ISSN 2078-3744. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2019. Випуск 87. С. 46–55*
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2019. Issue 87. P. 46–55
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2019.87.046-055

УДК 517.53

ЛОГАРИФМІЧНА ПОХІДНА ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ З v-ЩІЛЬНІСТЮ НУЛІВ ПО КРИВИХ ПРАВИЛЬНОГО ОБЕРТАННЯ

Микола ЗАБОЛОЦЬКИЙ[1], **Юлія БАСЮК**[1], **Юрій ГАЛЬ**[2], **Святослав ТАРАСЮК**[1]

[1]*Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська 1, 79000, м. Львів*
[2]*Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, вул. Івана Франка 24, 82100, м. Дрогобич*
e-mail: mykola.zabolotskyy@lnu.edu.ua, yuliya.basyuk.92@gmail.com, yuriyhal@gmail.com, svt.tarasyuk@gmail.com

Знайдено асимптотику логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку з v-щільністю нулів по кривих правильного обертання.

Ключові слова: ціла функція, нульовий порядок, логарифмічна похідна, криві правильного обертання, щільність.

1. Вступ

Питання, які пов'язані з дослідженнями поводження цілих функцій вздовж кривих правильного обертання (кр. пр. об.), зокрема логарифмічних спіралей, розглядались в багатьох працях (див., наприклад, [1]-[4]). Зокрема, А. Макінтайр [1] ввів поняття індикатора по логарифмічній спіралі й узагальнив поняття асоційованої функції; С. Балашов [2] та А. Хейфіц [3] довели теореми Валірона та Валірона-Тітчмарша для класу $H_+(\rho)$ цілих функцій додатного порядку ρ з нулями на одній кр. пр. об. В [4] узагальнено добре відомі дослідження Б. Левіна та А. Пфлюгера про цілі функції цілком регулярного зростання (ц. р. зр.) на випадок існування щільності нулів функцій класу $H_+(\rho)$ на кр. пр. об.

Оскільки асимптотика логарифмічної похідної $F(z) = z\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ цілих функцій f та оцінки $F(z)$ зовні виняткових множин відіграють важливу роль у різних галузях

2010 Mathematics Subject Classification: 30E99

математики, то в [5] та [6], відповідно, було знайдено необхідну та достатню умови належності $f \in H_+(\rho)$ до множини ц. р. зр. в термінах $F(z)$.

Зв'язок між регулярним поводженням $F(z)$ та існуванням кутової υ-щільності для класу $H_0(\upsilon)$ цілих функцій нульового порядку відносно повільно зростаючої функції порівняння $\upsilon(r)$ вивчено в [7].

Ми досліджуємо аналогічну задачу для функцій класу $H_0(\upsilon)$ з нулями на кр. пр. об.

2. Означення та формулювання результатів

Для $\varphi \in [-\pi, \pi)$, $1 \leqslant a < +\infty$ приймемо $l_\varphi^\gamma(a,r) = \left\{z = te^{i(\varphi+\gamma(t))} \colon a \leqslant t \leqslant r\right\}$, $l_\varphi^\gamma = l_\varphi^\gamma(1,+\infty)$, де $\gamma(t)$ – дійснозначна функція визначена на $[1,+\infty)$. Наслідуючи С. Балашова [2, с.604], назвемо l_φ^γ кривою правильного обертання (кр. пр. об.), якщо $\gamma(t)$ диференційовна на $[1,+\infty)$ функція така, що $\lim\limits_{t\to+\infty}(t\gamma'(t)) = c$, $-\infty < c < +\infty$. У випадку $\gamma(t) = c\ln t$ криву $l_\varphi^\gamma = l_\varphi^c$ називають логарифмічною спіраллю.

Нехай L – множина невід'ємних, неперервно-диференційовних, зростаючих до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функцій υ таких, що $r\upsilon'(r)/\upsilon(r) \to 0$ при $r \to +\infty$. Відомо, що з точністю до еквівалентних функцій, множина L збігається з класом повільно зростаючих функцій. Позначимо через $H_0(\upsilon)$ клас цілих функцій f нульового порядку, лічильна функція $n(r) = n(r,0,f)$ нулів яких задовольняє умову ($\upsilon \in L$)

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n(r)}{\upsilon(r)} < +\infty.$$

Нехай $D^\gamma(r;\alpha,\beta) = \bigcup\limits_{\alpha\leqslant\varphi<\beta} l_\varphi^\gamma(1,r)$ – криволінійний сектор, $-\pi \leqslant \alpha < \beta < \pi$, $n^\gamma(r;\alpha,\beta)$ – кількість нулів $f \in H_0(\upsilon)$ в $D^\gamma(r;\alpha,\beta)$.

Говоритимемо, що нулі $f \in H_0(\upsilon)$ мають υ-щільність $\Delta^\gamma(\alpha,\beta)$ по кр. пр. об. l_φ^γ, якщо для всіх α, β, $-\pi \leqslant \alpha < \beta < \pi$, за винятком, можливо, зліченної множини, існує границя

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{n^\gamma(r;\alpha,\beta)}{\upsilon(r)} = \Delta^\gamma(\alpha,\beta).$$

Для $\widetilde{\upsilon} \in L$ приймемо

$$\upsilon(r) = \int\limits_1^r \frac{\widetilde{\upsilon}(t)}{t}dt.$$

Легко бачити, що $\upsilon \in L$ і $\widetilde{\upsilon}(r) = o(\upsilon(r))$, $r \to +\infty$.

Говоритимемо, що множина $E \subset \mathbb{C}$ має верхню α-щільність η, $1 < \alpha \leqslant 2$, і писати $E \in C_\eta^\alpha$, якщо її можна покрити послідовністю кругів

$$C(z_k, r_k) = \{z \colon |z - z_k| < r_k\}$$

таких, що

$$D_\alpha(E) = \varlimsup_{r\to+\infty}\left(r^{-\alpha}\sum_{|z_k|\leqslant r} r_k^\alpha\right) = \eta, \quad 0 \leqslant \eta < +\infty.$$

Теорема 1. *Нехай $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$, нулі f мають υ-щільність $\Delta^{\gamma}(\alpha,\beta)$ по кр. пр. об. l^{γ}_{φ}. Тоді існує множина $E\in C^{\alpha}_0$, $1<\alpha\leqslant 2$, така, що*

$$F\left(re^{i(\varphi+\gamma(r))}\right)=n(r)+o(\upsilon(r)),\qquad r\to+\infty,\qquad re^{i(\varphi+\gamma(r))}\notin E. \tag{1}$$

3. Допоміжні результати

Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\upsilon(r)=0$ при $0\leqslant r\leqslant 1$, $\upsilon\in L$, і $f(0)=1$, $f\in H_0(\upsilon)$. Для доведення теорем будемо використовувати такі результати, які сформулюємо у вигляді лем.

Лема 1. *Нехай $\upsilon\in L$, $w=te^{i(-\pi+\gamma(t))}$, $0<\delta<1$, $\beta(t)-\gamma(t)\to 0$ при $t\to+\infty$, $\alpha(t)$ – кусково-неперервна, невід'ємна на $[1,+\infty)$ функція, $\alpha(t)\to 0$, $t\to+\infty$. Тоді для $z=re^{i(\varphi+\beta(r))}$, $-\pi<\varphi<\pi$, виконуються умови*

$$J_1=r\int\limits_1^{+\infty}\frac{\alpha(t)\upsilon(t)}{|w-z|^2}dt=o(\upsilon(r)),\qquad r\to+\infty; \tag{2}$$

$$J_2=\int\limits_1^{r}\frac{\alpha(t)\upsilon(t)}{|w-z|}dt=o(\upsilon(r)),\qquad r\to+\infty; \tag{3}$$

$$J_3=r\int\limits_r^{+\infty}\frac{\alpha(t)\upsilon(t)}{t|w-z|}dt=o(\upsilon(r)),\qquad r\to+\infty; \tag{4}$$

причому співвідношення (2)-(4) *виконуються рівномірно щодо* $\varphi\in[-\pi+\delta,\pi-\delta]$.

Доведення. Нехай $\varepsilon>0$ довільне число, $K_1,K_2,\ldots$ – додатні сталі. Приймемо $\eta=e^{-\delta/(4|c|)}$, де $c=\lim\limits_{t\to+\infty}(t\gamma'(t))$. Якщо $c=0$, то приймемо $\eta=1/2$. Маємо

$$J_1=r\left(\int\limits_1^{\eta r}+\int\limits_{\eta r}^{r/\eta}+\int\limits_{r/\eta}^{+\infty}\right)\frac{\alpha(t)\upsilon(t)}{|w-z|^2}dt=J_1'+J_1''+J_1'''.$$

Оскільки $|w-z|\geqslant||w|-|z||=|t-r|$, $\int\limits_1^{r}\alpha(t)dt=o(r)$, $r\to+\infty$, то

$$J_1'\leqslant r\int\limits_1^{\eta r}\frac{\alpha(t)\upsilon(t)}{(r-t)^2}dt\leqslant\int\limits_1^{\eta r}\frac{\alpha(t)\upsilon(t)}{r(1-\eta)^2}dt\leqslant K_1\frac{\upsilon(r)}{r}\int\limits_1^{\eta r}\alpha(t)dt<\frac{\varepsilon}{3}\upsilon(r)\quad\text{при}\quad r\geqslant r_1.$$

Аналогічно

$$J_1'''\leqslant r\int\limits_{r/\eta}^{+\infty}\frac{\alpha(t)\upsilon(t)}{t^2(1-\eta)^2}dt<\frac{\varepsilon}{3}\upsilon(r)\quad\text{при}\quad r\geqslant r_2,$$

бо $\int\limits_\tau^{+\infty}\frac{\alpha(t)\upsilon(t)}{t^2}dt=o\left(\frac{\upsilon(\tau)}{\tau}\right)$, $\tau\to+\infty$.

Враховуючи, що для довільного $b>0$ [2, с. 605] $\lim\limits_{x\to+\infty}(\gamma(bx)-\gamma(x))=c\ln b$, для $t\in[\eta r, r/\eta]$ маємо

$$\widetilde{\varphi}=\varphi+\beta(r)-\gamma(t)=\varphi+(\beta(r)-\gamma(r))+(\gamma(r)-\gamma(t))\to\varphi+c\ln b^*$$

при $r\to+\infty$, $b^*\in[\eta,1/\eta]$. Для $\varphi\in[-\pi+\delta,\pi-\delta]$ при $r\geqslant r_3$

$$\widetilde{\varphi}\geqslant\left(\varphi+c\ln\frac{r}{t}\right)-\frac{\delta}{2}\geqslant-\pi+\frac{\delta}{2}-|c\ln\eta|=-\pi+\frac{\delta}{2}-|c|\ln e^{\delta/(4|c|)}=-\pi+\frac{\delta}{4},$$

$$\widetilde{\varphi}\leqslant\left(\varphi+c\ln\frac{r}{t}\right)+\frac{\delta}{2}\leqslant\pi-\frac{\delta}{2}+|c|\ln e^{\delta/(4|c|)}=\pi-\frac{\delta}{4}.$$

Отже, $|\widetilde{\varphi}|\leqslant\pi-\dfrac{\delta}{4}$ і, враховуючи нерівність

$$\left|t+re^{i\theta}\right|\geqslant(t+r)\sin(\delta_1/2)$$

для $|\theta|\leqslant\pi-\delta_1$, $0<\delta_1<1$ (див., наприклад, [8, с. 92]), отримуємо

$$|w-z|=\left|te^{i(-\pi+\gamma(t))}-re^{i(\varphi+\beta(r))}\right|=\left|t+re^{i\widetilde{\varphi}}\right|\geqslant(t+r)\sin\frac{\delta}{8}.$$

Приймемо $\alpha^*(r)=\sup\{\alpha(t)\colon \eta r\leqslant t\leqslant r/\eta\}$. Тоді

$$J_1''\leqslant r\int\limits_{\eta r}^{r/\eta}\frac{\alpha(t)\upsilon(t)dt}{(t+r)^2\sin^2(\delta/8)}\leqslant\frac{\alpha^*(r)\upsilon(r/\eta)r}{\sin^2(\delta/8)}\int\limits_{\eta r}^{r/\eta}t^{-2}dt=$$

$$=K_2\alpha^*(r)\upsilon(r)<\frac{\varepsilon}{3}\upsilon(r)\text{ при }r\geqslant r_4.$$

З оцінок для J_1', J_1'', J_1''' отримуємо $J_1<\varepsilon\upsilon(r)$ при $r\geqslant r_5=\max\{r_j\colon 1\leqslant j\leqslant 4\}$ і $\varphi\in[-\pi+\delta/8,\pi-\delta/8]$. Співвідношення (3) та (4) доводяться аналогічно. Лему 1 доведено. □

Приймемо для $\upsilon\in L$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,

$$A_k(\tau,\upsilon)=\int\limits_1^{\tau}\upsilon(t)t^ke^{i(k+1)\gamma(t)}dt,$$

$$B_k(\tau,\upsilon)=\int\limits_{\tau}^{+\infty}\upsilon(t)t^{-k-2}e^{-i(k+1)\gamma(t)}dt,$$

де $t\gamma'(t)=c+\alpha(t)$, $\alpha(t)\to0$ при $t\to+\infty$.

Лема 2. *Якщо* $\widetilde{\upsilon}\in L$, *то*

$$A_k(\tau,\upsilon)=\frac{1}{1+ic}\left(\frac{\upsilon(\tau)\tau^{k+1}e^{i(k+1)\gamma(\tau)}}{k+1}-\frac{1}{k+1}A_k(\tau,\widetilde{\upsilon})-iA_k(\tau,\upsilon\alpha)\right),\tag{5}$$

$$B_k(\tau,\upsilon)=\frac{1}{1+ic}\left(\frac{\upsilon(\tau)\tau^{-k-1}e^{-i(k+1)\gamma(\tau)}}{k+1}+\frac{1}{k+1}B_k(\tau,\widetilde{\upsilon})-iB_k(\tau,\upsilon\alpha)\right).\tag{6}$$

Доведення. Інтегруючи частинами, отримуємо

$$A_k(\tau,\upsilon) = \frac{\upsilon(t)t^{k+1}}{k+1}e^{i(k+1)\gamma(t)}\Big|_1^\tau - \frac{1}{k+1}\int_1^\tau t^{k+1}e^{i(k+1)\gamma(t)}(\upsilon'(t)+i(k+1)\gamma'(t)\upsilon(t))dt =$$

$$= \frac{\upsilon(\tau)\tau^{k+1}e^{i(k+1)\gamma(\tau)}}{k+1} - \frac{1}{k+1}\int_1^\tau (t\upsilon'(t))t^k e^{i(k+1)\gamma(t)}dt - i\int_1^\tau \upsilon(t)(t\gamma'(t))t^k e^{i(k+1)\gamma(t)}dt =$$

$$= \frac{\upsilon(\tau)\tau^{k+1}e^{i(k+1)\gamma(\tau)}}{k+1} - \frac{1}{k+1}A_k(\tau,\widetilde{\upsilon}) - icA_k(\tau,\upsilon) - iA_k(\tau,\upsilon\alpha).$$

Перенісши вираз $(-icA_k(\tau,\upsilon))$ в ліву частину рівності і розділивши обидві частини на множник $(1+ic)$, одержуємо (5).

Співвідношення (6) отримуємо аналогічно. Лему 2 доведено. □

Лема 3. *Нехай* $\upsilon \in L$, $w \in l^\gamma_{-\pi}$, $\beta(r)-\gamma(r) \to 0$ *при* $r \to +\infty$, $0<\delta<1$. *Тоді для* $z = re^{i(\varphi+\beta(r))}$ *рівномірно щодо* $\varphi \in [-\pi+\delta, \pi-\delta]$ *виконується* $(r \to +\infty)$

$$(7)\quad I_1 = z\int_{l^\gamma_{-\pi}(1,r)} \frac{\upsilon(|w|)dw}{(z-w)^2} = (1+ic)\lim_{\varepsilon\to0+}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{z^{k+1}}A_k\left((1-\varepsilon)r,\upsilon\right)+o(\upsilon(r));$$

$$(8)\quad I_2 = z\int_{l^\gamma_{-\pi}(r,+\infty)} \frac{\upsilon(|w|)dw}{(z-w)^2} = (1+ic)\lim_{\varepsilon\to0+}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{z^{-k-1}}B_k\left((1+\varepsilon)r,\upsilon\right)+o(\upsilon(r));$$

$$(9)\quad I_3 = \int_{l^\gamma_{-\pi}(1,r)} \frac{\upsilon(|w|)dw}{z-w} = (1+ic)\lim_{\varepsilon\to0+}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{z^{k+1}}A_k\left((1-\varepsilon)r,\upsilon\right)+o(\upsilon(r));$$

$$(10)\quad I_4 = z\int_{l^\gamma_{-\pi}(r,+\infty)} \frac{\upsilon(|w|)dw}{w(z-w)} = (1+ic)\lim_{\varepsilon\to0}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k}}{z^{-k-1}}B_k\left((1+\varepsilon)r,\upsilon\right)+o(\upsilon(r)).$$

Доведення. Маємо $w = te^{i(-\pi+\gamma(t))}$, $dw = (1+i\gamma'(t)t)e^{i(-\pi+\gamma(t))}dt$ і тому

$$I_1 = z\int_1^r \frac{\upsilon(t)(1+it\gamma'(t))e^{i(-\pi+\gamma(t))}}{z^2\left(1-\frac{w}{z}\right)^2}dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0+}\int_1^{(1-\varepsilon)r}\left(\frac{\upsilon(t)(1+ic+i\alpha(t))e^{i(-\pi+\gamma(t))}}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\left(\frac{w}{z}\right)^k\right)dt =$$

$$= (1+ic)\lim_{\varepsilon\to0+}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{z^{k+1}}\int_1^{(1-\varepsilon)r}\upsilon(t)t^k e^{i(k+1)\gamma(t)}dt + iz\int_1^r\frac{\upsilon(t)\alpha(t)e^{i(-\pi+\gamma(t))}}{(z-w)^2}dt =$$

$$= (1+ic)\lim_{\varepsilon\to0+}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{z^{k+1}}A_k\left((1-\varepsilon)r,\upsilon\right)+o(\upsilon(r)),\quad r\to+\infty,$$

бо за лемою 1 рівномірно щодо $\varphi \in [-\pi+\delta, \pi-\delta]$

$$\left| iz\int\limits_1^r \frac{\upsilon(t)\alpha(t)e^{i(-\pi+\gamma(t))}}{(z-w)^2}dt \right| \leqslant r\int\limits_1^{+\infty} \frac{\alpha(t)\upsilon(t)}{|z-w|^2}dt = o(\upsilon(r)),\ r\to+\infty.$$

Аналогічно

$$I_2 = z\int\limits_r^{+\infty} \frac{\upsilon(t)(1+ic+i\alpha(t))e^{i(-\pi+\gamma(t))}}{w^2\left(1-\dfrac{z}{w}\right)^2}dt =$$

$$= (1+ic)z\int\limits_r^{+\infty}\left(\frac{\upsilon(t)e^{i(-\pi+\gamma(t))}}{w^2}\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\left(\frac{z}{w}\right)^k\right)dt + iz\int\limits_r^{+\infty}\frac{\upsilon(t)\alpha(t)e^{i(-\pi+\gamma(t))}}{(z-w)^2}dt =$$

$$= (1+ic)\lim_{\varepsilon\to0+}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{z^{-k-1}}\int\limits_{(1+\varepsilon)r}^{+\infty}\upsilon(t)t^{-k-2}e^{-i(k+1)\gamma(t)}dt\right) + o(\upsilon(r)) =$$

$$= (1+ic)\lim_{\varepsilon\to0+}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{z^{-k-1}}B_k\left((1+\varepsilon)r,\upsilon\right) + o(\upsilon(r)),\ r\to+\infty,$$

бо за лемою 1 рівномірно щодо $\varphi \in [-\pi+\delta, \pi-\delta]$

$$\left| iz\int\limits_r^{+\infty} \frac{\upsilon(t)\alpha(t)e^{i(-\pi+\gamma(t))}}{(z-w)^2}dt \right| \leqslant r\int\limits_1^{+\infty} \frac{\alpha(t)\upsilon(t)}{|z-w|^2}dt = o(\upsilon(r)),\ r\to+\infty.$$

Співвідношення (9) і (10) доводяться подібно. Лему 3 доведено. □

Лема 4 ([9, с. 238]). *Нехай $\upsilon \in L$, $f_1, f_2 \in H_0(\upsilon)$, послідовності нулів $(a_{1,k})$, $(a_{2,k})$, відповідно, функцій f_1, f_2 мають υ-щільність, тобто існують границі $\Delta = \lim\limits_{r\to\infty} n(r,0,f_j)/\upsilon(r)$ $(j=1,2)$, $|a_{1,k}| = |a_{2,k}|$, $|arg\ a_{1,k} - arg\ a_{2,k}| < \delta$. Тоді для будь-яких $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $1 < \alpha \leqslant 2$ існують $\delta > 0$ і така множина $E \in C^\alpha_\eta$, що*

$$|F_1(z) - F_2(z)| < \varepsilon\upsilon(r), \qquad z \notin E.$$

4. Доведення теореми 1

Припустимо спочатку, що нулі $f \in H_0(\upsilon)$, $\upsilon \in L$, розташовані на кр. пр. об. $l^\gamma_{-\pi}$. Якщо $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ – послідовність нулів функції f, де

$$1 \leqslant |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots \leqslant |a_n| \leqslant \ldots \to +\infty,$$

то f можна зобразити у вигляді

$$f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right).$$

Тому

$$\ln f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{z}{a_n}\right),$$

де $\ln\left(1-\dfrac{z}{a_n}\right)$ однозначна гілка в $(\mathbb{C}\setminus l^{\gamma}_{-\pi})$ багатозначної функції $\mathrm{Ln}\left(1-\dfrac{z}{a_n}\right)$ така, що $\ln\left(1-\dfrac{z}{a_n}\right)\Big|_{z=0}=0$. Для $z=re^{i(\varphi+\beta(r))}$, $-\pi<\varphi<\pi$, маємо

$$F(z)=z\frac{f'(z)}{f(z)}=z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z-a_n}=z\int\limits_{l^{\gamma}_{-\pi}}\frac{1}{z-w}dn(|w|)=$$

$$=\frac{z}{z-w}n(|w|)\Big|_{l^{\gamma}_{-\pi}}-z\int\limits_{l^{\gamma}_{-\pi}}\frac{n(|w|)}{(z-w)^2}dw=$$

$$=-z\int\limits_{l^{\gamma}_{-\pi}}\frac{n(|w|)-\upsilon(|w|)}{(z-w)^2}dw-z\int\limits_{l^{\gamma}_{-\pi}}\frac{\upsilon(|w|)}{(z-w)^2}dw=\widetilde{J}_1+\widetilde{J}_2. \tag{11}$$

Оскільки за умовою теореми $n(r)=\upsilon(r)+\varepsilon(r)$, де $\varepsilon(r)\to 0$ при $r\to+\infty$, то за лемою 1 отримуємо

$$|\widetilde{J}_1|=\left|-z\int_1^{+\infty}\frac{\varepsilon(t)\upsilon(t)(1+it\gamma'(t))e^{i(-\pi+\gamma(t))}dt}{(z-w)^2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant K_3 r\int_1^{+\infty}\frac{|\varepsilon(t)|\upsilon(t)}{|z-w|^2}dt=o(\upsilon(r)),\ \ r\to+\infty.$$

Далі, за лемами 3 і 2 маємо

$$\widetilde{J}_2=-I_1-I_2=\lim_{\varepsilon\to 0+}\sum_{k=0}^{+\infty}\left\{\frac{(-1)^k(k+1)}{z^{k+1}}\left(\frac{\upsilon((1-\varepsilon)r)(1-\varepsilon)^{k+1}r^{k+1}}{k+1}e^{i(k+1)\gamma((1-\varepsilon)r)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{k+1}A_k((1-\varepsilon)r,\widetilde{\upsilon})-iA_k((1-\varepsilon)r,\upsilon\alpha)\right)\right\}+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0+}\sum_{k=0}^{+\infty}\left\{\frac{(-1)^k(k+1)}{z^{-k-1}}\left(\frac{\upsilon((1+\varepsilon)r)e^{-i(k+1)\gamma((1+\varepsilon)r)}}{(1+\varepsilon)^{k+1}r^{k+1}(k+1)}+\frac{1}{k+1}B_k((1+\varepsilon)r,\widetilde{\upsilon})-\right.\right.$$

$$\left.\left.-iB_k((1+\varepsilon)r,\upsilon\alpha)\right)\right\}+o(\upsilon(r))=\upsilon(r)\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{(1-\varepsilon)e^{i(\gamma((1-\varepsilon)r)-\beta(r))}}{1+(1-\varepsilon)e^{i(\gamma((1-\varepsilon)r)-\beta(r))}}+$$

$$+\frac{1}{1+ic}\int\limits_{l^{\gamma}_{-\pi}(1,r)}\frac{\widetilde{\upsilon}(|w|)}{z-w}dw+\frac{iz}{1+ic}\int\limits_{l^{\gamma}_{-\pi}(1,r)}\frac{\upsilon(|w|)\alpha(|w|)}{(z-w)^2}dw+$$

$$+\upsilon(r)\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{e^{-i(\gamma((1+\varepsilon)r)-\beta(r))}}{1+\varepsilon)+e^{-i(\gamma((1+\varepsilon)r)-\beta(r))}}+\frac{z}{1+ic}\int\limits_{l^{\gamma}_{-\pi}(r,+\infty)}\frac{\widetilde{\upsilon}(|w|)}{w(w-z)}dw+$$

$$+\frac{iz}{1+ic}\int\limits_{l^{\gamma}_{-\pi}(r,+\infty)}\frac{\upsilon(|w|)\alpha(|w|)}{(z-w)^2}dw+o(\upsilon(r))=\frac{e^{i(\gamma(r)-\beta(r))}\upsilon(r)}{1+e^{i(\gamma(r)-\beta(r))}}+\frac{1}{1+ic}\widetilde{J}_2'+\frac{i}{1+ic}\widetilde{J}_2''+$$

$$+\frac{e^{-i(\gamma(r)-\beta(r))}\upsilon(r)}{1+e^{-i(\gamma(r)-\beta(r))}}+\frac{1}{1+ic}\widetilde{J}_2^{*}+\frac{i}{1+ic}\widetilde{J}_2^{**}+o(\upsilon(r))=\upsilon(r)+o(\upsilon(r)),\quad r\to+\infty,$$

бо завдяки лемі 1 ($\widetilde{\upsilon}(t)=\delta(t)\upsilon(t),\ \delta(t)\to 0,\ t\to+\infty$)

$$|\widetilde{J}_2'|\leqslant\int\limits_1^r\frac{|\delta(t)|\upsilon(t)}{|w-z|}dt=o(\upsilon(r)),\ r\to+\infty,$$

$$|\widetilde{J}_2''|\leqslant r\int\limits_1^r\frac{|\alpha(t)|\upsilon(t)}{|z-w|^2}dt=o(\upsilon(r)),\ r\to+\infty,$$

$$|\widetilde{J}_2^*|\leqslant r\int\limits_r^{+\infty}\frac{|\delta(t)|\upsilon(t)}{t|w-z|}dt=o(\upsilon(r)),\ r\to+\infty,$$

$$|\widetilde{J}_2^{**}|\leqslant r\int\limits_r^{+\infty}\frac{|\alpha(t)|\upsilon(t)}{|z-w|^2}dt=o(\upsilon(r)),\ r\to+\infty.$$

Отже, враховуючи рівності для $\widetilde{J}_1$ та $\widetilde{J}_2$ з (11) для $-\pi<\varphi<\pi$, отримуємо

$$F\left(re^{i(\varphi+\beta(r))}\right)=\upsilon(r)+o(\upsilon(r)),\ r\to+\infty.$$

У випадку, коли всі нулі $f\in H_0(\upsilon)$ розташовані на скінченній системі $\left(l_{\varphi_j}^{\gamma}\right)_{j=1}^{k}$ кр. пр. об., $-\pi\leqslant\varphi_1<\varphi_2<\ldots<\varphi_k<\pi$, функцію f зобразимо у вигляді

$$f(z)=f_1(z)\cdot\ldots\cdot f_k(z),$$

де $f_j\in H_0(\upsilon)$, нулі f_j лежать на $l_{\varphi_j}^{\gamma}$, $n(r,0,f_j)=\Delta_j\upsilon(r)+o(\upsilon(r))$, $r\to+\infty$, $j=\overline{1,k}$, $0\leqslant\Delta_j<1$, $\Delta_1+\ldots+\Delta_k=1$. Тоді $\ln f=\ln f_1+\ldots+\ln f_k$ і для $\varphi\neq\varphi_j$, $j=\overline{1,k}$, маємо

$$F\left(re^{i(\varphi+\gamma(r))}\right)=\sum_{j=1}^{k}F_j\left(re^{i(\varphi+\gamma(r))}\right)=$$
$$=\sum_{j=1}^{k}\Delta_j\upsilon(r)+o(\upsilon(r))=$$
$$=\upsilon(r)+o(\upsilon(r)),\qquad r\to+\infty,\tag{12}$$

причому (12) виконується рівномірно щодо $\varphi\in[-\pi,\pi)\setminus\bigcup_{j=1}^{k}\{\varphi\colon|\varphi-\varphi_j|\geqslant\widetilde{\delta}\}$, де $\widetilde{\delta}>0$ достатньо мале число. Перехід до загального випадку виконуємо, використовуючи лему 4 і міркування аналогічні до [4, с. 348–349], [9, с. 240–241] та [5, с. 71].

Список використаної літератури

1. A. Macintyre, *Laplace's transformation and integrul functions*, Proc. London Math. Soc. (2) **45** (1939), no. 1, 1–20. DOI: 10.1112/plms/s2-45.1.1
2. С. К. Балашов, *О целых функциях конечного порядка с корнями на кривых правильного вращения*, Изв. АН СССР, Сер. матем. **37** (1973), no. 3, 603–629; **English version:**

S. K. Balašov, *On entire functions of finite order with zeros on curves of regular rotation*, Math. USSR-Izv. **7** (1973), no. 3, 601–627. DOI: 10.1070/IM1973v007n03ABEH001963

3. А. И. Хейфиц, *Аналог теоремы Валирона-Титчмарша для целых функций с корнями на логарифмической спирали*, Изв. вузов. Матем. (1980), no. 12, 74–75; **English version:** A. I. Kheifits, *Analogue of the Valiron–Titchmarsh theorem for entire functions with roots on a logarithmic spiral*, Soviet Math. (Iz. VUZ), **24** (1980), no. 12, 92–94.
4. С. К. Балашов, *О функциях вполне регулярного роста по кривым правильного вращения*, Изв. АН СССР, Сер. матем. **40** (1976), no. 2, 338–354; **English version:** S. K. Balašov, *On entire functions of completely regular growth along curves of regular rotation*, Math. USSR-Izv. **10** (1976), no. 2, 321–338. DOI: 10.1070/IM1976v010n02ABEH001691
5. А. А. Гольдберг, Н. Е. Коренков, *Асимптотика логарифмической производной целой функции вполне регулярного роста*, Сиб. мат. журн. **21** (1980), no. 3, 63–79; **English version:** A. A. Gol'dberg and N. E. Korenkov, *Asymptotic behavior of logarithmic derivative of entire function of completely regular growth*, Sib. Math. J. **21** (1980), no. 3, 363–375. DOI: 10.1007/BF00968180
6. А. А. Гольдберг, Н. Н. Строчик, *Асимптотическое поведение мероморфных функций вполне регулярного роста и их логарифмических производных*, Сиб. мат. журн. **26** (1985), no. 6, 29–38; **English version:** A. A. Gol'dberg and N. N. Strochik, *Asymptotic behavior of meromorphic functions of completely regular growth and of their logarithmic derivatives*, Sib. Math. J. **26** (1985), no. 6, 802–809. DOI: 10.1007/BF00969100
7. М. В. Заболоцький, М. Р. Мостова, *Логарифмічна похідна і кутова щільність нулів цілої функції нульового порядку*, Укр. мат. журн. **66** (2014), no. 4, 473–481; **English version:** M. V. Zabolots'kyi and M. R. Mostova, *Logarithmic derivative and the angular density of zeros for a zero-order entire function*, Ukr. Math. J. **66** (2014), no. 4, 530–540. DOI: 10.1007/s11253-014-0950-7
8. А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций*, Наука, Москва, 1970, 592 с.
9. М. В. Заболоцький, М. Р. Мостова, *Асимптотичне поводження логарифмічної похідної цілих функцій нульового порядку*, Карпатські. матем. публ. **6** (2014), no. 2, 237–241. DOI: 10.15330/cmp.6.2.237-241

Стаття: надійшла до редколегії 22.04.2019
доопрацьована 11.06.2019
прийнята до друку 13.11.2019

THE LOGARITHMIC DERIVATIVE OF ENTIRE FUNCTIONS WITH v-DENSITY OF ZEROS ALONG CURVES OF REGULAR ROTATION

Mykola ZABOLOTSKYI[1], Yuliia BASIUK[1], Yuriy GAL[2], Sviatoslav TARASYUK[1],

[1]*Ivan Franko National University of Lviv,*
Universitetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
[2]*Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University,*
Ivan Franko Str., 24, 82100, Drohobych, Ukraine
e-mail: mykola.zabolotskyy@lnu.edu.ua, yuliya.basyuk.92@gmail.com,
yuriyhal@gmail.com, svt.tarasyuk@gmail.com

Asymptotic of the logarithmic derivative of a zero order entire function with v-density of zeros along curves of regular rotation is found.

Key words: entire function, zero order, logarithmic derivative, curves of regular rotation, density.