, назвемо їх *внутрішніми*, вимагаємо, щоб функція u була неперервною

$$u_{g_1}(a) = u_{g_2}(a) = \cdots = u_{g_\varkappa}(a),$$

де $g_1,\ldots,g_\varkappa$ – ребра, інцидентні вершині a, $\varkappa = \deg(a)$, і щоб виконувалася умова

$$\mathcal{K}_{P,a}(u) + q(a)u(a) = 0,$$

де

$$\mathcal{K}_{P,a}(u) = \sum_{g\in I(a)} P_g(a)\frac{du}{dg}(a), \qquad a \in J. \tag{1.2}$$

Якщо $P \equiv 1$ на ребрах графа, то замість $\mathcal{K}_{P,a}(u)$ писатимемо $\mathcal{K}_a(u)$. Якщо внутрішню вершину оснащено індексом, наприклад a_j, то замість $\mathcal{K}_{a_j}(u)$ вживатимемо позначення $\mathcal{K}_j(u)$. За $q(a) = 0$ маємо у фізичних моделях, описаних крайовими задачами на графах, класичну умову Кірхгофа балансу струмів, теплових потоків, сил натягу тощо (її ще називають умовою *трансмісії*). Доданок $q(a)u(a)$ у цих моделях означає наявність зосередженого у вершині a фактора – точкового заряду, точкового джерела тепла, концентрованої маси і т. п. Зауважимо, що поділ вершин на граничні та внутрішні визначено типом заданих у них крайових умов, а не топологією графа [5]. Розв'язок u крайової задачі шукаємо в класі $C^2(G)$. Надалі, формулюючи крайові задачі, опускатимемо умови неперервності у внутрішніх вершинах, бо вони входять в означення просторів $C^2(G)$ і $W_2^1(G)$.

2. Формулювання збуреної задачі. Гранична задача

Геометричними моделями мережеподібних фізичних систем є асоційовані з ними геометричні графи. Розглянемо систему натягнутих струн, що утворюють пружну сітку, дві частини якої мають суттєво різні властивості жорсткості. Її моделює зв'язний скінченний геометричний граф Γ в $\mathbb{R}^3$, який є об'єднанням двох графів Γ_1 і Γ_2: перший відповідає більш жорсткій, другий – менш жорсткій компонентам системи. Нехай спільними точками Γ_1 і Γ_2 є підмножина $J_0 = \{a_0, a_1, \ldots, a_r\}$ внутрішніх вершин графа Γ. Вважаємо, що сітку закріплено в деяких вузлах її менш жорсткої частини, тобто $\partial\Gamma \subset V(\Gamma_2) \setminus J_0$ і $\partial\Gamma \neq \varnothing$. Решта вузлів сітки є вільними, їм відповідає сукупність J внутрішніх вершин графа Γ. Звісно, $J_0 \subset J$ і множину J можна записати у вигляді об'єднання трьох неперетинних множин $J = J_0 \cup J_1 \cup J_2$, де $J_k \subset V(\Gamma_k) \setminus J_0$, $k = 1, 2$. Якщо $a \in J_0$, то $I(a) = I_1(a) \cup I_2(a)$, де $I_k(a) \subset E(\Gamma_k)$, $k = 1, 2$. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що Γ_1 – зв'язний граф. Через χ_k позначимо характеристичну функцію множини, яка є об'єднанням ребер графа Γ_k, $k = 1, 2$.

Вивчатимемо асимптотику спектра крайової задачі

$$\left(\kappa_\varepsilon u_\varepsilon'\right)' + \lambda^\varepsilon \rho u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{2.1}$$

$$\mathcal{K}_{\kappa_\varepsilon,a}(u_\varepsilon) = 0, \quad a \in J, \qquad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Gamma, \tag{2.2}$$

де $\kappa_\varepsilon = \chi_1 + \varepsilon\chi_2$; ρ – функція з $C^\infty\{\Gamma\}$, яка є додатною на ребрах і набуває нульових значень у всіх вершинах, тобто вона моделює густину маси сітки за відсутності концентрованих у вузлах мас; ε – малий параметр; λ^ε – спектральний параметр; u_ε – власна функція класу $C^2(\Gamma)$; функціонал $\mathcal{K}_{\kappa_\varepsilon,a}$ визначено в (1.2).

Задача (2.1)–(2.2) для будь-якого $\varepsilon > 0$ є стандартною спектральною задачею, тобто, для будь-якого $\varepsilon > 0$ вона має дискретний спектр

$$\lambda_1^\varepsilon < \lambda_2^\varepsilon \leqslant \lambda_3^\varepsilon \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k^\varepsilon \leqslant \cdots,$$

який складається з додатних власних значень скінченної кратності, і повну ортонормовану в $L_2(\rho,\Gamma)$ систему $\{u_{\varepsilon,k}\}_{k=1}^{\infty}$ власних функцій (див., напр. [15]). Зауважимо, що перше власне значення є простим ([7, теорема 5.2, с. 90]).

Враховуючи мінімаксні властивості для власних значень, неважко переконатися, що всі власні значення задачі (2.1)–(2.2) є неперервними безмежно малими функціями параметра $\varepsilon \in (0;1)$, для яких справджуються нерівності

$$C_1\varepsilon \leqslant \lambda_k^\varepsilon \leqslant C_2(k)\varepsilon, \quad k=1,2,\dots, \tag{2.3}$$

де додатні сталі C_1 і C_2 не залежать від ε (детальніше див. [21]).

Нехай q і p – звуження функції ρ, а v_ε і w_ε – звуження власних функцій u_ε задачі (2.1)–(2.2) на Γ_1 і Γ_2, відповідно. Зазначимо, що вершини з J_0 є спільними для Γ_1 та Γ_2, тому $\mathcal{K}_a(v_\varepsilon)=\sum\limits_{\gamma\in I_1(a)}\dfrac{dv_\varepsilon}{g\gamma}(a)$ і $\mathcal{K}_a(w_\varepsilon)=\sum\limits_{\gamma\in I_2(a)}\dfrac{dw_\varepsilon}{g\gamma}(a)$ для $a\in J_0$. Враховуючи сказане, рівняння на ребрах графів Γ_1 і Γ_2 та умови трансмісії у внутрішніх вершинах, за винятком точок з J_0, набувають вигляду

$$v_\varepsilon''+\lambda^\varepsilon q v_\varepsilon=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \qquad \mathcal{K}_a(v_\varepsilon)=0, \quad a\in J_1, \tag{2.4}$$

$$\varepsilon w_\varepsilon''+\lambda^\varepsilon p w_\varepsilon=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \qquad \mathcal{K}_a(w_\varepsilon)=0, \quad a\in J_2; \tag{2.5}$$

умови закріплення в точках межі $\partial\Gamma$:

$$w_\varepsilon=0 \quad \text{на} \quad \partial\Gamma; \tag{2.6}$$

умови трансмісії у вершинах перетину графів Γ_1 і Γ_2:

$$\mathcal{K}_a(v_\varepsilon)+\varepsilon\mathcal{K}_a(w_\varepsilon)=0, \quad a\in J_0; \tag{2.7}$$

крім того, справджуються умови неперервності u_ε у внутрішніх вершинах Γ, зокрема для будь-якої спільної вершини $a\in J_0$ графів Γ_1 і Γ_2 можемо записати $u_\varepsilon|_{\Gamma_1}(a)=u_\varepsilon|_{\Gamma_2}(a)$, або ж

$$v_\varepsilon(a)=w_\varepsilon(a), \qquad a\in J_0. \tag{2.8}$$

Асимптотичне наближення власного значення задачі (2.1)–(2.2), зважаючи на (2.3), виберемо у вигляді $\lambda^\varepsilon \sim \varepsilon\mu+o(\varepsilon)$. Для відповідної власної функції нехай $v_\varepsilon \sim v+v_1\varepsilon+o(\varepsilon)$ на Γ_1 і $w_\varepsilon \sim w+o(1)$ на Γ_2. Підставивши ці зображення у (2.4)-(2.8), одержимо співвідношення

$$v''=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \qquad \mathcal{K}_a(v)=0, \quad a\in J_1, \tag{2.9}$$

$$w''+\mu p w=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \qquad \mathcal{K}_a(w)=0, \quad a\in J_2, \quad w=0 \quad \text{на} \quad \partial\Gamma, \tag{2.10}$$

$$\mathcal{K}_a(v)=0, \qquad a\in J_0, \tag{2.11}$$

$$w(a)=v(a), \qquad a\in J_0, \tag{2.12}$$

та

$$v_1''+\mu q v=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{2.13}$$

$$\mathcal{K}_a(v_1)=0, \quad a\in J_1, \qquad \mathcal{K}_a(v_1)=-\mathcal{K}_a(w), \qquad a\in J_0. \tag{2.14}$$

Об'єднавши (2.9) і (2.11), одержимо задачу Неймана

$$v'' = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \qquad \mathcal{K}_a(v) = 0, \quad a \in J_0 \cup J_1, \tag{2.15}$$

яка має нетривіальне ядро вимірності 1, що складається зі сталих на Γ_1 функцій. У цій задачі всі вершини $V(\Gamma_1)$ є внутрішніми, а $\partial\Gamma_1 = \varnothing$.

За третьою теоремою Фредгольма (див. [22, теорема 3, с. 98]) розв'язок задачі (2.13)–(2.14) існує за умови сумісності

$$\sum_{a\in J_0} \mathcal{K}_a(w) + \mu M w(a_0) = 0, \qquad w(a_0) = w(a_1) = \cdots = w(a_r),$$

де $M = \int_{\Gamma_1} q\,dx$ – маса жорсткої компоненти Γ_1 механічної системи Γ. Об'єднавши ці рівності з (2.10), одержимо спектральну задачу, яку назвемо *граничною*

$$w'' + \mu p\, w = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \qquad w = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Gamma (= \partial\Gamma_2), \tag{2.16}$$

$$\sum_{a\in J_0} \mathcal{K}_a(w) + \mu M w(a_0) = 0, \qquad \mathcal{K}_a(w) = 0, \quad a \in J_2, \tag{2.17}$$

$$w(a_0) = w(a_1) = \cdots = w(a_r). \tag{2.18}$$

Завдяки (2.18) вершини $a_0, a_1, \ldots, a_r$ графа Γ_2 можна ототожнити з однією внутрішньою вершиною b. Тоді перша умова (2.17) набуде вигляду $\mathcal{K}_b(w) + \mu M w(b) = 0$, тобто, задача моделює власні коливання струнної сітки з концентрованою масою величини M у вузлі b. Таку задачу досліджено в [15] для більш загального випадку, коли концентровані маси наявні в кожній внутрішній вершині графа. *Її спектр є дійсним, додатним і дискретним з точкою згущення в нескінченності. Всі власні значення мають скінченну кратність.*

Далі ми доведемо, що для власних значень λ_k^ε збуреної задачі (2.1)–(2.2) величини $\varepsilon^{-1}\lambda_k^\varepsilon$ збігаються при $\varepsilon \to 0$ і фіксованому $k \in \mathbb{N}$ до власних значень μ_k граничної та доведемо теореми збіжності для відповідних власних підпросторів.

3. Операторне формулювання збуреної та граничної задач

Вихідна задача (2.1)–(2.2) еквівалентна операторному рівнянню

$$\mathscr{L}_\varepsilon u_\varepsilon - \lambda^\varepsilon u_\varepsilon = 0, \qquad u_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathscr{L}_\varepsilon),$$

в $L_2(\rho, \Gamma)$, де $\mathscr{L}_\varepsilon$ – самоспряжений оператор з дією

$$\mathscr{L}_\varepsilon u = -\frac{1}{\rho_\gamma}\,(\kappa_{\varepsilon,\gamma} u'_\gamma)' \quad \text{на } \gamma \in E$$

і областю визначення

$$\mathscr{D}(\mathscr{L}_\varepsilon) = \left\{u \in W_2^2(\Gamma, \partial\Gamma)\colon \mathcal{K}_{\kappa_\varepsilon, a}(u) = 0, \quad a \in J\right\}.$$

Для операторного формулювання граничної задачі (2.16)–(2.18) застосуємо підхід, запропонований в [23] для задач із входженням спектрального параметра в крайову умову, як от (2.17). У гільбертовому просторі $\mathscr{H} = L_2(p, \Gamma_2) \times \mathbb{C}$ із скалярним добутком

$$(\hat w, \hat w)_{\mathscr{H}} = \int_{\Gamma_2} p\,|w|^2\, d\Gamma_2 + M|c|^2, \qquad \hat w = (w, c) \in \mathscr{H}, \tag{3.1}$$

розглянемо оператор $\mathscr{T}$, який парі $(w;c)\in\mathscr{H}$ ставить у відповідність пару

$$\Big(-\frac{1}{p}\,w'';\ -\frac{1}{M}\sum_{a\in J_0}\mathcal{K}_a(w)\Big)\in\mathscr{H}$$

і має область визначення

$$\mathscr{D}(\mathscr{T})=\big\{(w;c)\in\mathscr{H}\colon\ w\in W_2^2(\Gamma_2,\partial\Gamma_2);\ \mathcal{K}_a(w)=0,\ a\in J_2;\ c=w(a),\ a\in J_0\big\}.$$

Тоді гранична задача еквівалентна операторному рівнянню

$$\mathscr{T}\hat{w}-\mu\hat{w}=0,\qquad \hat{w}=(w,c)\in\mathscr{D}(\mathscr{T}).$$

Лема 1. *Оператор $\mathscr{T}$ самоспряжений і має компактну резольвенту.*

Доведення. Побудуємо спряжений оператор $\mathscr{T}^*$ і доведемо, що $\mathscr{T}^*=\mathscr{T}$. Для довільних $\hat{w}=(w,w(a_0))\in\mathscr{D}(\mathscr{T})$ і $\hat{v}=(v,c)\in W_2^2\{\Gamma_2\}\times\mathbb{C}$ маємо

$$(\mathscr{T}\hat{w},\hat{v})_{\mathscr{H}}=-\int\limits_{\Gamma_2}w''\overline{v}\,d\Gamma_2-\sum_{a\in J_0}\mathcal{K}_a(w)\cdot\overline{c}=-\int\limits_{\Gamma_2}w\overline{v''}\,d\Gamma_2+$$
$$+\sum_{a\in V(\Gamma_2)}\sum_{\gamma\in I(a)}\left(\frac{dw}{d\gamma}(a)\overline{v_\gamma(a)}-w_\gamma(a)\overline{\frac{dv}{d\gamma}(a)}\right)-\sum_{a\in J_0}\sum_{\gamma\in I(a)}\frac{dw}{d\gamma}(a)\cdot\overline{c}.$$

Тут застосовано формулу (1.1) і явно зазначено дію функціонала $\mathcal{K}_a$ (див. (1.2)). Розбивши першу подвійну суму на частини відповідно до зображення $V(\Gamma_2)=\partial\Gamma\cup J_0\cup J_2$, врахувавши неперервність функції w на Γ_2, причому $w=0$ на $\partial\Gamma$ і $w(a)=w(a_0)$ у вершинах $a\in J_0$, та згрупувавши доданки, праву частину останньої рівності можна записати у вигляді

$$-\int\limits_{\Gamma_2}w\overline{v''}\,d\Gamma_2-w(a_0)\sum_{a\in J_0}\overline{\mathcal{K}_a(v)}+$$
$$+\sum_{a\in\partial\Gamma}\sum_{\gamma\in I(a)}\frac{dw}{d\gamma}(a)\overline{v_\gamma(a)}+\sum_{a\in J_0}\sum_{\gamma\in I(a)}\frac{dw}{d\gamma}(a)\big(\overline{v_\gamma(a)-c}\big)-$$
$$-\sum_{a\in J_2}w(a)\overline{\mathcal{K}_a(v)}+\sum_{a\in J_2}\sum_{\gamma\in I(a)}\frac{dw}{d\gamma}(a)\overline{v_\gamma(a)}.$$

З'ясуємо найслабші умови на $\hat{v}$, за яких кожна з чотирьох сум в останніх двох рядках виразу дорівнює нулеві для будь-яких $\hat{w}\in\mathscr{D}(\mathscr{T})$. Перша з них є нулем тоді, коли v неперервна у вершинах з $\partial\Gamma$ з нульовим значенням у них; друга – коли v неперервна в точках $a\in J_0$ і в кожній з них набуває однакового значення c; третя – коли $\mathcal{K}_a(v)=0$ за $a\in J_2$. Перетворимо четверту суму. З умови $\sum\limits_{k=1}^{\operatorname{ind}(a)}\dfrac{dw}{d\gamma_j}(a)=0$, $a\in J_2$, матимемо $\frac{dw}{d\gamma_1}(a)=-\sum\limits_{k=2}^{\operatorname{ind}(a)}\dfrac{dw}{d\gamma_k}(a)$ і тоді

$$\sum_{a\in J_2}\sum_{\gamma\in I(a)}\frac{dw}{d\gamma}(a)\overline{v_\gamma(a)}=\sum_{a\in J_2}\sum_{k=2}^{\operatorname{ind}(a)}\frac{dw}{d\gamma_k}(a)\overline{\big(v_{\gamma_k}(a)-v_{\gamma_1}(a)\big)}.$$

Ця сума дорівнює нулеві для будь-яких $\hat{w} \in \mathscr{D}(\mathscr{T})$ за умови неперервності v у вершинах з J_2.

Всі з'ясовані вище умови для v і c характеризують область визначення $\mathscr{D}(\mathscr{T}^*)$ оператора $\mathscr{T}^*$. Вони ж визначають і $\mathscr{D}(\mathscr{T})$, тобто $\mathscr{D}(\mathscr{T}^*) = \mathscr{D}(\mathscr{T})$ і

$$(\mathscr{T}\hat{w}, \hat{v})_{\mathscr{H}} = -\int\limits_{\Gamma_2} w\overline{v''}\, d\Gamma_2 - w(a_0) \sum_{a \in J_0} \overline{\mathcal{K}_a(v)} = (\hat{w}, \mathscr{T}\hat{v})_{\mathscr{H}},$$

для будь-яких $\hat{w} \in \mathscr{D}(\mathscr{T})$ і $\hat{v} \in \mathscr{D}(\mathscr{T}^*)$. Отже, $\mathscr{T}^* = \mathscr{T}$.

Резольвента оператора $\mathscr{T}$ є обмеженим оператором, визначеним на $\mathscr{H} = L_2(p, \Gamma_2) \times \mathbb{C}$ з множиною значень $\mathscr{D}(\mathscr{T})$, елементи якої утворюють підпростір в $W_2^2(\Gamma_2, \partial\Gamma_2) \times \mathbb{C}$. Її компактність тоді випливає з компактності вкладення $W_2^2(\Gamma_2, \partial\Gamma_2)$ в $L_2(\Gamma_2)$, і, як наслідок, – $W_2^2(\Gamma_2, \partial\Gamma_2) \times \mathbb{C}$ в $\mathscr{H}$. □

Для доведення близькості спектрів операторів $\mathscr{L}_\varepsilon$ і $\mathscr{T}$ на заваді стоїть те, що ці оператори діють у різних функціональних просторах. Для усунення цієї перешкоди зведемо вихідну задачу (2.1)–(2.2) (чи (2.4)–(2.8)) до спектральної задачі на підграфі Γ_2, якій відповідатиме сім'я операторів, що, як і $\mathscr{T}$, діятимуть у просторі $\mathscr{H}$ і яку ми поставимо у відповідність вихідній задачі.

3.1. **Допоміжна задача. Оператор типу Діріхле-Неймана.** Для функцій v з $C^\infty(\Gamma_k)$, $k \in \{1; 2\}$, загалом комплекснозначних, уведемо вектори вимірності r

$$\mathcal{V} = (v(a_1), \ldots, v(a_r)), \qquad \mathcal{K}(v) = (\mathcal{K}_1(v), \ldots, \mathcal{K}_r(v)).$$

На підграфі Γ_1 розглянемо задачу

$$z'' + \nu q z = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{K}_a(z) = 0, \quad a \in J_1, \tag{3.3}$$

$$z(a_0) = b_0, \qquad \mathcal{K}(z) = b, \tag{3.4}$$

де $\nu \in \mathbb{R}$, $b_0 \in \mathbb{C}$, $b = (b_1, \ldots, b_r) \in \mathbb{C}^r$. Нехай θ – найменше власне значення відповідної однорідної задачі і $0 < \theta_0 < \theta$. Будемо вважати, що $0 \leqslant \nu \leqslant \theta_0$. Тоді задача (3.2)–(3.4) має єдиний розв'язок класу $C^\infty(\Gamma_1)$, що задовольняє апріорну оцінку $\|z\|_{L_2(q,\Gamma_1)} \leqslant C|\tilde{b}|$, де $\tilde{b} = (b_0, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r \cong \mathbb{C}^{1+r}$.

Нехай $\mathfrak{Z}_\nu$ – множина розв'язків $z(\cdot; b_0, b, \nu)$ рівняння (3.2), що задовольняють умови (3.3). Вони утворюють лінійний простір над полем комплексних чисел вимірності $|J_0| = 1 + r$. Стандартний ермітовий добуток в $\mathbb{C}^k$ позначатимемо через $\langle \cdot, \cdot \rangle$, вимірність k простору буде зрозумілою з контексту. В нас вона буде r або $1 + r$.

На $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^r$ розглянемо лінійний оператор $\Lambda(\nu)$, який для кожного розв'язку $z \in \mathfrak{Z}_\nu$ рівняння (3.2) набору його даних $(b_0, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r$ з (3.4) – даних Діріхле у вершині a_0 і даних Кірхгофа (аналог даних Неймана) у решті вершин з J_0 – ставить у відповідність дані Кірхгофа у точці a_0 і дані Діріхле, взяті з протилежним знаком, в інших вершинах з J_0 цього ж розв'язку. Тобто, пару $(b_0, b) = (z(a_0), \mathcal{K}(z))$ цей оператор переводить у пару

$$\big(\mathcal{K}_0(z_\nu(\cdot; b_0, b, \nu)), \ \ -\mathcal{Z}(b_0, b, \nu)\big).$$

Оператор $\Lambda(\nu)$, який діє на декартовому добутку $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^r$, нам буде доцільно представити у вигляді матричного оператора

$$\Lambda(\nu)=\begin{pmatrix}\Lambda_{11}(\nu) & \Lambda_{12}(\nu)\\ \Lambda_{21}(\nu) & \Lambda_{22}(\nu)\end{pmatrix}.$$

Зауваживши, що для кожного $(b_0,b)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^r$ розв'язок задачі (3.2)–(3.4) можна записати у вигляді $z(\cdot;b_0,b,\nu)=z(\cdot;b_0,\mathbf{0},\nu)+z(\cdot;0,b,\nu)$, причому $z(a_0;b_0,b,\nu)=z(a_0;b_0,\mathbf{0},\nu)$, $\mathcal{K}(z(\cdot;b_0,b,\nu))=\mathcal{K}(z(\cdot;0,b,\nu))$, маємо

$$\begin{aligned}
&\Lambda_{11}(\nu)\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}, && \Lambda_{11}(\nu)b_0=\mathcal{K}_0(z(\cdot;b_0,\mathbf{0},\nu));\\
&\Lambda_{12}(\nu)\colon\mathbb{C}^r\to\mathbb{C}, && \Lambda_{12}(\nu)b=\mathcal{K}_0(z(\cdot;0,b,\nu));\\
&\Lambda_{21}(\nu)\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}^r, && \Lambda_{21}(\nu)b_0=-\mathcal{Z}(b_0,\mathbf{0},\nu);\\
&\Lambda_{22}(\nu)\colon\mathbb{C}^r\to\mathbb{C}^r, && \Lambda_{22}(\nu)b=-\mathcal{Z}(0,b,\nu).
\end{aligned}\tag{3.5}$$

Неважко переконатися, що *оператор* $\Lambda(\nu)$ *самоспряжений.* Через те оператори $\Lambda_{12}(\nu)$ і $\Lambda_{21}(\nu)$ взаємно спряжені, а $\Lambda_{22}(\nu)$ – самоспряжений.

Лема 2. *Для будь-яких* ν_1, ν_2 *з відрізка* $[0;\,\theta_0]$ *справджуються нерівності*

$$\|\Lambda(\nu_1)-\Lambda(\nu_2)\|\leqslant C|\nu_1-\nu_2|,\qquad \|\nu_1^{-1}\Lambda_{11}(\nu_1)-\nu_2^{-1}\Lambda_{11}(\nu_2)\|\leqslant C|\nu_1-\nu_2|,\tag{3.6}$$

де сталі C *не залежать від* ν_1, ν_2.

Доведення. Нехай $\tilde{b}=(b_0,b)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^r$. Тоді для функцій $z_1(\cdot;b_0,b,\nu_1)\in\mathfrak{Z}_{\nu_1}$ і $z_2(\cdot;b_0,b,\nu_2)\in\mathfrak{Z}_{\nu_2}$, використовуючи (1.1) і означення оператора $\Lambda(\nu)$, матимемо

$$\begin{aligned}
0&=\int\limits_{\Gamma_1}(z_1''+\nu_1 q z_1)\overline{z_2}\,d\Gamma_1=\Big(-\mathcal{K}_0(z_1)\overline{b_0}+\sum_{j=1}^r z_1(a_j)\overline{b_j}\Big)+\\
&+\Big(b_0\overline{\mathcal{K}_0(z_2)}-\sum_{j=1}^r b_j\overline{z_2(a_j)}\Big)+(\nu_1-\nu_2)\int\limits_{\Gamma_1}qz_1\cdot\overline{z_2}\,d\Gamma_1=\\
&=-\big\langle(\Lambda(\nu_1)-\Lambda(\nu_2))\tilde{b},\ \tilde{b}\big\rangle+(\nu_1-\nu_2)\big(z_1,\ z_2\big)_{L_2(q,\Gamma_1)}.
\end{aligned}$$

Звідси та з апріорної оцінки $\|z\|_{L_2(q,\Gamma_1)}\leqslant C|\tilde{b}|$ розв'язків задачі (3.2)–(3.4)

$$\big|\big\langle(\Lambda(\nu_1)-\Lambda(\nu_2))\tilde{b},\ \tilde{b}\big\rangle\big|\leqslant|\nu_1-\nu_2|\,\|z_1\|_{L_2(q,\Gamma_1)}\,\|z_2\|_{L_2(q,\Gamma_1)}\leqslant C|\nu_1-\nu_2|\,|\tilde{b}|^2,$$

звідки випливає перша нерівність (3.6).

Щоб довести другу нерівність (3.6), візьмемо $\tilde{b}=(b_0,\mathbf{0})$. Тоді

$$0=\int\limits_{\Gamma_1}(z_1''+\nu_1 q z_1)\,d\Gamma_1=-\mathcal{K}_0(z_1)+\nu_1\int\limits_{\Gamma_1}qz_1\,d\Gamma_1,$$

звідки, оскільки $\mathcal{K}_0(z_1)=\Lambda_{11}(\nu_1)b_0$, отримаємо $\nu_1^{-1}\Lambda_{11}(\nu_1)b_0=\int_{\Gamma_1}qz_1\,d\Gamma_1$. Від цієї рівності віднімемо аналогічну для функції z_2

$$(\nu_1^{-1}\Lambda_{11}(\nu_1)-\nu_2^{-1}\Lambda_{11}(\nu_2))b_0=\int\limits_{\Gamma_1}q(z_1-z_2)\,d\Gamma_1.\tag{3.7}$$

Різниця $\tilde{z} = z_1 - z_2$ задовольняє рівняння $\tilde{z}'' + \nu_1 q\tilde{z} = -(\nu_1 - \nu_2)qz_2$ на ребрах і однорідні умови (3.3)–(3.4) у вершинах графа Γ_1. Тоді

$$\tilde{z} = z_1 - z_2 = (\nu_1 - \nu_2)R_{\nu_1}z_2,$$

де R_{ν_1} – резольвента в точці $\nu = \nu_1$ оператора задачі (3.2)–(3.4) з $b = \mathbf{0}$. Звідси

$$\|z_1 - z_2\|_{L_2(q,\Gamma_1)} \leqslant |\nu_1 - \nu_2|\,\|R_{\nu_1}\|\,\|z_2\|_{L_2(q,\Gamma_1)} \leqslant C|\nu_1 - \nu_2||b_0|,$$

що з (3.7) дає другу оцінку (3.6) зі сталою C, не залежною від $\nu_1, \nu_2 \in [0;\ \theta_0]$. □

Наслідок 1. *Для* $\nu \in (0;\ \theta_0]$ *справджується нерівність*

$$\|\nu^{-1}\Lambda_{11}(\nu) - M\mathrm{I}_{\mathbb{C}}\| \leqslant C\nu, \tag{3.8}$$

де $\mathrm{I}_{\mathbb{C}}$ *– тотожний оператор в* $\mathbb{C}$, $M = \int_{\Gamma_1} q\,d\Gamma_1$.

Нерівність випливає з того, що $\nu^{-1}\Lambda_{11}(\nu)b_0 = \int_{\Gamma_1} qz(x; b_0, \mathbf{0}, \nu)\,d\Gamma_1$, а розв'язок z задачі (3.2)–(3.4) з $b = \mathbf{0}$ і $\nu < \theta_0$ має вигляд $z = b_0 + \nu R_\nu b_0$.

Лема 3. *Граничним при* $\nu \to 0$ *для оператора* $\Lambda(\nu)$ *є оператор*

$$\Lambda(0) = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \Lambda_{12}(0) \\ \Lambda_{21}(0) & \Lambda_{22}(0) \end{pmatrix},$$

де $\Lambda_{ij}(0)$ *діють в тих просторах, що й відповідні оператори* $\Lambda_{ij}(\nu)$, *і*

$$\begin{aligned} &\Lambda_{12}(0)b = -\sum_{j=1}^{r} b_j, \quad b \in \mathbb{C}^r, \\ &\Lambda_{21}(0)b_0 = -b_0 e, \qquad b_0 \in \mathbb{C}, \quad e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{C}^r, \\ &\Lambda_{22}(0)b = -\mathcal{Z}(0, b, 0) = -(z_0(a_1; 0, b, 0), \ldots, z_0(a_r; 0, b, 0)), \end{aligned} \tag{3.9}$$

де $z(\cdot; 0, b, 0)$ *– розв'язок задачі* (3.2)–(3.4) *з* $\nu = 0$ *і* $b_0 = 0$.

Доведення. Те, що $\lim_{\nu\to 0} \Lambda_{11}(\nu) = \Lambda_{11}(0) = \mathbb{O}$, випливає з (3.8). Для будь-якого $(b_0, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r$ розв'язок $z(\cdot; b_0, b, \nu)$ задачі (3.2)–(3.4) неперервно залежить від параметра ν і рівномірно в нормі $C^2(\Gamma_1)$, тобто, в $C^2(\overline{\gamma})$ для всіх $\gamma \in E(\Gamma_1)$, збігається при $\nu \to 0$ до кусково-лінійної функції (лінійної на кожному ребрі в його натуральній параметризації) $z(\cdot; b_0, b, 0) = b_0 + z(\cdot; 0, b, 0)$ на Γ_1. Зважаючи на це, друга і третя рівності (3.9), зокрема й знову те, що $\Lambda_{11}(0) = \mathbb{O}$, є результатом граничного переходу при $\nu \to 0$ у відповідних рівностях (3.5). Перша рівність (3.9) є наслідком граничного при $\nu \to 0$ переходу в співвідношенні

$$b_0 \cdot \overline{\Lambda_{12}(\nu)b} = \langle \Lambda_{21}(\nu)b_0, b \rangle$$

($\Lambda_{12}(\nu)$ і $\Lambda_{21}(\nu)$ взаємно спряжені) з використанням другої рівності (3.9). □

3.2. **Редукція вихідної задачі до задачі на** Γ_2**.** Згідно з (2.3) всі власні значення задачі (2.4)–(2.8) є порядку ε, тому зробимо в рівняннях (2.4), (2.5) заміну спектрального параметра $\lambda^\varepsilon = \varepsilon\mu^\varepsilon$, після чого розіб'ємо сукупність рівностей (2.4)–(2.8) на дві групи:

$$v_\varepsilon'' + \varepsilon\mu^\varepsilon q v_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{3.10}$$

$$\mathcal{K}_a(v_\varepsilon) = 0, \quad a \in J_1, \tag{3.11}$$

$$v_\varepsilon(a_0) = w_\varepsilon(a_0), \tag{3.12}$$

$$\mathcal{K}(v_\varepsilon) = -\varepsilon\mathcal{K}(w_\varepsilon). \tag{3.13}$$

та

$$w_\varepsilon'' + \mu^\varepsilon p\, w_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \qquad w_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Gamma, \tag{3.14}$$

$$\mathcal{K}_a(w_\varepsilon) = 0, \quad a \in J_2, \tag{3.15}$$

$$-\varepsilon\mathcal{K}_0(w_\varepsilon) = \mathcal{K}_0(v_\varepsilon), \tag{3.16}$$

$$\mathcal{W}_\varepsilon = \mathcal{V}_\varepsilon \tag{3.17}$$

Нехай

$$\mathscr{E} = \{(\varepsilon, \nu) \in (0;1) \times \mathbb{R} \colon \varepsilon\nu \leqslant \theta_0 < \theta\}, \tag{3.18}$$

де, нагадаємо, θ – найменше власне значення однорідної задачі (3.2)–(3.4). Якщо вважати праві частини (3.12)–(3.13) відомими, то (3.10)–(3.13) є задачею вигляду (3.2)–(3.4), яка, за умови $(\varepsilon, \mu^\varepsilon) \in \mathscr{E}$, має єдиний розв'язок $v_\varepsilon(\cdot; \varepsilon\mu^\varepsilon)$.

Трактуючи ліві та праві частини умов (3.12)–(3.13) як вектори з $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$, подіємо на них оператором $\Lambda(\varepsilon\mu^\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0(v_\varepsilon) &= \Lambda_{11}(\varepsilon\mu^\varepsilon) w_\varepsilon(a_0) - \varepsilon\Lambda_{12}(\varepsilon\mu^\varepsilon)\mathcal{K}(w_\varepsilon), \\ -\mathcal{V}_\varepsilon &= \Lambda_{21}(\varepsilon\mu^\varepsilon) w_\varepsilon(a_0) - \varepsilon\Lambda_{22}(\varepsilon\mu^\varepsilon)\mathcal{K}(w_\varepsilon). \end{aligned}$$

Використавши ці вирази для $\mathcal{K}_0(v_\varepsilon)$ і $\mathcal{V}_\varepsilon$ в (3.16)–(3.17), запишемо (3.14)–(3.17) у вигляді

$$\begin{aligned} &w_\varepsilon'' + \mu^\varepsilon p\, w_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \qquad w_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Gamma, \\ &\mathcal{K}_a(w_\varepsilon) = 0, \quad a \in J_2, \\ &\mathcal{K}_0(w_\varepsilon) - \Lambda_{12}(\varepsilon\mu^\varepsilon)\mathcal{K}(w_\varepsilon) + \varepsilon^{-1}\Lambda_{11}(\varepsilon\mu^\varepsilon) w_\varepsilon(a_0) = 0, \\ &\mathcal{W}_\varepsilon = -\Lambda_{21}(\varepsilon\mu^\varepsilon) w_\varepsilon(a_0) + \varepsilon\Lambda_{22}(\varepsilon\mu^\varepsilon)\mathcal{K}(w_\varepsilon). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Тобто, якщо $\lambda^\varepsilon = \varepsilon\mu^\varepsilon$ і u_ε – власне значення і відповідна власна функція вихідної задачі (2.1)–(2.2), то, за умови $(\varepsilon, \mu^\varepsilon) \in \mathscr{E}$, число μ^ε і звуження w_ε функції u_ε на Γ_2 є власним значенням і відповідною власною функцією задачі

$$w'' + \nu p\, w = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \qquad w = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Gamma, \tag{3.20}$$

$$\mathcal{K}_a(w) = 0, \quad a \in J_2, \tag{3.21}$$

$$\mathcal{K}_0(w) - \Lambda_{12}(\varepsilon\nu)\mathcal{K}(w) + \nu Q(\varepsilon\nu) w(a_0) = 0, \tag{3.22}$$

$$\mathcal{W} = -\Lambda_{21}(\varepsilon\nu) w(a_0) + \varepsilon\Lambda_{22}(\varepsilon\nu)\mathcal{K}(w), \tag{3.23}$$

заданій вже на Γ_2 і з нелінійною залежністю від спектрального параметра ν (Цей зв'язок між заданими задачами буде уточнено нижче в лемі 5.). Тут

$$Q(\varepsilon\nu) = (\varepsilon\nu)^{-1}\Lambda_{11}(\varepsilon\nu). \tag{3.24}$$

З (3.8) матимемо $Q(\varepsilon\nu) \to M$ при $\varepsilon \to 0$, причому $|Q(\varepsilon\nu) - M| \leqslant C\nu\varepsilon$.

З огляду на лему 3, бачимо, що гранична задача (2.16)–(2.18), одержана раніше з асимптотичних міркувань, є також результатом формального переходу до границі при $\varepsilon \to 0$ в (3.20)–(3.23). Це додатковий резон розглядати замість вихідної задачі на Γ задачу (3.20)–(3.23) на Γ_2.

3.3. **Операторне формулювання перетвореної задачі.** Спектр вихідної задачі (2.1)–(2.2) є підмножиною спектра задачі (3.20)–(3.23). Для з'ясування його структури наведемо операторне формулювання задачі (3.20)–(3.23).

Розглянемо в $\mathscr{H}$ сім'ю операторів $\mathscr{T}_\varepsilon(\nu)$, залежну від параметрів $(\varepsilon, \nu) \in \mathscr{E}$, з дією

$$\mathscr{H} \ni (w, c) \xrightarrow{\mathscr{T}_\varepsilon(\nu)} \left(-\frac{1}{p}\, w'';\ -\frac{1}{Q(\varepsilon\nu)}\Big(\mathcal{K}_0(w) - \Lambda_{12}(\varepsilon\nu)\mathcal{K}(w)\Big)\right) \in \mathscr{H}$$

і областю визначення

$$\mathscr{D}(\mathscr{T}_\varepsilon(\nu)) = \big\{(w;\ c) \in \mathscr{H}\colon\ w \in W_2^2(\Gamma_2, \partial\Gamma_2);\ c = w(a_0);\ \mathcal{K}_a(w) = 0,\ a \in J_2;$$
$$\mathcal{W} = -\Lambda_{21}(\varepsilon\nu)w(a_0) + \varepsilon\Lambda_{22}(\varepsilon\nu)\mathcal{K}(w)\big\}.$$

Тоді задачу (3.20)–(3.23) можна записати у вигляді операторного рівняння

$$\mathscr{T}_\varepsilon(\nu)\hat{w} - \nu\hat{w} = 0, \qquad \hat{w} = (w, c)^\top \in \mathscr{D}(\mathscr{T}_\varepsilon(\nu)).$$

Введемо в просторі $\mathscr{H} = L_2(p, \Gamma_2) \times \mathbb{C}$ еквівалентний скалярний добуток

$$(\hat{w}, \hat{w})_{\varepsilon,\mathscr{H}} = \int\limits_{\Gamma_2} p\,|w|^2\, d\Gamma_2 + Q(\varepsilon\nu)|c|^2, \qquad \hat{w} = (w, c)^\top \in \mathscr{H}. \tag{3.25}$$

Всюди нижче значок транспонування $\top$ опустимо.

Лема 4. *Для кожної пари $(\varepsilon, \nu) \in \mathscr{E}$ оператор $\mathscr{T}_\varepsilon(\nu)$ є самоспряженим у просторі $\mathscr{H}$ із скалярним добутком (3.25) і має компактну резольвенту.*

Доведення. Достатньо довести, що $\mathscr{T}_\varepsilon(\nu)$ є симетричним і має дискретний спектр. Симетричність легко перевірити, двічі виконуючи інтегрування частинами інтеграла в правій частині рівності

$$(\mathscr{T}_\varepsilon(\nu)\hat{w}, \hat{v})_{\varepsilon,\mathscr{H}} = -\int\limits_{\Gamma_2} w''\overline{v}\, d\Gamma_2 - \big(\mathcal{K}_0(w) - \Lambda_{12}(\varepsilon\nu)\mathcal{K}(w)\big)\overline{v(a_0)}$$

та використовуючи умови, яким задовольняють вектори $\hat{w}$ і $\hat{v}$ з $\mathscr{D}(\mathscr{T}_\varepsilon(\nu))$, а також симетричність оператора $\Lambda(\varepsilon\nu)$.

Дискретність спектра оператора $\mathscr{T}_\varepsilon(\nu)$ випливає з аналітичності за параметром ν в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ лівої частини умови (3.22) та правої – (3.23) і, як наслідок, аналітичності характеристичного детермінанта для задачі (3.20)–(3.23), нулі якого є точками її спектра (див. [7, лема 3.3 і теорема 3.3, с. 67]). Компактність резольвенти оператора $\mathscr{T}_\varepsilon(\nu)$ є наслідком компактності вкладення $W_2^2(\Gamma_2, \partial\Gamma_2)$ в $L_2(\Gamma_2)$. $\square$

Оператор $\mathscr{T}_\varepsilon(\nu)-\nu$, $(\varepsilon,\nu)\in\mathscr{E}$, не має оберненого тоді і тільки тоді коли, задача (3.20)–(3.23) не має розв'язку. Відтак число μ^ε будемо називати *власним значенням* цієї задачі, якщо воно є точкою спектра оператора $\mathscr{T}_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$. Уточнимо тепер зв'язок задачі (3.20)–(3.23) з вихідною задачею (2.1)–(2.2).

Лема 5 ([21]). *Нехай λ_k^ε – власні значення, а $u_{\varepsilon,k}$ – відповідні власні функції задачі* (2.1)–(2.2) ($k=1,2,\dots$). *Для будь-якого $n\in\mathbb{N}$ існує ε_0 таке, що для всіх $\varepsilon<\varepsilon_0$ числа*

$$\mu_k^\varepsilon=\varepsilon^{-1}\lambda_k^\varepsilon,\qquad k=1,2,\dots,n,$$

і лише вони, є власними значеннями задачі (3.20)–(3.23) *на інтервалі* $(-\infty,\mu_n^\varepsilon]$. *Відповідні власні функції $w_{\varepsilon,k}$ є звуженнями функцій $u_{\varepsilon,k}$ на Γ_2.*

Доведення. З оцінок (2.3) випливає, що для довільного $n\in\mathbb{N}$ існує достатньо мале додатне ε_0, таке що всі числа $\lambda_k^\varepsilon=\varepsilon\mu_k^\varepsilon\in\mathscr{E}$ при $k\leqslant n$ і $\varepsilon<\varepsilon_0$. Для кожного такого k визначено оператор $\mathscr{T}_\varepsilon(\mu_k^\varepsilon)$, точкою спектра якого є μ_k^ε. Тобто, числа μ_k^ε, $k=1,\dots,n$, є власними значеннями задачі (3.20)–(3.23), а відповідними власними функціями – звуження $w_{\varepsilon,k}$ функцій $u_{\varepsilon,k}$ на Γ_2.

Нехай μ^ε і w_ε – власне значення і відповідна власна функція задачі (3.20)–(3.23), де $\mu^\varepsilon\in(-\infty,\ \mu_n^\varepsilon]$. Нехай u_ε – продовження функції w_ε на Γ_1 розв'язком $v_\varepsilon(\cdot;\varepsilon\mu^\varepsilon)$ задачі (3.10)–(3.13). Тоді μ^ε, v_ε та w_ε задовольняють рівності (3.10)–(3.17). Тобто, $\varepsilon\mu^\varepsilon$ і u_ε є власним значенням та відповідною власною функцією задачі (2.1)–(2.2) і тому $\mu^\varepsilon=\varepsilon^{-1}\lambda_k^\varepsilon$ для деякого $k\in\{1,\dots,n\}$. □

4. Рівномірна резольвентна збіжність сім'ї операторів $\mathscr{T}_\varepsilon(\nu)$

Доведемо рівномірну резольвентну збіжність при $\varepsilon\to0$ сім'ї операторів $\mathscr{T}_\varepsilon(\nu)$ до оператора $\mathscr{T}$ граничної задачі. Задля цього наразі з'ясуємо апріорні оцінки розв'язків резольвентних рівнянь для цих операторів. Отже, для довільного елемента $\hat f=(f,c)\in\mathscr{H}$ розглянемо резольвентні рівняння

$$\big(\mathscr{T}_\varepsilon(\nu)+i\big)\hat w_\varepsilon=\hat f,\qquad \big(\mathscr{T}+i\big)\hat w=\hat f, \tag{4.1}$$

де i – уявна одиниця, $\hat w_\varepsilon=(w_\varepsilon,w_\varepsilon(a_0))\in\mathscr{D}(\mathscr{T}_\varepsilon(\nu))$, $\hat w=(w,w(a_0))\in\mathscr{D}(\mathscr{T})$.

Функції w_ε і w є розв'язками крайових задач

$$\begin{cases}-w_\varepsilon''+ipw_\varepsilon=pf\quad\text{на}\quad\gamma\in E(\Gamma_2),\\ \ \ w_\varepsilon=0\quad\text{на}\quad\partial\Gamma_2,\qquad \mathcal{K}_a(w_\varepsilon)=0,\quad a\in J_2,\\ -\mathcal{K}_0(w_\varepsilon)+\Lambda_{12}(\varepsilon\nu)\mathcal{K}(w_\varepsilon)+iQ(\varepsilon\nu)w_\varepsilon(a_0)=Q(\varepsilon\nu)c,\\ \ \ \mathcal{W}_\varepsilon=-\Lambda_{21}(\varepsilon\nu)w_\varepsilon(a_0)+\varepsilon\Lambda_{22}(\varepsilon\nu)\mathcal{K}(w_\varepsilon);\end{cases} \tag{4.2}$$

$$\begin{cases}-w''+ip\,w=pf\quad\text{на}\quad\gamma\in E(\Gamma_2),\\ \ \ w=0\quad\text{на}\quad\partial\Gamma_2,\qquad \mathcal{K}_a(w)=0,\quad a\in J_2,\\ -\sum\limits_{j=0}^{r}\mathcal{K}_j(w)+iMw(a_0)=Mc,\\ \ \ w(a_0)=w(a_1)=\dots=w(a_r),\end{cases} \tag{4.3}$$

причому вони належать простору $W_2^2(\Gamma_2,\partial\Gamma_2)$.

Лема 6. *Для розв'язків $\hat{w}_\varepsilon = (w_\varepsilon, w_\varepsilon(a_0))$ і $\hat{w} = (w, w(a_0))$ рівнянь (4.1) справджуються оцінки*

$$\begin{aligned} &\|w_\varepsilon'\|^2_{L_2(\Gamma_2)} + Q(\varepsilon\nu)|w_\varepsilon(a_0)|^2 \leqslant C\|\hat{f}\|^2_{\mathscr{H}}, \\ &\|w'\|^2_{L_2(\Gamma_2)} + M|w(a_0)|^2 \leqslant C\|\hat{f}\|^2_{\mathscr{H}}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

де сталі C не залежать від ε.

Доведення. Доведемо першу оцінку (4.4); другу можна довести аналогічно. Розв'язок w_ε задачі (4.2) продовжимо на Γ_1 розв'язком v_ε задачі

$$\begin{aligned} &v_\varepsilon'' + \varepsilon\nu q v_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \\ &\mathcal{K}_a(v_\varepsilon) = 0, \quad a \in J_1, \\ &v_\varepsilon(a_0) = w_\varepsilon(a_0), \qquad \mathcal{K}(v_\varepsilon) = -\varepsilon\mathcal{K}(w_\varepsilon), \end{aligned} \tag{4.5}$$

де $(\varepsilon,\nu) \in \mathscr{E}$. Згадуючи означення оператора $\Lambda(\varepsilon\nu)$, легко довести, що це продовження є розв'язком крайової задачі

$$-v_\varepsilon'' = \varepsilon\nu q v_\varepsilon \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{4.6}$$

$$-w_\varepsilon'' + ipw_\varepsilon = pf \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \tag{4.7}$$

$$\mathcal{K}_a(v_\varepsilon) = 0,\ a \in J_1, \quad w_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Gamma_2, \quad \mathcal{K}_a(w_\varepsilon) = 0,\ a \in J_2, \tag{4.8}$$

$$-\varepsilon\mathcal{K}_0(w_\varepsilon) - \mathcal{K}_0(v_\varepsilon) + \varepsilon(\nu+i)Q(\varepsilon\nu)w_\varepsilon(a_0) = \varepsilon Q(\varepsilon\nu)c, \tag{4.9}$$

$$\varepsilon\mathcal{K}_j(w_\varepsilon) + \mathcal{K}_j(v_\varepsilon) = 0, \qquad j = 1,\dots,r, \tag{4.10}$$

$$w(a_0) = w(a_1) = \dots = w(a_r). \tag{4.11}$$

Помножимо рівняння (4.6) на $\overline{v}_\varepsilon$, а (4.7) – на $\varepsilon\overline{w}_\varepsilon$, проінтегруємо їх відповідно по Γ_1 і Γ_2, додамо одержані рівності і після інтегрування частинами, з використанням (4.8)–(4.11), одержимо

$$\int\limits_{\Gamma_1} |v_\varepsilon'|^2\, d\Gamma_1 + \varepsilon \int\limits_{\Gamma_2} |w_\varepsilon'|^2\, d\Gamma_2 + i\varepsilon \int\limits_{\Gamma_2} p\,|w_\varepsilon|^2\, d\Gamma_2 +$$
$$+\varepsilon(\nu+i)Q(\varepsilon\nu)|w_\varepsilon(a_0)|^2 - \varepsilon Q(\varepsilon\nu)c\cdot\overline{w_\varepsilon(a_0)} = \varepsilon\nu\int\limits_{\Gamma_1} q|v_\varepsilon|^2\, d\Gamma_1 + \varepsilon\int\limits_{\Gamma_2} pf\cdot\overline{w}_\varepsilon\, d\Gamma_2.$$

Перенесемо доданок $\varepsilon Q(\varepsilon\nu)c\cdot\overline{w_\varepsilon(a_0)}$ в праву частину, після чого ліва частина рівності матиме додатну дійсну частину, оцінюючи яку через модуль правої частини, отримаємо

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Gamma_1} |v_\varepsilon'|^2\, d\Gamma_1 + \varepsilon \int\limits_{\Gamma_2} |w_\varepsilon'|^2\, d\Gamma_2 + \varepsilon\nu Q(\varepsilon\nu)|w_\varepsilon(a_0)|^2 \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon\nu \int\limits_{\Gamma_1} q|v_\varepsilon|^2\, d\Gamma_1 + \varepsilon\Big|\int\limits_{\Gamma_2} p\,f\cdot\overline{w_\varepsilon}\, d\Gamma_2 + Q(\varepsilon\nu)c\cdot\overline{w_\varepsilon(a_0)}\,\Big| = \\ &= \varepsilon\nu\|v_\varepsilon\|_{L_2(q,\Gamma_1)} + \varepsilon\big|\big(\hat{f},\ \hat{w}_\varepsilon\big)_{\varepsilon,\mathscr{H}}\big| \leqslant \varepsilon\nu\|v_\varepsilon\|^2_{L_2(q,\Gamma_1)} + \varepsilon C_1\|\hat{f}\|_{\mathscr{H}}\,\|\hat{w}_\varepsilon\|_{\mathscr{H}}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Оцінимо $\|\hat{w}_\varepsilon\|_{\mathscr{H}}$ і $\|v_\varepsilon\|_{L_2(q,\Gamma_1)}$. З (4.1), зважаючи на обмеженість в $\mathscr{H}$ резольвенти $\big(\mathscr{T}_\varepsilon(\nu)+i\big)^{-1}$, матимемо

$$\|\hat{w}_\varepsilon\|^2_{\mathscr{H}} = \|w_\varepsilon\|^2_{L_2(p,\Gamma_2)} + Q(\varepsilon\nu)|w_\varepsilon(a_0)|^2 \leqslant C_2\|\hat{f}\|^2_{\mathscr{H}}. \tag{4.13}$$

Для функції v_ε, як розв'язку задачі (4.5), справджується апріорна оцінка

$$\|v_\varepsilon\|_{L_2(q,\Gamma_1)} \leqslant C_3|w_\varepsilon(a_0)| + \varepsilon C_4|\mathcal{K}(w_\varepsilon)|.$$

За теоремою про сліди функцій

$$|\mathcal{K}(w_\varepsilon)| \leqslant C_5\|w_\varepsilon\|_{W_2^2(\Gamma_2,\partial\Gamma_2)} \leqslant C_6\big(\|w_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_2)} + \|w'_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_2)} + \|w''_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_2)}\big).$$

Згідно з (4.7) маємо $w''_\varepsilon = p(iw_\varepsilon - f)$, отже, враховуючи (4.13), суму $\|w_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_2)} + \|w''_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_2)}$ можна оцінити через $\|\hat{f}\|_{\mathscr{H}}$. Тому $|\mathcal{K}(w_\varepsilon)| \leqslant C_6\|w'_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_2)} + C_7\|\hat{f}\|_{\mathscr{H}}$, а оскільки $|w_\varepsilon(a_0)| \leqslant C_8\|\hat{f}\|_{\mathscr{H}}$ (див. (4.13)), то одержимо

$$\|v_\varepsilon\|_{L_2(q,\Gamma_1)} \leqslant C_9\|\hat{f}\|_{\mathscr{H}} + \varepsilon C_{10}\|w'_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_2)}. \tag{4.14}$$

З огляду на (4.13) і (4.14), нерівність (4.12) можна посилити

$$\|v'_\varepsilon\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + \varepsilon\|w'_\varepsilon\|^2_{L_2(\Gamma_2)} + \varepsilon\nu Q(\varepsilon\nu)|w_\varepsilon(a_0)|^2 \leqslant \varepsilon C_{11}\|\hat{f}\|^2_{\mathscr{H}} + \varepsilon^2 C_{12}\|w'_\varepsilon\|^2_{L_2(\Gamma_2)}.$$

Звідси

$$\|v'_\varepsilon\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + \varepsilon(1-\varepsilon C_{12})\|w'_\varepsilon\|^2_{L_2(\Gamma_2)} + \varepsilon\nu Q(\varepsilon\nu)|w_\varepsilon(a_0)|^2 \leqslant \varepsilon C_{11}\|\hat{f}\|^2_{\mathscr{H}},$$

звідки випливає шукана оцінка (4.4). □

Зауваження 1. З останньої нерівності одержимо першу, а з нерівностей (4.14) і (4.4) – другу з оцінок

$$\|v'_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_1)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\|\hat{f}\|_{\mathscr{H}}, \qquad \|v_\varepsilon\|_{L_2(q,\Gamma_1)} \leqslant C\|\hat{f}\|_{\mathscr{H}}, \tag{4.15}$$

в яких сталі не залежать від ε.

Наступна теорема є базою, на якій ґрунтуються основні результати про асимптотичну поведінку власних значень і власних підпросторів задачі (2.1)–(2.2).

Теорема 1. *Для будь-якого дійсного ν сім'я операторів $\mathscr{T}_\varepsilon(\nu)$ збігається при $\varepsilon \to 0$ до оператора $\mathscr{T}$ в сенсі рівномірної резольвентної збіжності.*

Доведення. Нехай $\hat{w}_\varepsilon = (w_\varepsilon, w_\varepsilon(a_0))$, $\hat{w} = (w, w(a_0)) \in \mathscr{H}$ – розв'язки резольвентних рівнянь (4.1). Потрібно довести, що для різниці $z_\varepsilon = w_\varepsilon - w$

$$\|\hat{z}_\varepsilon\|_{\mathscr{H}} = \|\hat{w}_\varepsilon - \hat{w}\|_{\mathscr{H}} \leqslant \eta(\varepsilon)\|\hat{f}\|_{\mathscr{H}}, \qquad \eta(\varepsilon) = o(1),\ \varepsilon \to 0.$$

Функції w_ε і w є розв'язками крайових задач (4.2) і (4.3), відповідно. Їхня різниця $z_\varepsilon = w_\varepsilon - w$ задовольняє рівняння $-z''_\varepsilon + ipz_\varepsilon = 0$ на Γ_2 і умови $z_\varepsilon = 0$ на $\partial\Gamma_2$ та $\mathcal{K}_a(z_\varepsilon) = 0$, $a \in J_2$. Тоді

$$0 = \int_{\Gamma_2}\big(-z''_\varepsilon + ipz_\varepsilon\big)\overline{z}_\varepsilon\,d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_2}\big(|z'_\varepsilon|^2 + ip\,|z_\varepsilon|^2\big)\,d\Gamma_2 + \sum_{j=0}^{r}\mathcal{K}_j(z_\varepsilon)\overline{z_\varepsilon(a_j)}. \tag{4.16}$$

Перетворимо суму позаінтегральних доданків

$$\sum_{j=0}^{r} \mathcal{K}_j(z_\varepsilon)\overline{z_\varepsilon(a_j)} = \big(\mathcal{K}_0(w_\varepsilon) - \mathcal{K}_0(w)\big)\overline{z_\varepsilon(a_0)} + \langle \mathcal{K}(z_\varepsilon), \mathcal{W}_\varepsilon\rangle - \langle \mathcal{K}(z_\varepsilon), \mathcal{W}\rangle. \tag{4.17}$$

З умов Кірхгофа в точці a_0 в задачах (4.2) і (4.3) маємо

$$\mathcal{K}_0(w_\varepsilon) = \Lambda_{12}(\varepsilon\nu)\mathcal{K}(w_\varepsilon) + iQ(\varepsilon\nu)w_\varepsilon(a_0) - Q(\varepsilon\nu)c,$$

$$\mathcal{K}_0(w) = -\sum_{j=1}^{r}\mathcal{K}_j(w) + iMw(a_0) - Mc = \Lambda_{12}(0)\mathcal{K}(w) + iMw(a_0) - Mc,$$

а з умов Діріхле у вершинах a_j, $j = 1, \ldots, r$,

$$\mathcal{W}_\varepsilon = -\Lambda_{21}(\varepsilon\nu)w_\varepsilon(a_0) + \varepsilon\Lambda_{22}(\varepsilon\nu)\mathcal{K}(w_\varepsilon), \qquad \mathcal{W} = w(a_0)e = -\Lambda_{21}(0)w(a_0).$$

Підставивши ці вирази в (4.17) і перегрупувавши доданки, одержимо

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{r} \mathcal{K}_j(z_\varepsilon)\overline{z_\varepsilon(a_j)} = {} & \big[\Lambda_{12}(\varepsilon\nu)\mathcal{K}(z_\varepsilon)\overline{z_\varepsilon(a_0)} - \langle \mathcal{K}(z_\varepsilon), \Lambda_{21}(\varepsilon\nu)z_\varepsilon(a_0)\rangle\big] + \\ & + \big(\Lambda_{12}(\varepsilon\nu) - \Lambda_{12}(0)\big)\mathcal{K}(w)\overline{z_\varepsilon(a_0)} - (Q(\varepsilon\nu) - M)c\overline{z_\varepsilon(a_0)} - \\ & - \big\langle \mathcal{K}(z_\varepsilon), \big(\Lambda_{21}(\varepsilon\nu) - \Lambda_{21}(0)\big)w(a_0)\big\rangle + \varepsilon\langle \mathcal{K}(z_\varepsilon), \Lambda_{22}(\varepsilon\nu)\mathcal{K}(w_\varepsilon)\rangle + \\ & + iQ(\varepsilon\nu)|z_\varepsilon(a_0)|^2 + i\big(Q(\varepsilon\nu) - M\big)w(a_0)\overline{z_\varepsilon(a_0)}.\end{aligned}$$

Оскільки $\Lambda_{21}^* = \Lambda_{12}$, то вираз у квадратних дужках дорівнює нулеві і тоді звідси та з (4.16) отримаємо

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_2} \big(|z_\varepsilon'|^2 + ip\,|z_\varepsilon|^2\big)\,d\Gamma_2 + iQ(\varepsilon\nu)|z_\varepsilon(a_0)|^2 = \\ &\quad - \big(\Lambda_{12}(\varepsilon\nu) - \Lambda_{12}(0)\big)\mathcal{K}(w)\overline{z_\varepsilon(a_0)} + (Q(\varepsilon\nu) - M)c\overline{z_\varepsilon(a_0)} + \\ &\quad + \big\langle \mathcal{K}(z_\varepsilon), \big(\Lambda_{21}(\varepsilon\nu) - \Lambda_{21}(0)\big)w(a_0)\big\rangle - \varepsilon\langle \mathcal{K}(z_\varepsilon), \Lambda_{22}(\varepsilon\nu)\mathcal{K}(w_\varepsilon)\rangle - \\ &\quad - i\big(Q(\varepsilon\nu) - M\big)w(a_0)\overline{z_\varepsilon(a_0)}.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Уявна частина виразу в лівій частині рівності додатна, тому не перевищує модуля правої частини, оцінюючи який використаємо те, що $\|\Lambda(\varepsilon\nu) - \Lambda(0)\| \leqslant C\nu\varepsilon$ і $|Q(\varepsilon\nu) - M| \leqslant C\nu\varepsilon$ (див. (3.6), (3.8)). Крім того, з неперевності оператора сліду для функцій $g \in W_2^2(\Gamma_2, \partial\Gamma)$ маємо $|\mathcal{K}(g)| \leqslant C\big(\|g\|^2_{L_2(\Gamma_2)} + \|g'\|^2_{L_2(\Gamma_2)} + \|g''\|^2_{L_2(\Gamma_2)}\big)$. В доведенні леми 6 доведено, що для функцій g з множини $\{w, w_\varepsilon, z_\varepsilon\}$ справджується оцінка $\|g\|^2_{L_2(\Gamma_2)} + \|g''\|^2_{L_2(\Gamma_2)} \leqslant C\|\hat{f}\|_{\mathscr{H}}$. До того ж, завдяки (4.4), і $\|g'\|^2_{L_2(\Gamma_2)} \leqslant C\|\hat{f}\|_{\mathscr{H}}$. Тому $|\mathcal{K}(g)| \leqslant C\|\hat{f}\|_{\mathscr{H}}$. Оскільки і $|g(a_0)| \leqslant C\|\hat{f}\|_{\mathscr{H}}$ та $|c| \leqslant C\|\hat{f}\|_{\mathscr{H}}$, то зі сказаного випливає, що праву частину (4.18) можна оцінити через $\varepsilon\|\hat{f}\|^2_{\mathscr{H}}$. Отже,

$$\int_{\Gamma_2} p\,|z_\varepsilon|^2\,d\Gamma_2 + Q(\varepsilon\nu)|z_\varepsilon(a_0)|^2 \leqslant C\varepsilon\|\hat{f}\|^2_{\mathscr{H}},$$

звідки

$$\|\hat{z}_\varepsilon\|_{\mathscr{H}} = \|\hat{w}_\varepsilon - \hat{w}\|_{\mathscr{H}} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\|\hat{f}\|_{\mathscr{H}},$$

що ми й прагнули довести. Це означає, що

$$\|(\mathscr{T}_\varepsilon(\nu)+i)^{-1}-(\mathscr{T}-i)^{-1}\|\leqslant C\varepsilon^{1/2}$$

з незалежною від ε і f сталою C. Звідси випливає рівномірна збіжність при $\varepsilon\to 0$ резольвент $(\mathscr{T}_\varepsilon(\nu)+\zeta)^{-1}$ до $(\mathscr{T}+\zeta)^{-1}$ для всіх ζ з резольвентної множини оператора $\mathscr{T}$ [25, Теорема VIII.19, с.312]. □

У доведенні теореми нічого не зміниться, якщо взяти $\nu=\mu^\varepsilon$, де $\{\mu^\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0;1)}$ – обмежена послідовність. Тому правильний такий наслідок

Наслідок 2. *Для обмеженої послідовності $\{\mu^\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0;1)}$ сім'я операторів $\mathscr{T}_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$ є збіжною при $\varepsilon\to 0$ до оператора $\mathscr{T}$ в сенсі рівномірної резольвентної збіжності.*

5. Теореми збіжності

Досліджено питання збіжності власних значень і власних підпросторів вихідної задачі при $\varepsilon\to 0$.

5.1. **Деякі факти спектральної теорії збурень.** Нехай H – гільбертів простір із скалярним добутком $(\cdot,\ \cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$; нехай A – самоспряжений оператор в H з областю визначення $\mathscr{D}(A)$.

Означення 1. Квазімодою з нев'язкою δ для оператора A будемо називати пару $(\lambda,v)\in\mathbb{R}\times\mathscr{D}(A)$, таку що $\|Av-\lambda v\|\leqslant\delta$ і $\|v\|=1$. Кажуть, що квазімоди $(\lambda,v_1),\dots,(\lambda,v_m)$ з нев'язкою δ для оператора A мають **відхилення** β **від ортогональності,** якщо $|(v_i,\ v_j)-\delta_{ij}|\leqslant\beta$, де δ_{ij} – символ Кронекера, $i,j=1,\dots,m$.

Лема 7. (i) [24, теорема 1, с. 141] *Якщо (λ,v) – квазімода з нев'язкою δ для оператора A, то інтервал $[\lambda-\delta;\lambda+\delta]$ містить принаймні одне власне значення λ^* оператора A.*
(ii) [24, с. 141] *Нехай $E(\Delta)$ – спектральний проектор, який відповідає інтервалу $\Delta=[\lambda-d;\lambda+d]$, де $d>0$. Тоді для квазімоди (λ,v) з нев'язкою δ для оператора A справджується нерівність*

$$\|E(\Delta)v-v\|\leqslant\delta d^{-1}. \tag{5.1}$$

Якщо Δ містить лише одне просте власне значення λ^* оператора A, якому відповідає нормований власний вектор v^* ($\|v^*\|=1$), то

$$\|v-v^*\|\leqslant 2\delta d^{-1}. \tag{5.2}$$

(iii) [24, теорема 2, с. 142] *Нехай $(\lambda,v_1),\dots,(\lambda,v_m)$ – сім'я квазімод для оператора A з нев'язкою δ і відхиленням від ортогональності β. Якщо $\delta\lambda^{-1}+\beta<m$, то сумарна кратність частини спектра оператора A, що лежить в інтервалі $[\lambda-\delta,\lambda+\delta]$, не менша ніж m.*

5.2. **Збіжність спектра збуреної задачі.** Вважаючи, що власні значення λ_k^ε збуреної задачі (2.1)–(2.2) і власні значення μ_k граничної задачі (2.16)–(2.18) занумеровано в порядку зростання з урахуванням кратностей, доведемо, що $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}\lambda_k^\varepsilon\to\mu_k$ для будь-якого $k\in\mathbb{N}$.

Лема 8 ([21]). *Нехай* $\{\lambda_k^\varepsilon\}_{k=1}^{+\infty}$ *– послідовність власних значень оператора* $\mathscr{L}_\varepsilon$ *задачі* (2.1)–(2.2). *Для будь-якого* $k \in \mathbb{N}$ *існує скінченна границя при* $\varepsilon \to 0$ *величин* $\mu_k^\varepsilon = \varepsilon^{-1}\lambda_k^\varepsilon$*, яка є власним значенням оператора* $\mathscr{T}$ *задачі* (2.16)–(2.18).

Доведення. Нехай це не так, тобто, для деякого $k \in \mathbb{N}$

$$\mu_* = \varliminf_{\varepsilon\to 0} \mu_k^\varepsilon < \varlimsup_{\varepsilon\to 0} \mu_k^\varepsilon = \mu^*,$$

де μ_* і μ^* – скінченні, оскільки, згідно з (2.3), сукупність величин μ_k^ε обмежена. Розглянемо довільні точку μ і її α-окіл $(\mu-\alpha;\ \mu+\alpha)$, такі що містяться в інтервалі (μ_*, μ^*). З неперервності μ_k^ε за ε існує послідовність $\varepsilon' \to 0$ значень малого параметра, для якої $\mu_k^{\varepsilon'}$ збігається до μ і всі $\mu_k^{\varepsilon'} \in (\mu-\alpha;\ \mu+\alpha)$. За лемою 5 число $\mu_k^{\varepsilon'}$ є власним значенням оператора $\mathscr{T}_{\varepsilon'}(\mu_k^{\varepsilon'})$. З рівномірної резольвентної збіжності операторів $\mathscr{T}_{\varepsilon'}(\mu_k^{\varepsilon'})$ до $\mathscr{T}$ (наслідок з теореми 1) інтервалу $(\mu-\alpha;\ \mu+\alpha)$ належить власне значення оператора $\mathscr{T}$ [25, теорема VIII.23, с. 317]. Оскільки μ і його α-окіл – довільні, такі що містяться в (μ_*, μ^*), спектр $\sigma(\mathscr{T})$ оператора $\mathscr{T}$ всюди щільний в цьому інтервалі. Тобто, $[\mu_*, \mu^*] \subset \sigma(\mathscr{T})$, що суперечить дискретності $\sigma(\mathscr{T})$. Отож, $\mu_* = \mu^* = \mu \in \sigma(\mathscr{T})$. □

Теорема 2. *Нехай* $\{\lambda_k^\varepsilon\}_{k=1}^{+\infty}$ *та* $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *– послідовності власних значень задач* (2.1)–(2.2) *та* (2.16)–(2.18)*, відповідно, занумеровані в порядку зростання з урахуванням кратностей. Тоді для будь-якого фіксованого* $k \in \mathbb{N}$ *величини* $\varepsilon^{-1}\lambda_k^\varepsilon$ *збігаються до* μ_k *при* $\varepsilon \to 0$ *і*

$$\left|\varepsilon^{-1}\lambda_k^\varepsilon - \mu_k\right| \leqslant C(k)\varepsilon. \tag{5.3}$$

Доведення. Нехай μ – власне значення оператора $\mathscr{T}$ кратності m і нехай $\alpha > 0$ таке, що $(\mu-\alpha;\ \mu+\alpha) \cap \sigma(\mathscr{T}) = \{\mu\}$. За теоремою VIII.23 [25] з рівномірної резольвентної збіжності при $\varepsilon \to 0$ операторів $\mathscr{T}_\varepsilon(\mu)$ до $\mathscr{T}$ випливає, що для будь-якого достатньо малого $\varepsilon > 0$ сумарна кратність точок спектра оператора $\mathscr{T}_\varepsilon(\mu)$ з інтервалу $(\mu-\alpha;\ \mu+\alpha)$ дорівнює m. Позначимо їх, враховуючи кратність, через $\mu_1^\varepsilon, \dots, \mu_m^\varepsilon$ і нехай $\hat{w}_{\varepsilon,1}, \dots, \hat{w}_{\varepsilon,m}$ – відповідні ортонормовані в $\mathscr{H}$ власні вектори, де $\hat{w}_{\varepsilon,s} = (w_{\varepsilon,s};\ w_{\varepsilon,s}(a_0))$. Потрібно з'ясувати, що сумарна кратність точок спектра оператора $\mathscr{L}_\varepsilon$ вихідної задачі, які належать $(\mu-\alpha;\ \mu+\alpha)$, за малих ε дорівнює також m. Щоб довести, що вона не менша ніж m, побудуємо m квазімод для оператора $\mathscr{L}_\varepsilon$ з малими нев'язкою та відхиленням від ортогональності і скористаємося частиною (iii) леми 7.

Для будь-якого $s \in \{1, \dots, m\}$ функція $w_{\varepsilon,s}$ є розв'язком задачі

$$\begin{aligned}
&w''_{\varepsilon,s} + \mu_s^\varepsilon p\, w_{\varepsilon,s} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \qquad w_{\varepsilon,s} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Gamma,\\
&\mathcal{K}_a(w_{\varepsilon,s}) = 0, \quad a \in J_2,\\
&\mathcal{K}_0(w_{\varepsilon,s}) + \mu_s^\varepsilon Q(\varepsilon\mu) w_{\varepsilon,s}(a_0) - \Lambda_{12}(\varepsilon\mu)\mathcal{K}(w_{\varepsilon,s}) = 0,\\
&\mathcal{W}_{\varepsilon,s} = -\Lambda_{21}(\varepsilon\mu) w_{\varepsilon,s}(a_0) + \varepsilon\Lambda_{22}(\varepsilon\mu)\mathcal{K}(w_{\varepsilon,s})
\end{aligned}$$

на графі Γ_2. Нехай $u_{\varepsilon,s}$ – продовження $w_{\varepsilon,s}$ на Γ, таке що звуження $v_{\varepsilon,s} = u_{\varepsilon,s}|_{\Gamma_1}$ є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} &v''_{\varepsilon,s} + \varepsilon\mu q v_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \\ &\mathcal{K}_a(v_{\varepsilon,s}) = 0, \quad a \in J_1, \\ &v_{\varepsilon,s}(a_0) = w_{\varepsilon,s}(a_0), \\ &\mathcal{K}_j(v_{\varepsilon,s}) = -\varepsilon\mathcal{K}_j(w_{\varepsilon,s}), \qquad j = 1, \dots, r. \end{aligned} \tag{5.4}$$

З означення $\Lambda(\varepsilon\mu)$ випливає, що

$$\begin{aligned} &v''_{\varepsilon,s} + \varepsilon\mu q v_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \\ &w''_{\varepsilon,s} + \mu_s^\varepsilon p\, w_{\varepsilon,s} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \\ &\mathcal{K}_a(v_{\varepsilon,s}) = 0, \quad a \in J_1, \qquad w_{\varepsilon,s} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Gamma, \quad \mathcal{K}_a(w_{\varepsilon,s}) = 0, \quad a \in J_2, \\ &\mathcal{K}_0(v_{\varepsilon,s}) + \varepsilon\mathcal{K}_0(w_{\varepsilon,s}) + \varepsilon(\mu_s^\varepsilon - \mu)Q(\varepsilon\mu)w_{\varepsilon,s}(a_0) = 0 \\ &\mathcal{K}_j(v_{\varepsilon,s}) + \varepsilon\mathcal{K}_j(w_{\varepsilon,s}) = 0, \qquad j = 1, \dots, r, \\ &v_{\varepsilon,s}(a_j) = w_{\varepsilon,s}(a_j) \qquad j = 0, 1, \dots, r. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Природно m пар $(\varepsilon\mu; u_{\varepsilon,s})$ взяти за шукані квазімоди для $\mathscr{L}_\varepsilon$, пронормувавши $u_{\varepsilon,s}$ в $L_2(\rho, \Gamma)$, але $u_{\varepsilon,s} \notin \mathscr{D}(\mathscr{L}_\varepsilon)$, оскільки $\mathcal{K}_0(v_{\varepsilon,s}) + \varepsilon\mathcal{K}_0(w_{\varepsilon,s}) \neq 0$. Усунемо нев'язку з допомогою функції-коректора з L_2-нормою порядку ε. Розглянемо функцію $\psi \in C^\infty(\Gamma_1)$ з носієм в околі вершини a_0, який не містить, крім a_0, інших вершин графа Γ_1, і таку, що $\psi(a_0) = 0$, $\mathcal{K}_0(\psi) = 1$. Нехай

$$\tilde{v}_{\varepsilon,s} = v_{\varepsilon,s} + \varepsilon(\mu_s^\varepsilon - \mu)Q(\varepsilon\mu)w_{\varepsilon,s}(a_0)\psi, \qquad s = 1, \dots, m. \tag{5.6}$$

Оскільки $|w_{\varepsilon,s}(a_0)| \leqslant \|\hat{w}_{\varepsilon,s}\|_{\mathscr{H}} = 1$, то $\|\tilde{v}_{\varepsilon,s} - v_{\varepsilon,s}\|_{L_2(q,\Gamma_1)} \leqslant C\varepsilon$. Продовження $U_{\varepsilon,s}$ функції $w_{\varepsilon,s}$ на Γ_1 функцією $\tilde{v}_{\varepsilon,s}$ уже належить $\mathscr{D}(\mathscr{L}_\varepsilon)$. Доведемо, що $c \leqslant \|U_{\varepsilon,s}\|_{L_2(\rho,\Gamma)} \leqslant C$, де сталі c, C не залежать від ε та s. Оскільки (5.5) – це задача (4.6)–(4.11) з

$$\hat{f} = (f; c) = (i + \mu_s^\varepsilon)\hat{w}_{\varepsilon,s} = (i + \mu_s^\varepsilon)(w_{\varepsilon,s}; w_{\varepsilon,s}(a_0)),$$

то для $v_{\varepsilon,s}$ можна використати оцінки (4.15) з цим $\hat{f}$:

$$\|v'_{\varepsilon,s}\|_{L_2(\Gamma_1)} \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\|\hat{w}_{\varepsilon,s}\|_{\mathscr{H}}, \qquad \|v_{\varepsilon,s}\|_{L_2(q,\Gamma_1)} \leqslant C\|\hat{w}_{\varepsilon,s}\|_{\mathscr{H}}.$$

Зважаючи на це та на теорему про слід функції, маємо

$$\begin{aligned} M|w_{\varepsilon,s}(a_0)|^2 = M|v_{\varepsilon,s}(a_0)|^2 &\leqslant C_1\big(\|v_{\varepsilon,s}\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + \|v'_{\varepsilon,s}\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\big) \leqslant \\ &\leqslant C_2\big(\|v_{\varepsilon,s}\|^2_{L_2(q,\Gamma_1)} + \varepsilon\|\hat{w}_{\varepsilon,s}\|^2_{\mathscr{H}}\big) = C_2\big(\|v_{\varepsilon,s}\|^2_{L_2(q,\Gamma_1)} + \varepsilon\big), \end{aligned}$$

звідки

$$\|v_{\varepsilon,s}\|^2_{L_2(q,\Gamma_1)} - \frac{M}{C_2}\,|w_{\varepsilon,s}(a_0)|^2 \geqslant -\varepsilon.$$

Тоді

$$\|u_{\varepsilon,s}\|^2_{L_2(\rho,\Gamma)} = \|v_{\varepsilon,s}\|^2_{L_2(q,\Gamma_1)} + \|w_{\varepsilon,s}\|^2_{L_2(p,\Gamma_2)} \geqslant -\varepsilon + \min\left\{1;\ \frac{M}{C_2}\right\}\|\hat{w}_{\varepsilon,s}\|^2_{\mathscr{H}} \geqslant C_3^2.$$

З іншого боку,

$$\|u_{\varepsilon,s}\|^2_{L_2(\rho,\Gamma)} = \|v_{\varepsilon,s}\|^2_{L_2(q,\Gamma_1)} + \|w_{\varepsilon,s}\|^2_{L_2(p,\Gamma_2)} \leqslant C_4^2\|\hat{w}_{\varepsilon,s}\|^2_{\mathscr{H}} = C_4^2.$$

Отже, $C_3 \leqslant \|u_{\varepsilon,s}\|_{L_2(\rho,\Gamma)} \leqslant C_4$. Оскільки ж

$$\|U_{\varepsilon,s} - u_{\varepsilon,s}\|_{L_2(\rho,\Gamma)} = \|\tilde{v}_{\varepsilon,s} - v_{\varepsilon,s}\|_{L_2(q,\Gamma_1)} \leqslant C_5\varepsilon,$$

то й $c \leqslant \|U_{\varepsilon,s}\|_{L_2(\rho,\Gamma)} \leqslant C$.

Нормовані в $L_2(\rho,\Gamma)$ функції $U_{\varepsilon,s}$ позначимо через $\widetilde{U}_{\varepsilon,s}$ і доведемо, що сукупність $(\varepsilon\mu, \widetilde{U}_{\varepsilon,s})$, $s = 1,\dots,m$, є шуканою сім'єю квазімод для оператора $\mathscr{L}_\varepsilon$. Для будь-якого $s \in \{1,\dots,m\}$ матимемо $\mathscr{L}_\varepsilon \widetilde{U}_{\varepsilon,s} - \varepsilon\mu\widetilde{U}_{\varepsilon,s} = f_{\varepsilon,s}$, де

$$f_{\varepsilon,s} = -\varepsilon(\mu_s^\varepsilon - \mu)\|U_{\varepsilon,s}\|^{-1}_{L_2(\rho,\Gamma)} \cdot \begin{cases} (q^{-1}\psi'' + \varepsilon\mu\psi)Q(\varepsilon\mu)w_{\varepsilon,s}(a_0) & \text{на} \quad \Gamma_1, \\ -w_{\varepsilon,s} & \text{на} \quad \Gamma_2. \end{cases}$$

Очевидно $\|f_{\varepsilon,s}\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant C_6\,\varepsilon|\mu_s^\varepsilon - \mu| \leqslant C_6\,\alpha\varepsilon$. Права частина нерівності визначає нев'язку побудованих для оператора $\mathscr{L}_\varepsilon$ квазімод.

З'ясуємо відхилення від ортогональності побудованої сім'ї квазімод. Для довільних $k, s \in \{1,\dots,m\}$ маємо

$$\begin{aligned}(u_{\varepsilon,k},\, u_{\varepsilon,s})_{L_2(\rho,\Gamma)} &= \big((w_{\varepsilon,k},\, w_{\varepsilon,s})_{L_2(p,\Gamma_2)} + Mw_{\varepsilon,k}(a_0)w_{\varepsilon,s}(a_0)\big) + \\ &+ \big((v_{\varepsilon,k},\, v_{\varepsilon,s})_{L_2(q,\Gamma_1)} - Mv_{\varepsilon,k}(a_0)v_{\varepsilon,s}(a_0)\big) = \\ &= (\hat{w}_{\varepsilon,k},\, \hat{w}_{\varepsilon,s})_{\mathscr{H}} + (v_{\varepsilon,k},\, v_{\varepsilon,s} - v_{\varepsilon,s}(a_0))_{L_2(q,\Gamma_1)} + \\ &+ (v_{\varepsilon,k} - v_{\varepsilon,k}(a_0),\, v_{\varepsilon,s}(a_0))_{L_2(q,\Gamma_1)}.\end{aligned}$$

Оскільки для розв'язку $v_{\varepsilon,s}$ задачі (5.4)

$$\|v_{\varepsilon,s} - v_{\varepsilon,s}(a_0)\|_{L_2(q,\Gamma_1)} \leqslant C_7\varepsilon\big(\mu M|w_{\varepsilon,s}(a_0)| + |\mathcal{K}(w_{\varepsilon,s})|\big),$$

а $|w_{\varepsilon,s}(a_0)|$, $|\mathcal{K}(w_{\varepsilon,s})|$ та $\|v_{\varepsilon,s}\|_{L_2(q,\Gamma_1)}$ оцінюються через $\|\hat{w}_{\varepsilon,s}\|_{\mathscr{H}} = 1$, то

$$|(u_{\varepsilon,k},\, u_{\varepsilon,s})_{L_2(\rho,\Gamma)}| \leqslant \delta_{ks} + C_8\varepsilon$$

Звідси, через те що $\|U_{\varepsilon,s} - u_{\varepsilon,s}\|_{L_2(\rho,\Gamma)} \leqslant C_5\varepsilon$ і $c \leqslant \|U_{\varepsilon,s}\|_{L_2(\rho,\Gamma)} \leqslant C$, сім'я квазімод $(\varepsilon\mu, \widetilde{U}_{\varepsilon,s})$, $s = 1,\dots,m$, є ортогональною з відхиленням $C_9\varepsilon$.

Нехай $C_{10} = \max\{C_6, C_9\}$. Тоді за лемою 7 сумарна кратність точок спектра оператора $\mathscr{L}_\varepsilon$ з інтервалу $(\mu - \alpha;\ \mu + \alpha)$ не менша за m, якщо $C_{10}(\alpha\mu^{-1} + 1)\varepsilon < m$. Доведемо, що вона дорівнює m. Тобто, до власного значення μ кратності m оператора $\mathscr{T}$ збігається при $\varepsilon \to 0$ рівно m послідовностей $\varepsilon^{-1}\lambda^\varepsilon_{k+i}$, $i = 1,\dots m$. Припустимо, що їх є більше. Тоді існує власне значення $\varepsilon\mu^\varepsilon$ оператора $\mathscr{L}_\varepsilon$, $\mu^\varepsilon \in (\mu - \alpha;\ \mu + \alpha)$, відповідна нормована в $L_2(\rho,\Gamma)$, власна функція $\widetilde{U}_\varepsilon$ якого має мале відхилення від ортогональності до кожної з функцій $\widetilde{U}_{\varepsilon,s}$, тобто

$$(\widetilde{U}_{\varepsilon,s}, \widetilde{U}_\varepsilon)_{L_2(\rho,\Gamma)} \to 0 \ \text{ при } \varepsilon \to 0 \text{ для будь-якого } s \in \{1,\dots,m\}.$$

Нехай U_ε – перенормована функція $\widetilde{U}_\varepsilon$ так, що $\|\hat{w}_\varepsilon\|_{\mathscr{H}} = 1$ для звуження $w_\varepsilon = U_\varepsilon|_{\Gamma_2}$. Відповідно, від функцій $\widetilde{U}_{\varepsilon,s}$ перейдемо назад до функцій $U_{\varepsilon,s}$, для яких якраз $U_{\varepsilon,s}|_{\Gamma_2} = w_{\varepsilon,s}$ з $\|\hat{w}_{\varepsilon,s}\|_{\mathscr{H}} = 1$. Оскільки $c \leqslant \|U_{\varepsilon,s}\|_{L_2(\rho,\Gamma)} \leqslant C$, то

$$(U_{\varepsilon,s}, U_\varepsilon)_{L_2(\rho,\Gamma)} \to 0 \ \text{ при } \varepsilon \to 0 \text{ для будь-якого } s \in \{1,\dots,m\}.$$

Зазначимо, що $(\mu_s^\varepsilon, \hat{w}_{\varepsilon,s})$ – моди для оператора $\mathscr{T}_\varepsilon(\mu)$ а $(\mu, \hat{w}_{\varepsilon,s})$ – квазімоди з нев'язкою $|\mu_s^\varepsilon - \mu|\,\|\hat{w}_{\varepsilon,s}\|_{\mathscr{H}} = |\mu_s^\varepsilon - \mu|$ для нього.

Наша мета – побудувати ще одну квазімоду для оператора $\mathscr{T}_\varepsilon(\mu)$ з безмежно малими нев'язкою і відхиленням від ортогональності до m квазімод $(\mu, \hat{w}_{\varepsilon,s})$. Це означало б, що вимірність спектрального проектора, який відповідає інтервалу $(\mu - \alpha,\ \mu+\alpha)$, оператора $\mathscr{T}_\varepsilon(\mu)$ не менша, ніж $m+1$ (лема 7). Однак, з огляду на рівномірну резольвентну збіжність при $\varepsilon \to 0$ сім'ї операторів $\mathscr{T}_\varepsilon(\mu)$ до $\mathscr{T}$, ця вимірність дорівнює m – кратності власного значення μ оператора $\mathscr{T}$. Одержана суперечність завершила б доведення теореми. Оцінка (5.3) була б наслідком частини (i) леми 7.

Природно за згадану квазімоду взяти пару $(\mu, \hat{w}_\varepsilon)$, але назагал $\hat{w}_\varepsilon$ не належить області визначення оператора $\mathscr{T}_\varepsilon(\mu)$. Натомість, згідно з лемою 5, за умови $\varepsilon\mu^\varepsilon \in \mathscr{E}$ пара $(\mu^\varepsilon, \hat{w}_\varepsilon)$ є модою оператора $\mathscr{T}_\varepsilon(\mu^\varepsilon)$. Тобто, $\hat{w}_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathscr{T}_\varepsilon(\mu^\varepsilon))$ і w_ε та μ^ε є розв'язком задачі (3.20)–(3.23). Це означає, що справджуються рівності (3.19), які перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
&w_\varepsilon'' + \mu p\, w_\varepsilon = (\mu - \mu^\varepsilon) p\, w_\varepsilon \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \qquad w_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Gamma,\\
&\mathcal{K}_a(w_\varepsilon) = 0, \quad a \in J_2,\\
&\mathcal{K}_0(w_\varepsilon) - \Lambda_{12}(\varepsilon\mu)\mathcal{K}(w_\varepsilon) + \mu Q(\varepsilon\mu) w_\varepsilon(a_0) = (\mu - \mu^\varepsilon) Q(\varepsilon\mu) w_\varepsilon(a_0) + \Psi_{\varepsilon,1}(w_\varepsilon),\\
&\mathcal{W}_\varepsilon + \Lambda_{21}(\varepsilon\mu) w_\varepsilon(a_0) - \varepsilon\Lambda_{22}(\varepsilon\mu)\mathcal{K}(w_\varepsilon) = \Psi_{\varepsilon,2}(w_\varepsilon),
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
&\Psi_{\varepsilon,1}(w_\varepsilon) = -(\Lambda_{12}(\varepsilon\mu) - \Lambda_{12}(\varepsilon\mu^\varepsilon))\mathcal{K}(w_\varepsilon) + \mu^\varepsilon(Q(\varepsilon\mu) - Q(\varepsilon\mu^\varepsilon)) w_\varepsilon(a_0),\\
&\Psi_{\varepsilon,2}(w_\varepsilon) = (\Lambda_{21}(\varepsilon\mu) - \Lambda_{21}(\varepsilon\mu^\varepsilon)) w_\varepsilon(a_0) - \varepsilon(\Lambda_{22}(\varepsilon\mu) - \Lambda_{22}(\varepsilon\mu^\varepsilon))\mathcal{K}(w_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Права частина $\Psi_{\varepsilon,2}(w_\varepsilon)$ останньої з переписаних рівностей – нев'язка, яка завадить належності $\hat{w}_\varepsilon = (w_\varepsilon, w_\varepsilon(a_0))$ до $\mathscr{D}(\mathscr{T}_\varepsilon(\mu))$. Зазначимо, що

$$|\Psi_{\varepsilon,k}(w_\varepsilon)| \leqslant C\varepsilon\, |\mu^\varepsilon - \mu|\, \|\hat{w}_\varepsilon\|_{\mathscr{H}} = C\varepsilon\, |\mu^\varepsilon - \mu|\,, \qquad k = 1, 2.$$

Замість w_ε розглянемо суму $w_\varepsilon^* = w_\varepsilon + y_\varepsilon$, де функція y_ε усуває згадану нев'язку $\Psi_\varepsilon^2(w_\varepsilon)$ і водночас $\Psi_\varepsilon^1(w_\varepsilon)$. За такий коректор приймемо розв'язок задачі

$$\begin{aligned}
&y_\varepsilon'' + \vartheta p\, y_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \qquad y_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Gamma,\\
&\mathcal{K}_a(y_\varepsilon) = 0, \quad a \in J_2,\\
&\mathcal{K}_0(y_\varepsilon) - \Lambda_{12}(\varepsilon\mu)\mathcal{K}(y_\varepsilon) + \vartheta Q(\varepsilon\mu) y_\varepsilon(a_0) = -\Psi_{\varepsilon,1}(w_\varepsilon),\\
&\mathcal{Y}_\varepsilon + \Lambda_{21}(\varepsilon\mu) y_\varepsilon(a_0) - \varepsilon\Lambda_{22}(\varepsilon\mu)\mathcal{K}(y_\varepsilon) = -\Psi_{\varepsilon,2}(w_\varepsilon),
\end{aligned}$$

який існує і єдиний, якщо число ϑ не належить спектру оператора $\mathscr{T}_\varepsilon(\mu)$. Надалі уточнимо інформацію щодо нього. Отож, тепер сума $w_\varepsilon^* = w_\varepsilon + y_\varepsilon$ належить $\mathscr{D}(\mathscr{T}_\varepsilon(\mu))$ і, неважко переконатися, задовольняє рівності

$$\begin{aligned}
&w_\varepsilon^{*\prime\prime} + \mu p\, w_\varepsilon^* = (\mu - \mu^\varepsilon) p\, w_\varepsilon + (\mu - \vartheta) p\, y_\varepsilon \quad \text{на} \quad \Gamma_2,\\
&w_\varepsilon^* = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Gamma, \qquad\qquad \mathcal{K}_a(w_\varepsilon^*) = 0, \quad a \in J_2,\\
&\mathcal{K}_0(w_\varepsilon^*) - \Lambda_{12}(\varepsilon\mu)\mathcal{K}(w_\varepsilon^*) + \mu Q(\varepsilon\mu) w_\varepsilon^*(a_0) =\\
&\qquad\qquad = (\mu - \mu^\varepsilon) Q(\varepsilon\mu) w_\varepsilon(a_0) + (\mu - \vartheta) Q(\varepsilon\mu) y_\varepsilon(a_0),\\
&\mathcal{W}_\varepsilon^* + \Lambda_{21}(\varepsilon\mu) w_\varepsilon^*(a_0) - \varepsilon\Lambda_{22}(\varepsilon\mu)\mathcal{K}(w_\varepsilon^*) = 0,
\end{aligned}$$

або в операторній формі – рівняння

$$\mathscr{T}_\varepsilon(\mu)\hat{w}_\varepsilon^* - \mu p \hat{w}_\varepsilon^* = (\mu - \mu^\varepsilon)\hat{w}_\varepsilon + (\mu - \vartheta)\hat{y}_\varepsilon.$$

Уточнимо вибір числа ϑ. Нехай

$$\operatorname{dist}\big(\vartheta,\, \sigma(\mathscr{T}_\varepsilon(\mu))\big) \geqslant |\mu^\varepsilon - \mu|\,.$$

Зауважимо, що з задачі для y_ε отримаємо

$$\|\hat{y}_\varepsilon\|_{\mathscr{H}} \leqslant \frac{C\big(|\Psi_{\varepsilon,1}(w_\varepsilon)| + |\Psi_{\varepsilon,2}(w_\varepsilon)|\big)}{\operatorname{dist}\big(\vartheta,\, \sigma(\mathscr{T}_\varepsilon(\mu))\big)} \leqslant \frac{C\varepsilon\, |\mu^\varepsilon - \mu|}{|\mu^\varepsilon - \mu|} = C\varepsilon.$$

Тобто, коректор малий і права частина операторного рівняння мала

$$|(\mu - \mu^\varepsilon)\hat{w}_\varepsilon + (\mu - \vartheta)\hat{y}_\varepsilon| \leqslant |\mu - \mu^\varepsilon| + C\,|\mu - \vartheta|\,\varepsilon \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Отже, пара $(\mu, \hat{w}_\varepsilon^*)$ (вважаємо, що $\|\hat{w}_\varepsilon^*\|_{\mathscr{H}} = 1$) є квазімодою для оператора $\mathscr{T}_\varepsilon(\mu)$ з безмежно малою при $\varepsilon \to 0$ нев'язкою. Її майже ортогональність до кожної з квазімод $(\mu, \hat{w}_{\varepsilon,s})$ можна довести достеменно так, як вище майже ортогональність сім'ї функцій $u_{\varepsilon,s}$. У підсумку для будь-якого $s \in \{1, \ldots, m\}$

$$(U_{\varepsilon,s}, U_\varepsilon)_{L_2(\rho,\Gamma)} = (w_{\varepsilon,s},\, w_\varepsilon)_{L_2(p,\Gamma_2)} + (\tilde{v}_{\varepsilon,s},\, v_\varepsilon)_{L_2(q,\Gamma_1)} = (\hat{w}_{\varepsilon,s},\, \hat{w}_\varepsilon)_{\mathscr{H}} + O(\varepsilon),$$

де $v_\varepsilon = U_\varepsilon|_{\Gamma_1}$, а $\tilde{v}_{\varepsilon,s}$ визначено в (5.6). Оскільки $\hat{w}_\varepsilon = \hat{w}_\varepsilon^* - \hat{y}_\varepsilon$ з $\|\hat{y}_\varepsilon\|_{\mathscr{H}} \leqslant C\varepsilon$, то

$$(U_{\varepsilon,s}, U_\varepsilon)_{L_2(\rho,\Gamma)} = (\hat{w}_{\varepsilon,s},\, \hat{w}_\varepsilon^*)_{\mathscr{H}} + O(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Звідси $(\hat{w}_{\varepsilon,s};\, \hat{w}_\varepsilon^*)_{\mathscr{H}} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, бо $(U_{\varepsilon,s}, U_\varepsilon)_{L_2(\rho,\Gamma)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ за припущенням. Квазімоду для оператора $\mathscr{T}_\varepsilon(\mu)$, яка призводить до суперечності, побудовано. Теорему доведено. □

5.3. **Власні підпростори.** Нехай μ – власне значення оператора $\mathscr{T}$ граничної задачі (2.16)–(2.18), $\mathscr{W}_\mu$ – відповідний власний підпростір в $\mathscr{H} = L_2(p, \Gamma_2) \times \mathbb{C}$, а W_μ – його проекція на $L_2(p, \Gamma_2)$. Нехай $\{\lambda^\varepsilon\}$ сукупність тих власних значень оператора $\mathscr{L}_\varepsilon$ вихідної задачі (2.1)–(2.2), для яких $\varepsilon^{-1}\lambda^\varepsilon \to \mu$ при $\varepsilon \to 0$, а U_μ^ε – підпростір в $L_2(\rho, \Gamma)$, породжений відповідними власними векторами $\mathscr{L}_\varepsilon$. Однак ми не можемо розглядати W_μ як апроксимацію підпростору U_μ^ε, оскільки це підпростори різних просторів. Власні функції задачі (2.16)–(2.18) набувають того самого значення у вершинах з J_0, тому продовжимо за неперервністю кожну функцію w з W_μ сталою $w(a_0)$ на Γ_1. Одержимо підпростір $U_\mu \subset L_2(\rho, \Gamma)$ тієї ж вимірності: $\dim U_\mu = \dim W_\mu$. Згідно з теоремою 2 і $\dim U_\mu^\varepsilon = \dim U_\mu$ за досить малих ε.

Резонно припустити, що підпростори U_μ та U_μ^ε в певному сенсі мало відрізняються і нашою метою буде оцінити цю різницю. Міру апроксимації U_μ^ε підпростором U_μ можна виразити в термінах *розхилу* між підпросторами.

Означення 2. Нехай P_W і P_U – ортогональні проектори на відповідні підпростори W і U гільбертового простору H. **Розхилом** між цими підпросторами називається величина

$$\Theta_H(W, U) = \|P_W - P_U\| = \sup_{\|u\|_H = 1} \|(P_W - P_U)u\|_H\,.$$

Оцінка розхилу між підпросторами W та U простору H ґрунтується на такій лемі.

Лема 9 ([26]). *Нехай* $\dim W = \dim U = m < \infty$ *і для довільного вектора* $w \in W$, $\|w\|_H = 1$, *існує вектор* $u \in U$, $\|u\|_H = 1$ *такий, що* $\|w - u\|_H \leqslant \beta$, *де* $0 < \beta < m^{-1}$. *Тоді*

$$\Theta_H(W, U) \leqslant C\beta,$$

де стала C *залежить лише від* m.

У наступній теоремі доведено, що підпростори U^ε_μ та U_μ відрізняються в зазначеному сенсі мало і встановлено оцінку розхилу між ними.

Теорема 3. *Нехай* μ – *довільна точка спектра оператора* $\mathscr{T}$. *Тоді для підпросторів* U_μ *та* U^ε_μ *простору* $L_2(\rho, \Gamma)$ *справджується нерівність*

$$\Theta_{L_2(\rho,\Gamma)}(U_\mu, U^\varepsilon_\mu) \leqslant C(\mu)\varepsilon.$$

Якщо μ_k *і* w_k – *просте власне значення і відповідний власний вектор оператора* $\mathscr{T}$, *то власний вектор* $u_{\varepsilon,k}$ *оператора* $\mathscr{L}_\varepsilon$ *збігається в* $L_2(\rho, \Gamma)$ *до функції* u_k, *яка є продовженням* w_k *за неперервністю сталою на підграф* Γ_1 *графа* Γ *і*

$$\|u_{\varepsilon,k} - u_k\|_{L_2(\rho,\Gamma)} \leqslant C(k)\varepsilon.$$

Доведення. З огляду на лему 9, треба довести, що для будь-якого нормованого в $L_2(\rho, \Gamma)$ елемента $u \in U_\mu$ існує нормований у цьому ж просторі елемент $u^*_\varepsilon \in U^\varepsilon_\mu$ такий, що $\|u^*_\varepsilon - u\|_{L_2(\rho,\Gamma)} \leqslant C\varepsilon$, де стала C залежить від $m = \dim U_\mu$ і μ. Існування елемента u^*_ε забезпечує твердження (ii), сформульоване в лемі 7. Доведемо це.

Нехай u – довільний нормований в $L_2(\rho, \Gamma)$ елемент підпростору U_μ. За квазімоду з леми 7 для $\mathscr{L}_\varepsilon$ можна було б взяти $(\varepsilon\mu, u)$, однак загалом функції з U_μ не належать області визначення оператора $\mathscr{L}_\varepsilon$: замість умов трансмісії $\mathcal{K}_j(v) = -\varepsilon\mathcal{K}_j(w)$ справджуються рівності $\mathcal{K}_j(v) = 0$, $j = 0, 1, \dots, r$. Тому підправимо функцію u, не порушуючи умов неперервності у вершинах з J_0, але забезпечивши виконання умов трансмісії і щоб поправка була малою за нормою в $L_2(\rho, \Gamma)$. Функцію-коректор z_ε будуємо так, що поправка $\eta_\varepsilon = z_\varepsilon|_{\Gamma_1}$ усуне нев'язку в умовах трансмісії у вершинах з J_0, а нев'язку, що виникла у цьому випадку в умовах неперервності, не порушуючи умов трансмісії, усуне $\zeta_\varepsilon = z_\varepsilon|_{\Gamma_2}$.

Приймемо $\eta_\varepsilon = \varepsilon\eta$, де η – розв'язок задачі

$$\begin{aligned}
&\eta'' + \mu q w(a_0) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1,\\
&\mathcal{K}_a(\eta) = 0, \quad a \in J_1, \qquad \mathcal{K}_a(\eta) = -\mathcal{K}_a(w), \quad a \in J_0,
\end{aligned}$$

який існує, оскільки справджується умова сумісності. Справді,

$$0 = \int_{\Gamma_1} (\eta'' + \mu q w(a_0))\, d\Gamma_1 = \sum_{a \in J_0} \mathcal{K}_a(w) + \mu M w(a_0) = 0.$$

Остання рівність правильна, бо її задовольняє функція w (див. (2.17)).

Подібно нехай $\zeta_\varepsilon = \varepsilon\zeta$ на Γ_2, де $\zeta \in C^\infty(\Gamma_2)$ – функція типу зрізки з носієм в околах вершин з J_0, яка є продовженням на Γ_2 за неперервністю функції η таким, що $\mathcal{K}_a(\zeta) = 0$ у вершинах з J_0.

За побудовою коректор $z_\varepsilon \in C^\infty(\Gamma)$ має потрібні нам властивості: функція $\tilde{u}_\varepsilon = u + z_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathscr{L}_\varepsilon)$, $\|z_\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Gamma)} \leqslant C\varepsilon$, а $\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Gamma)} = 1 + O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$.

Нехай $u_\varepsilon = c\tilde{u}_\varepsilon$, де $c = \|\tilde{u}_\varepsilon\|^{-1}_{L_2(\rho,\Gamma)}$ – нормувальний множник. За квазімоду для оператора $\mathscr{L}_\varepsilon$ приймемо $(\varepsilon\mu, u_\varepsilon)$ і з'ясуємо її нев'язку. Для довільної функції $\varphi \in L_2(\rho,\Gamma)$ матимемо

$$\begin{aligned}\big|(\mathscr{L}_\varepsilon u_\varepsilon - \varepsilon\mu u_\varepsilon,\ \varphi)_{L_2(\rho,\Gamma)}\big| &= c\big|\big((\kappa_\varepsilon \tilde{u}'_\varepsilon)' + \varepsilon\mu\rho\tilde{u}_\varepsilon,\ \varphi\big)_{L_2(\Gamma)}\big| = \\ &= c\big|\big(v'' + \varepsilon\mu q v,\ \varphi\big)_{L_2(\Gamma_1)} + \varepsilon\big(w'' + \mu p w,\ \varphi\big)_{L_2(\Gamma_2)} + \\ &+ \varepsilon\big(\eta'' + \varepsilon\mu q\eta,\ \varphi\big)_{L_2(\Gamma_1)} + \varepsilon^2\big(\zeta'' + \mu p\,\zeta,\ \varphi\big)_{L_2(\Gamma_2)}\big|.\end{aligned}$$

Оскільки $v \equiv w(a_0)$, $w'' + \mu p w \equiv 0$, $\eta'' = -\mu q w(a_0)$, то

$$\begin{aligned}&\big|(\mathscr{L}_\varepsilon u_\varepsilon - \varepsilon\mu u_\varepsilon,\ \varphi)_{L_2(\rho,\Gamma)}\big| = \\ &\qquad = c\varepsilon^2\big|\mu\big(q\eta,\ \varphi\big)_{L_2(\Gamma_1)} + \big(\zeta'' + \mu p\,\zeta,\ \varphi\big)_{L_2(\Gamma_2)}\big| \leqslant C_1\varepsilon^2\,\|\varphi\|_{L_2(\rho,\Gamma)}.\end{aligned}$$

Звідси

$$\|\mathscr{L}_\varepsilon u_\varepsilon - \varepsilon\mu u_\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Gamma)} \leqslant C_1\varepsilon^2.$$

Отже, $(\varepsilon\mu, u_\varepsilon)$ є квазімодою для оператора $\mathscr{L}_\varepsilon$ з нев'язкою $C_1\varepsilon^2$ і застосувавши частини (ii) леми 7 до оператора $\mathscr{L}_\varepsilon$, треба прийняти $\delta = C_1\varepsilon^2$. Нехай $\alpha > 0$ – таке, що інтервал $[\mu - \alpha;\, \mu + \alpha]$ не містить відмінних від μ точок ν спектра оператора $\mathscr{T}$. За числа λ і d з леми візьмемо, відповідно, $\lambda = \varepsilon\mu$ та $d = \alpha\varepsilon$; отже, в інтервалі $[\varepsilon\mu - d;\, \varepsilon\mu + d]$ немає точок вигляду $\varepsilon\nu$, де $\nu \in \sigma(\mathscr{T}) \setminus \{\mu\}$. Тоді, згідно з частиною (ii) леми 7, існує функція $u^*_\varepsilon \in U^\varepsilon_\mu$, $\|u^*_\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Gamma)} = 1$ така, що

$$\|u_\varepsilon - u^*_\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Gamma)} \leqslant \delta d^{-1} = \frac{C_1\varepsilon^2}{\alpha\varepsilon} = C_2\varepsilon.$$

Оскільки $\|u - u_\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Gamma)} \leqslant C_3\varepsilon$, то $\|u - u^*_\varepsilon\|_{L_2(\rho,\Gamma)} \leqslant C_4\varepsilon$ і тоді за лемою 9

$$\Theta_{L_2(\rho,\Gamma)}(U_\mu, U^\varepsilon_\mu) \leqslant C\varepsilon.$$

Правильність формулювання теореми щодо випадку простих власних значень μ оператора $\mathscr{T}$ є прямим наслідком доведеного вище, або ж твердження (ii) леми 7 в частині, що стосується простого власного значення оператора A.

□

Список використаної літератури

1. J.-L. Lions, *Perturbations singulières dans les problèmes aus limites et en contrôle optima,* Lect. Notes Math. **323**, Springer, Berlin, 1973, 645 p.
2. J. Sanchez Hubert and E. Sánchez-Palencia, *Vibration and coupling of continuous systems. Asymptotic methods,* Springer, Berlin, 1989, xvi+421 p.
3. О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев, *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред,* Изд-во МГУ, Москва, 1990, 312 с.; **English version:** O. A. Oleinik, A. S. Shamaev, and G. A. Yosifian, *Mathematical problems in elasticity and homogenization,* Studies in Math. and Its Appl., **26,** Elsevier Science Ltd, North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1992, 397 p.
4. В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов, *Усредненные модели микронеоднородных сред,* Наук. думка, Киев, 2005, 552 с.

5. А. Л. Пятницкий, Г. А. Чечкин, А. С. Шамаев, *Усреднение. Методы и приложения,* Тамара Рожковская, Новосибирск, 2007, 264 с.; **English version:** G. A. Chechkin, A. L. Piatnitski, and A. S. Shamaev, *Homogenization: methods and applications,* Transl. Math. Monographs, **234**, Amer. Math. Soc., 2007, 234 p.
6. Т. А. Мельник, Г. А. Чечкин, *Собственные колебания густых каскадных соединений со "сверхтяжелыми" концентрированными массами,* Изв. РАН, Серия матем. **79** (2015), no. 3, 41–86. DOI: 10.4213/im8238; **English version:** T. A. Mel'nik and G. A. Chechkin, *Eigenvibrations of thick cascade junctions with 'very heavy' concentrated masses*, Izv. Math. **79** (2015), no. 3, 467–511. DOI: 10.1070/IM2015v079n03ABEH002751
7. Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров, *Дифференциальные уравнения на геометрических графах,* Физматлит, Москва, 2005, 272 с.
8. P. Exner and O. Post, *Convergence of spectra of graph-like thin manifolds,* J. Geom. Phys. **54** (2005), no. 1, 77–115. DOI: 10.1016/j.geomphys.2004.08.003
9. P. Kuchment, *Graphs models of wave propagation in thin structures,* Waves Random Media **12** (2002), no 4, 1–24. DOI: 10.1088/0959-7174/12/4/201
10. G. Berkolaiko and P. Kuchment, *Introduction to quantum graphs,* Math. Surv. and Monographs, **186**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2013, xiii+274 p.
11. V. Pivovarchik, N. Rozhenko, and Ch. Tretter, *Dirichlet–Neumann inverse spectral problem for a star graph of Stieltjes strings,* Linear Algebra Appl. **439** (2013), no. 8, 2263–2292. DOI: 10.1016/j.laa.2013.07.003
12. В. А. Юрко, *Обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов на пространственных сетях,* УМН **71** (2016), no. 3 (429), 149–196. DOI: 10.4213/rm9709; **English version:** V. A. Yurko, *Inverse spectral problems for differential operators on spatial networks,* Russian Math. Surveys **71** (2016), no. 3, 539–584. DOI: 10.1070/RM9709
13. O. Post, *Spectral analysis on graph-like spaces,* Lect. Notes Math. **2039,** Springer, Berlin-Heidelberg, 2012, xvi+433p. DOI: 10.1007/978-3-642-23840-6
14. А. В. Клевцовский, Т. А. Мельник, *Асимптотические приближения решения краевой задачи в тонких областях типа аневризма,* Пробл. матем. анализа **88** (2017), 59–81; **English version:** A. V. Klevtsovskiy and T. A. Mel'nyk, *Asymptotic approximations of the solution to a boundary value problem in a thin aneurysm type domain,* J. Math. Sc. **224** (2017), no. 5, 667—693. DOI: 10.1007/s10958-017-3443-z
15. Ю. Д. Головатий, Г. Є. Грабчак, *Асимптотика спектра задачі Штурма-Ліувілля на геометричному графі із збуренням густини в околі вузлів,* Вісник Львів. ун-ту, Сер. мех.-мат. **67** (2007), 66–83.
16. Ю. Д. Головатий, Г. Є. Грабчак, *Про задачу Штурма-Ліувілля на зіркових графах з "важкими" вузлами,* Вісник Львів. ун-ту, Сер. мех.-мат. **72** (2010), 63–78.
17. Г. Є. Грабчак, *Асимптотика власних коливань струнної сітки з контрастною густиною,* Нелінійні граничні задачі. **21** (2012) 27–42.
18. Yu. Golovaty and V. Flyud, *Singularly perturbed hyperbolic problems on metric graphs: asymptotics of solutions,* Open Math. **15** (2017), no. 1, 404–419. DOI: 10.1515/math-2017-0030.
19. M. Lobo-Hidalgo and E. Sánchez-Palencia, *Low and high frequency vibration in stiff problems,* Partial differential equations and the calculus of variations, in De Giorgy 60th Birthday, Birkhäuser. **2** (1989), 729–742.
20. Н. О. Бабич, *Асимптотика низькочастотних власних коливань у жорсткій задачі,* Вісник Львів. ун-ту, Сер. мех.-мат. **58** (2000), 97–108.
21. Ю. Д. Головатий, В. М. Гут, *Коливні системи з жорсткими легкими включеннями: асимптотика спектра та власних підпросторів,* Укр. мат. журн. **64** (2012), № 10,

1314–1329; **English version:** Yu. D. Holovatyi and V. M. Hut, *Vibrating systems with rigid light-weight inclusions: asymptotics of the spectrum and eigenspaces,* Springer, Ukr. Math. J. **64** (2012), no 10, 1495–1513. DOI: 10.1007/s11253-013-0731-8

22. В. П. Михайлов *Дифференциальные уравнения в частных производных,* Наука, Москва, 1983, 424 с.
23. Ж. Бен Амара, А. А. Шкаликов, *Задача Штурма–Лиувилля с физическим и спектральным параметрами в граничном условии,* Матем. заметки. **66** (1999), no. 2, 163–172. DOI: 10.4213/mzm1151; **English version:** J. Ben Amara and A. A. Shkalikov *A sturm-liouville problem with physical and spectral parameters in boundary conditions,* Math Notes. **66** (1999), no. 2, 127-–134. DOI: 10.1007/BF02674866
24. В. Ф. Лазуткин, *Квазиклассическая асимптотика собственных функций,* Дифференц. уравн. с частными производными–5, Итоги науки и техн., Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **34**, ВИНИТИ, Москва, 1988, 135–174; **English version:** V. F. Lazutkin, *Semiclassical asymptotics of eigenfunctions,* Partial Differential Equations V: Asymptotic Methods for Partial Differential Equations, Encyclopaedia Math. Sci., **34**, Springer, Berlin, 1999, 133–171. DOI: 10.1007/978-3-642-58423-7_4
25. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Функциональный анализ,* Мир, Москва, **1**, 1977, 360 с.; **English version:** Michael Reed, Barry Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics: Functional analysis,* Academic Press, New York-San Francisco-London, vol. **I**, 1972, 325 p.
26. Ю. Д. Головатый *Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами,* Тр. ММО **54** (1992), 29–72; **English version:** Yu. D. Golovaty, *Spectral properties of oscillatory systems with adjoined masses,* Amer. Math. Soc., Trans. Mosc. Math. Soc. **54** (1993), 23–59.

Стаття: надійшла до редколегії 09.04.2019
доопрацьована 17.06.2019
прийнята до друку 13.11.2019

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF A STIFF SPECTRAL PROBLEM FOR THE LAPLAS OPERATOR ON A GEOMETRIC GRAPH

Hennadii HRABCHAK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mail: hrabchak_1999@yahoo.com

We study the asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of a stiff spectral problem for the Laplace operator on a geometric graph. In a mechanical interpretation, the problem describes the proper vibrations of a network-like system of flexible elastic strings, which consists of two parts with sharply contrasting rigidities but with the linear densities of the same order. The leading terms of the asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions are constructed. The justification of the asymptotic approximations is based on the fact of the uniform resolvent convergence of a certain family of unbounded self-adjoint operators to the operator of the boundary problem.

Key words: geometric graph, differential equations on graphs, singular perturbations, stiff problem, spectrum, eigenvalues, asymptotic, uniform resolvent convergence.