ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 86. C. 77–90
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 86. P. 77–90
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.86.077-090

УДК 512.53

ІНТЕРАСОЦІАТИВНОСТІ ПОЛІЦИКЛІЧНОГО МОНОЇДА

Присвячується 60-ти річчю проф. М. М. Зарічного

Маркіян ХИЛИНСЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: khymarkyan@gmail.com

Досліджено властивості інтерасоціативностей поліциклічного моноїда P_λ. Описано відношення Гріна на інтерасоціативності поліциклічного моноїда $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$, а також доведено критерій, коли його дві інтерасоціативності є ізоморфними.

Ключові слова: поліциклічний моноїд, інтерасоціативність, відношення Гріна, ізоморфізм, антиізоморфізм.

1. Термінологія та означення

Напівгрупа – це непорожня множина з визначеною на ній бінарною асоціативною операцією.

Напівгрупа S називається:

- *простою*, якщо S не має власних двобічних ідеалів;
- 0-*простою*, якщо S містить нуль і S не має власних двобічних ідеалів відмінних від $\{0\}$;
- *біпростою*, якщо S містить єдиний $\mathscr{D}-$клас;
- 0-*біпростою*, якщо S має нуль і S містить два $\mathscr{D}-$класи: $\{0\}$ і $S \setminus \{0\}$;
- *конгруенц-простою*, якщо S має лише одиничну й універсальну конгруенції;
- *інверсною*, якщо для довільного елемента $x \in S$ існує єдиний елемент $y \in S$ такий, що $xyx = x$ і $yxy = y$.

2010 Mathematics Subject Classification: 20M05, 20M10, 20M15

Якщо S — напівгрупа, то відношення Ґріна $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{D}$ і $\mathscr{H}$ на S визначаються так (див. [33, §2.1]):

$$a\mathscr{R}b \text{ тоді і лише тоді, коли } aS^1 = bS^1;$$
$$a\mathscr{L}b \text{ тоді і лише тоді, коли } S^1a = S^1b;$$
$$a\mathscr{J}b \text{ тоді і лише тоді, коли } S^1aS^1 = S^1bS^1;$$
$$\mathscr{D} = \mathscr{L} \circ \mathscr{R} = \mathscr{R} \circ \mathscr{L};$$
$$\mathscr{H} = \mathscr{L} \cap \mathscr{R}.$$

Для будь-якого $a \in S$ через $R_a(S)$, $L_a(S)$, $H_a(S)$, $D_a(S)$ і $J_a(S)$ позначимо $\mathscr{R}-$, $\mathscr{L}-$, $\mathscr{H}-$, $\mathscr{D}-$ і $\mathscr{J}-$клас, який містить елемент a, відповідно. Через $R(a), L(a), J(a)$ позначимо правий (лівий, двобічний) головний ідеал, породжений елементом a. Нагадаємо (див. [29, с. 82–83]), що інверсна напівгрупа S називається *комбінаторною*, якщо відношення Ґріна $\mathscr{H}$ на S є відношенням рівності.

Нехай S напівгрупа. Через $E(S)$ позначимо множину ідемпотентів в S. Напівгрупова операція визначає частковий порядок $\leqslant$ на $E(S)$ так:

$$e \leqslant f \text{ тоді і лише тоді, коли } ef = fe = e.$$

Цей порядок називається *природним частковим порядком* на $E(S)$. *Напівґратка* – це комутативна напівгрупа ідемпотентів.

Біциклічний моноїд $\mathscr{C}(p,q)$ – це напівгрупа з одиницею 1 породжена двома елементами p і q, що задовольняють умову $pq = 1$. На напівгрупі $\mathscr{C}(p,q)$ операція визначається так:

$$q^kp^l \cdot q^mp^n = q^{k+m-\min\{i,m\}}p^{l+n-\min\{l,m\}}.$$

Відомий результат Андерсена [1] стверджує, що (0–)проста напівгрупа з ідемпотентом є цілком (0–)простою тоді і лише тоді, коли вона не містить ізоморфної копії біциклічної напівгрупи. Біциклічний моноїд допускає лише дискретну напівгрупову гаусдорфову топологію [17].

У1970 році Ніва і Перро запропонували таке узагальнення біциклічного моноїда ([29], [32]). Для будь-якого ненульового кардинала λ, λ-поліциклічний моноїд P_λ є напівгрупою з нулем визначеною такими співвідношеннями:

$$P_\lambda = \left\langle \{p_i\}_{i\in\lambda}, \{p_i^{-1}\}_{i\in\lambda} \mid p_ip_i^{-1} = 1, p_ip_j^{-1} = 0 \text{ для } i \neq j \right\rangle.$$

Очевидно, що у випадку, коли $\lambda = 1$ напівгрупа P_1 ізоморфна біциклічному моноїду з приєднаним нулем. У [3] доведено, що поліциклічний моноїд є універсальним об'єктом у класі інверсних напівгруп над орієнтованими графами. Зокрема, доведено, що кожна інверсна напівгрупа $G(E)$ над орієнтованим графом E вкладається в поліциклічний моноїд P_λ, де $\lambda = |G(E)|$. Напігрупові та трансляційно неперервні топологізації λ-поліциклічного моноїда, його повнота та занурення вивчали у [2, 4, 5].

Варіантом напівгрупи S стосовно елемента $a \in S$ називається напівгрупа $S^a = (S, *_a)$ з сендвіч-операцією $x *_a y = xay$. Варіанти напівгруп першим почав вивчати Хікі в праці [23]. *Інтерасоціативністю* напівгрупи $(S,\cdot)$ називається напівгрупа $(S,*)$ така, що $a\cdot(b*c) = (a\cdot b)*c$ і $a*(b\cdot c) = (a*b)\cdot c$ для будь-яких $a,b,c \in S$. Інтерасоціативності напівгруп вивчали Бойд, Гольд і Нельсон [6] у 1996 році. Вони довели, що кожна інтерасоціативність моноїда є варіантом. Крім того, кожна інтерасоціативність цілком простої напівгрупи є цілком простою напівгрупою. Також легко довести, що кожна інтерасоціативність групи ізоморфна цій групі. В [20] розглянуто алгебричні властивості інтерасоціативностей біциклічного моноїда. Зокрема, доведено, що будь-які дві його інтерасоціативності не є ізоморфними. Трансляційно неперервні топологізації інтерасоціативностей біциклічного моноїда вивчали в [21]. Варіантам розширеного біциклічного моноїда та їхніми напівгруповим топологізаціям присвячена праця [22]. Варіанти напівгруп бінарних відношень вивчали в працях Хасе [7, 8, 9]. Варіантам напівгруп перетворень присвячені праці [14, 15, 16, 25, 30]. Багато авторів розробили загальну теорію варіантів різних класів напівгруп, див. зокрема [23, 24, 28]. Про сучасний стан варіантів скінченних повних напівгруп перетворень для подальших посилань та історичних дискусій див. [14] і [19, розділ 13]. Варіанти напівґраток вивчали в [10, 18]. Статті [11, 12, 13, 14] започаткували вивчення варіантів напівгруп у довільних (локально малих) категоріях.

Нехай λ – довільний кардинал. Через λ^* будемо позначати вільний моноїд над алфавітом λ, через ε – пусте слово в λ^*. Для кожного слова $a \in \lambda^*$ введемо такі позначення:

$\operatorname{pref}(a) = \{b \in \lambda^* \mid \exists c \in \lambda^* \quad bc = a\}$ – множина всіх префіксів слова a;

$\operatorname{pref}^{\circ}(a) = \{b \in \lambda^* \mid \exists c \in \lambda^* \backslash \{\varepsilon\}\ bc = a\}$ – множина всіх власних префіксів слова a;

$\operatorname{suff}(a) = \{b \in \lambda^* \mid \exists c \in \lambda^* \quad cb = a\}$ – множина всіх суфіксів слова a;

$\operatorname{suff}^{\circ}(a) = \{b \in \lambda^* \mid \exists c \in \lambda^* \setminus \{\varepsilon\}\ cb = a\}$ – множина всіх власних суфіксів слова a.

За лемою 2.4 з [4] (див. також [27, зауваження 2.6], [27, с. 453], [26, §2.1] і [29, твердження 9.3.1] у випадку скінченного кардинала) для довільного кардинала $\lambda \geqslant 2$ кожен ненульовий елемент x поліциклічного моноїда P_λ має зображення у вигляді $u^{-1}v$, де u і v — елементи вільного моноїда λ^*, і напівгрупова операція на P_λ у цьому зображенні визначається так:

$$a^{-1}b \cdot c^{-1}d = \begin{cases} (c_1a)^{-1}d, & \text{якщо} \quad c = c_1b \qquad \text{для деякого } c_1 \in \lambda^*; \\ a^{-1}b_1d, & \text{якщо} \quad b = b_1c \qquad \text{для деякого } b_1 \in \lambda^*; \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

і $a^{-1}b \cdot 0 = 0 \cdot a^{-1}b = 0 \cdot 0 = 0$.

Надалі λ – кардинал $\geqslant 2$ і $k_1^{-1}k_2$ – деякий ненульовий елемент напівгрупи P_λ. Оскільки P_λ — моноїд, то його інтерасоціативності є варіантами.

2. Деякі властивості інтерасоціативностей поліциклічного моноїда

Надалі для довільного кардинала $\lambda \geqslant 2$ і довільного елемента $k_1^{-1}k_2$ поліциклічного моноїда P_λ через $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ будемо позначати варіант поліциклічного моноїда з напівгруповою сендвіч-операцією

$$a^{-1}b *_{k_1^{-1}k_2} c^{-1}d = a^{-1}b \cdot k_1^{-1}k_2 \cdot c^{-1}d, \qquad a^{-1}b, c^{-1}d \in P_\lambda.$$

Твердження 1. *Ненульовий елемент* $a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ *є ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли існує слово* $b \in \lambda^*$ *таке, що* $a_1^{-1}a_2 = (bk_2)^{-1}bk_1$.

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $a_1^{-1}a_2$ – ненульовий ідемпотент в $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$. Розглянемо можливі випадки.

1. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $k_1 = ua_2$ і $a_1 = vk_2$. Тоді

$$\begin{aligned} a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 &= a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 = \\ &= a_1^{-1}a_2 \cdot a_2^{-1}u^{-1}k_2 \cdot k_2^{-1}v^{-1}a_2 = \\ &= a_1^{-1}u^{-1}v^{-1}a_2. \end{aligned}$$

З іншого боку, $a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 = a_1^{-1}a_2$, а тому $u^{-1}v^{-1} = \varepsilon$. Звідси випливає, що $u = \varepsilon$ і $v = \varepsilon$, а отже, $a_1 = k_2$, $a_2 = k_1$ і $b = \varepsilon$.

2. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $a_2 = uk_1$ і $a_1 = vk_2$. Тоді

$$\begin{aligned} a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 &= a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 = \\ &= a_1^{-1}uk_1 \cdot k_1^{-1}k_2 \cdot k_2^{-1}v^{-1}a_2 = \\ &= a_1^{-1}u \cdot v^{-1}a_2. \end{aligned}$$

Розглянемо можливі два підвипадки.

(a) Існує слово $w \in \lambda^*$ таке, що $u = wv$. Тоді $a_1^{-1}u \cdot v^{-1}a_2 = a_1^{-1}wa_2$. Оскільки $a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 = a_1^{-1}a_2$, то $w = \varepsilon$. Отож, $u = v = b$, а отже, $a_2 = bk_1$ і $a_1 = bk_2$.

(b) Існує слово $w \in \lambda^*$ таке, що $v = wu$. Тоді $a_1^{-1}u \cdot v^{-1}a_2 = a_1^{-1}w^{-1}a_2$. Оскільки $a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 = a_1^{-1}a_2$, то $w = \varepsilon$. Отож, $u = v = b$, а отже, $a_2 = bk_1$ і $a_1 = bk_2$.

3. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $k_1 = ua_2$ і $k_2 = va_1$. Тоді

$$\begin{aligned} a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 &= a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 = \\ &= a_1^{-1}a_2 \cdot a_2^{-1}u^{-1}va_1 \cdot a_1^{-1}a_2 = \\ &= a_1^{-1}u^{-1}va_2. \end{aligned}$$

З іншого боку, $a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 = a_1^{-1}a_2$, а тому $u^{-1}v = \varepsilon$. Звідси випливає, що $u = \varepsilon$ і $v = \varepsilon$, а отже, $a_1 = k_2$, $a_2 = k_1$ і $b = \varepsilon$.

4. Існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $a_2 = uk_1$ і $k_2 = va_1$. Тоді

$$\begin{aligned} a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 &= a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 = \\ &= a_1^{-1}uk_1 \cdot k_1^{-1}va_1 \cdot a_1^{-1}a_2 = \\ &= a_1^{-1}uva_2. \end{aligned}$$

З іншого боку, $a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 = a_1^{-1}a_2$, а тому $uv = \varepsilon$. Звідси випливає, що $u = \varepsilon$ і $v = \varepsilon$, а отже, $a_1 = k_2$, $a_2 = k_1$ і $b = \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Нехай $a_1^{-1}a_2 = (bk_2)^{-1}bk_1$, для деякого слова $b \in \lambda^*$. Тоді

$$a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 = (bk_2)^{-1}bk_1 \cdot k_1^{-1}k_2 \cdot (bk_2)^{-1}bk_1 = (bk_2)^{-1}bk_1 = a_1^{-1}a_2.$$

Отже, $a_1^{-1}a_2$ – ідемпотент напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$. $\square$

Наслідок 1. *Нехай $(ak_2)^{-1}ak_1, (bk_2)^{-1}bk_1$ – ідемпотенти напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$. Якщо існує слово $c \in \lambda^*$ таке, що $a = cb$, то*

$$(ak_2)^{-1}ak_1 *_{k_1^{-1}k_2} (bk_2)^{-1}bk_1 = (bk_2)^{-1}bk_1 *_{k_1^{-1}k_2} (ak_2)^{-1}ak_1 = (ak_2)^{-1}ak_1.$$

Лема 1. *Нехай $a_1^{-1}a_2, b_1^{-1}b_2$ – довільні елементи напівгрупи P_λ. Якщо $a_1^{-1} \cdot b_1^{-1}b_2 = c_1^{-1}c_2 \neq 0$, то $a_1 \in \operatorname{suff}(c_1)$ і $b_2 \in \operatorname{suff}(c_2)$.*

Доведення. Оскільки $a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2 \neq 0$, то можливі два випадки.

1. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_2 = ub_1$. Тоді

$$c_1^{-1}c_2 = a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2 = a_1^{-1}ub_1 \cdot b_1^{-1}b_2 = a_1^{-1}ub_2.$$

2. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $b_1 = ua_2$. Тоді

$$c_1^{-1}c_2 = a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2 = a_1^{-1}a_2 \cdot a_2^{-1}u^{-1}b_2 = a_1^{-1}u^{-1}b_2.$$

Отже, $a_1 \in \operatorname{suff}(c_1)$ і $b_2 \in \operatorname{suff}(c_2)$. □

Наслідок 2. *Нехай $a_1^{-1}a_2, b_1^{-1}b_2$ – довільні елементи напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$. Якщо $a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} b_1^{-1}b_2 = c_1^{-1}c_2 \neq 0$, то $a_1 \in \operatorname{suff}(c_1)$ і $b_2 \in \operatorname{suff}(c_2)$.*

Лема 2. *Якщо напівгрупа $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ містить одиничний елемент, то $k_1^{-1}k_2 = 1_{P_\lambda}$.*

Доведення. Нехай $e_1^{-1}e_2$ – одиничний елемент напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$. Тоді:

1) $1_{P_\lambda} = e_1^{-1}e_2 *_{k_1^{-1}k_2} 1_{P_\lambda} = e_1^{-1}e_2 \cdot k_1^{-1}k_2$, тому за лемою 1 матимемо, що $k_2 \in \operatorname{suff}(\varepsilon)$, а отже, $k_2 = \varepsilon$;
2) $1_{P_\lambda} = 1_{P_\lambda} *_{k_1^{-1}k_2} e_1^{-1}e_2 = k_1^{-1}k_2 \cdot e_1^{-1}e_2$, тому за лемою 1 маємо, що $k_1 \in \operatorname{suff}(\varepsilon)$, а отже, $k_1 = \varepsilon$.

Отож, отримуємо, що $k_1^{-1}k_2 = 1_{P_\lambda}$. □

Визначимо відображення $h : P_\lambda \to P_\lambda$ так: $h(a_1^{-1}a_2) = a_2^{-1}a_1$ і $h(0) = 0$ для довільного $a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda$.

Лема 3. *Для довільних $a_1^{-1}a_2, b_1^{-1}b_2 \in P_\lambda$ виконується рівність*

$$h(a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2) = b_2^{-1}b_1 \cdot a_2^{-1}a_1.$$

Доведення. Розглянемо можливі випадки.

1. $a_1^{-1}a_2 = 0$ або $b_1^{-1}b_2 = 0$, або $a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2 = 0$. Тоді

$$h(a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2) = h(0) = 0 = b_2^{-1}b_1 \cdot a_2^{-1}a_1.$$

2. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_2 = ub_1$. Тоді

$$h(a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2) = h(a_1^{-1}ub_1 \cdot b_1^{-1}b_2) = h(a_1^{-1}ub_2) = b_2^{-1}u^{-1}a_1 = b_2^{-1}b_1 \cdot b_1^{-1}u^{-1}a_1 =$$
$$= b_2^{-1}b_1 \cdot a_2^{-1}a_1.$$

3. Існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $b_1 = ua_2$. Тоді

$$h(a_1^{-1}a_2 \cdot b_1^{-1}b_2) = h(a_1^{-1}a_2 \cdot a_2^{-1}u^{-1}b_2) = h(a_1^{-1}u^{-1}b_2) = b_2^{-1}ua_1 =$$
$$= b_2^{-1}ua_2 \cdot a_2^{-1}a_1 = b_2^{-1}b_1 \cdot a_2^{-1}a_1.$$

□

Твердження 2. *Відображення h визначає антиізоморфізмом з напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ у напівгрупу $P_\lambda^{k_2^{-1}k_1}$.*

Доведення. Очевидно, що відображенням h є бієктивним. Покажемо, що воно є антигомоморфізмом. За лемою 3,

$$\begin{aligned} h(a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} b_1^{-1}b_2) &= h(a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \cdot b_1^{-1}b_2) = \\ &= h(k_1^{-1}k_2 \cdot b_1^{-1}b_2)h(a_1^{-1}a_2) = \\ &= h(b_1^{-1}b_2)h(k_1^{-1}k_2)h(a_1^{-1}a_2) = \\ &= h(b_1^{-1}b_2) \cdot k_2^{-1}k_1 \cdot h(a_1^{-1}a_2) = \\ &= h(b_1^{-1}b_2) *_{k_2^{-1}k_1} h(a_1^{-1}a_2), \end{aligned}$$

а отже, виконується твердження леми. □

Нехай $k_1^{-1}k_2, t_1^{-1}t_2 \in P_\lambda$. Позначимо через $P_\lambda(t_1^{-1}t_2, k_1^{-1}k_2)$ піднапівгрупу $\{(a_1t_1)^{-1}a_2t_2 \mid a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda\}$ напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$.

Твердження 3. *Нехай $k_1^{-1}k_2, t_1^{-1}t_2 \in P_\lambda$. Якщо існують слова $u, v \in \lambda^*$ такі, що $k_1 = t_1u$ і $k_2 = t_2v$, то напівгрупа $P_\lambda^{t_1^{-1}t_2}$ ізоморфна піднапівгрупі $P_\lambda(v^{-1}u, k_1^{-1}k_2)$ напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$.*

Доведення. Визначимо відображення $f : P_\lambda^{t_1^{-1}t_2} \to P_\lambda(v^{-1}u, k_1^{-1}k_2)$ так: $f(a_1^{-1}a_2) = (a_1v)^{-1}a_2u$ і $f(0) = 0$. Очевидно, що це відобаження бієктивне. Покажемо, що f – гомоморфізм. Для довільних $a_1^{-1}a_2, b_1^{-1}b_2 \in P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ маємо

$$\begin{aligned} f(a_1^{-1}a_2) *_{k_1^{-1}k_2} f(b_1^{-1}b_2) &= v^{-1}a_1^{-1}a_2u \cdot k_1^{-1}k_2 \cdot v^{-1}b_1^{-1}b_2u = \\ &= v^{-1}a_1^{-1}a_2u \cdot u^{-1}t_1^{-1}t_2v \cdot v^{-1}b_1^{-1}b_2u = \\ &= v^{-1}a_1^{-1}a_2 \cdot t_1^{-1}t_2 \cdot b_1^{-1}b_2u = \\ &= f(a_1^{-1}a_2 *_{t_1^{-1}t_2} b_1^{-1}b_2). \end{aligned}$$

Отже, відображення f є ізоморфізмом. □

У випадку $t_1^{-1}t_2 = 1_{P_\lambda}$ отримуємо такий наслідок.

Наслідок 3. *λ-поліциклічний моноїд P_λ ізоморфний піднапівгрупі $P_\lambda(k_2^{-1}k_1, k_1^{-1}k_2)$ напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$.*

З того, що всі ідемпотенти напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ належать піднапівгрупі $P_\lambda(k_2^{-1}k_1, k_1^{-1}k_2)$ випливає такий наслідок.

Наслідок 4. *Будь-які два ідемпотенти з напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ комутують.*

Твердження 4. *Елемент $a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ має інверсний тоді і тільки тоді, коли $a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda(k_2^{-1}k_1, k_1^{-1}k_2)$.*

Доведення. Якщо $a_1^{-1}a_2 = (b_1k_2)^{-1}b_2k_1 \in P_\lambda(k_2^{-1}k_1, k_1^{-1}k_2) \setminus \{0\}$, то інверсним до нього буде елемент $(b_2k_2)^{-1}b_1k_1$. Нехай $a_1^{-1}a_2 \notin P_\lambda(k_2^{-1}k_1, k_1^{-1}k_2)$. Тоді $c_1^{-1}c_2 *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} c_1^{-1}c_2 = 0$ для будь-якого $c_1^{-1}c_2 \in P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$. Тому $a_1^{-1}a_2$ не має інверсних елементів. □

Наслідок 5. *Піднапівгрупа $P_\lambda(k_2^{-1}k_1, k_1^{-1}k_2)$ напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ є найбільшою ізоморфною копією λ-поліциклічного моноїда.*

3. Відношення Ґріна на напівгрупі $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$

Твердження 5. *Нехай λ — довільний кардинал $\geqslant 2$. Тоді для довільного ненульового елемента $a_1^{-1}a_2$ напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ виконуються такі рівності:*

$$a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} = \begin{cases} a_1^{-1}u^{-1}P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}, & \text{якщо існує слово } u \in \lambda^* \text{ таке, що } k_1 = ua_2 \\ a_1^{-1}P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}, & \text{якщо існує слово } v \in \lambda^* \text{ таке, що } a_2 = vk_1 \\ \{0\}, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

і

$$P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 = \begin{cases} P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}ua_2, & \text{якщо існує слово } u \in \lambda^* \text{ таке, що } k_2 = ua_1 \\ P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}a_2, & \text{якщо існує слово } v \in \lambda^* \text{ таке, що } a_1 = vk_2 \\ \{0\}, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Доведення. Нехай $b_1^{-1}b_2 \in P_\lambda$. З теореми 1.17 [33] випливає, що

$$R_{P_\lambda}(b_1^{-1}b_2) = b_1^{-1}b_2P_\lambda = b_1^{-1}P_\lambda, \quad L_{P_\lambda}(b_1^{-1}b_2) = P_\lambda b_1^{-1}b_2 = P_\lambda b_2$$

і $b_1^{-1}b_1, b_2^{-1}b_2$ – єдині ідемпотенти, які породжують ідеали $R(b_1^{-1}b_2)$ і $L(b_1^{-1}b_2)$, відповідно. Враховуючи це і те, що

$$a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} = (a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2)P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$$

і

$$P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} *_{k_1^{-1}k_2} a_1^{-1}a_2 = P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}(k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2),$$

отримуємо відповідні рівності. □

Нехай S – напівгрупа. Для довільного $s \in S$ введемо такі позначення:

$$K_1^s = \{t \in S \mid ts\mathscr{R}t\},\ K_2^s = \{t \in S \mid st\mathscr{L}t\},\ K_3^s = \{t \in S \mid sts\mathscr{J}t\},\ K^s = K_1^s \cap K_2^s.$$

Ми використаємо таке твердження зі статті [14] для описання відношень Ґріна на напівгрупі $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$.

Твердження 6 ([14, твердження 3.2])**.** *Якщо $s \in S$, то*

1) $R_s(S^a) = \begin{cases} R_s(S) \cap K_1^a, & \text{якщо } s \in K_1^a \\ \{s\}, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$

2) $L_s(S^a) = \begin{cases} L_s(S) \cap K_2^s, & \text{якщо } s \in K_2^a \\ \{s\}, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$

3) $H_s(S^a) = \begin{cases} H_s(S), & \textit{якщо } s \in K^a \\ \{s\}, & \textit{в іншому випадку;} \end{cases}$

4) $D_s(S^a) = \begin{cases} D_s(S) \cap K^a, & \textit{якщо } s \in K^a \\ R_s(S^a), & \textit{якщо } s \in K_1^a \setminus K_2^a \\ L_s(S^a), & \textit{якщо } s \in K_2^a \setminus K_1^a \\ \{s\}, & \textit{в іншому випадку;} \end{cases}$

5) $J_s(S^a) = \begin{cases} J_s(S) \cap K_3^2, & \textit{якщо } s \in K_3^a \\ D_s(S^a), & \textit{в іншому випадку.} \end{cases}$

Наступна лема доведена в [4].

Лема 4. *Нехай λ — довільний кардинал $\geqslant 2$. Якщо $a_1^{-1}a_2, b_1^{-1}b_2 \in P_\lambda$, то:*

1) $a_1^{-1}a_2 \mathscr{R} b_1^{-1}b_2$ *тоді і тільки тоді, коли $a_1 = b_1$;*
2) $a_1^{-1}a_2 \mathscr{L} b_1^{-1}b_2$ *тоді і тільки тоді, коли $a_2 = b_2$;*
3) P_λ *– комбінаторна напівгрупа;*
4) P_λ *– 0-біпроста напівгрупа;*
5) P_λ *– 0-проста напівгрупа.*

Наступна теорема описує структуру відношень Ґріна на напівгрупі $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$.

Теорема 1. *Нехай λ — довільний кардинал $\geqslant 2$ і $a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$. Тоді*

(1) $R_{a_1^{-1}a_2} = \begin{cases} \left\{a_1^{-1}bk_1 \in P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} \mid b \in \lambda^*\right\}, & \textit{якщо } k_1 \in \operatorname{suff}(a_2); \\ \left\{a_1^{-1}a_2\right\}, & \textit{в іншому випадку;} \end{cases}$

(2) $L_{a_1^{-1}a_2} = \begin{cases} \left\{(ck_2)^{-1}a_2 \mid c \in \lambda^*\right\}, & \textit{якщо } k_2 \in \operatorname{suff}(a_1); \\ \left\{a_1^{-1}a_2\right\}, & \textit{в іншому випадку;} \end{cases}$

(3) $H_{a_1^{-1}a_2} = \left\{a_1^{-1}a_2\right\};$

(4) $D_{a_1^{-1}a_2} = \begin{cases} P_\lambda(k_2^{-1}k_1, k_1^{-1}k_2) \setminus \{0\}, & \textit{якщо } k_2 \in \operatorname{suff}(a_1) \quad \textit{i} \quad k_1 \in \operatorname{suff}(a_2); \\ R_{a_1^{-1}a_2}, & \textit{якщо } k_1 \in \operatorname{suff}(a_2) \quad \textit{i} \\ & \quad (k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 = 0 \textit{ або } a_1 \in \operatorname{suff}^{\mathrm{o}}(k_2)); \\ L_{a_1^{-1}a_2}, & \textit{якщо } k_2 \in \operatorname{suff}(a_1) \quad \textit{i} \\ & \quad (a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 = 0 \textit{ або } a_2 \in \operatorname{suff}^{\mathrm{o}}(k_1)); \\ \{a_1^{-1}a_2\}, & \textit{в іншому випадку;} \end{cases}$

(5) $J_{a_1^{-1}a_2} = \begin{cases} \left\{a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} \mid k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \neq 0\right\}, & \\ & \textit{якщо } k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \neq 0; \\ D_{a_1^{-1}a_2}, & \textit{в іншому випадку.} \end{cases}$

Доведення. Для доведення використаємо твердження 6.

(1) З леми 4(1) випливає, що $a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \mathscr{R} a_1^{-1}a_2$ тоді і тільки тоді, коли існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_2 = uk_1$, тобто $k_1 \in \operatorname{suff}(a_2)$. Тому

$$K_1^{k_1^{-1}k_2} = \{a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda \mid k_1 \in \operatorname{suff}(a_2)\}$$

і

$$R_{a_1^{-1}a_2}(P_\lambda) \cap K_1^{k_1^{-1}k_2} = \left\{b_1^{-1}b_2 \in P_\lambda \mid b_1 = a_1 \quad \text{i} \quad k_1 \in \operatorname{suff}(b_2)\right\} =$$
$$= \left\{a_1^{-1}bk_1 \in P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} \mid b \in \lambda^*\right\}.$$

Доведення твердження (2) аналогічне до твердження (1).

(3) Оскільки за лемою 4 у поліциклічному моноїді усі $\mathscr{H}$-класи є одноточковими, то з твердження 6 випливає твердження (3).

4. З (1) і (2) випливає, що

$$K^{k_1^{-1}k_2} = K_1^{k_1^{-1}k_2} \cap K_2^{k_1^{-1}k_2} = \left\{a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda \mid k_1 \in \operatorname{suff}(a_2) \quad \text{i} \quad k_2 \in \operatorname{suff}(a_1)\right\}.$$

Оскільки P_λ – 0-біпроста напівгрупа, то $D_{a_1^{-1}a_2}(P_\lambda) \cap K^{k_1^{-1}k_2} = K^{k_1^{-1}k_2}$. Якщо $k_1 \notin \operatorname{suff}(a_2)$, то або $a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 = 0$, або $a_2 \in \operatorname{suff}^{\circ}(k_1)$. Тому

$$K_2^{k_1^{-1}k_2} \setminus K_1^{k_1^{-1}k_2} = \left\{a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda \mid \left(a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 = 0 \text{ або } a_2 \in \operatorname{suff}^{\circ}(k_1)\right) \text{ і } k_2 \in \operatorname{suff}(a_1)\right\}.$$

Аналогічно отримуємо

$$K_1^{k_1^{-1}k_2} \setminus K_2^{k_1^{-1}k_2} = \left\{a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda \mid \left(k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 = 0 \text{ або } a_1 \in \operatorname{suff}^{\circ}(k_2)\right) \text{ і } k_1 \in \operatorname{suff}(a_2)\right\}.$$

5. Позаяк поліциклічний моноїд P_λ є 0-простою напівгрупою, то

$$k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \;\mathscr{J}\; a_1^{-1}a_2$$

тоді і тільки тоді, коли $k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \neq 0$. Тому

$$K_3^{k_1^{-1}k_2} = \left\{a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda \mid k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \neq 0\right\}.$$

Оскільки $J_{a_1^{-1}}(P_\lambda) = P_\lambda \setminus \{0\}$ і $0 \notin K_3^{k_1^{-1}k_2}$, то $J_{a_1^{-1}}(P_\lambda) \cap K_3^{k_1^{-1}k_2} = K_3^{k_1^{-1}k_2}$. $\square$

4. Ізоморфізми інтерасоціативностей поліциклічного моноїда

Лема 5. *Нехай λ — довільний кардинал $\geqslant 2$, $k_1^{-1}k_2, t_1^{-1}t_2$ – довільні ненульові елементи напівгрупи P_λ, $a_1^{-1}a_2$ – довільний елемент напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$, $b_1^{-1}b_2$ – елемент напівгрупи $P_\lambda^{t_1^{-1}t_2}$ такий, що $f(a_1^{-1}a_2) = b_1^{-1}b_2$ і $f : P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} \to P_\lambda^{t_1^{-1}t_2}$ – ізоморфізм. Тоді виконуються такі умови:*

1) *якщо $a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 = 0$, то $b_1^{-1}b_2 \cdot t_1^{-1}t_2 = 0$;*
2) *якщо $k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 = 0$, то і $t_1^{-1}t_2 \cdot b_1^{-1}b_2 = 0$;*
3) *якщо існує слово $u \in \lambda^* \setminus \{\varepsilon\}$ таке, що $k_2 = ua_1$, то існує слово $v \in \lambda^* \setminus \{\varepsilon\}$ таке, що $t_2 = vb_1$;*
4) *якщо існує слово $u \in \lambda^* \setminus \{\varepsilon\}$ таке, що $k_1 = ua_2$, то існує слово $v \in \lambda^* \setminus \{\varepsilon\}$ таке, що $t_1 = vb_2$;*
5) *якщо існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_1 = uk_2$, то існує слово $v \in \lambda^*$ таке, що $b_1 = vt_2$;*
6) *якщо існує слово $u \in \lambda^* \setminus \{\varepsilon\}$ таке, що $k_2 = ua_1$, то існує слово $v \in \lambda^* \setminus \{\varepsilon\}$ таке, що $t_2 = vb_1$.*

Доведення. З твердження 5 і теореми 1 випливають такі еквівалентності:

1) $a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 = 0$ тоді і тільки тоді, коли $R(a_1^{-1}a_2)$ – скінченний і $R_{a_1^{-1}a_2}$ – скінченний;
2) $k_1^{-1}k_2 \cdot a_1^{-1}a_2 = 0$ тоді і тільки тоді, коли $L(a_1^{-1}a_2)$ – скінченний і $L_{a_1^{-1}a_2}$ – скінченний;
3) існує слово $u \in \lambda^* \setminus \{\varepsilon\}$ таке, що $k_2 = ua_1$ тоді і тільки тоді, коли $L(a_1^{-1}a_2)$ – нескінченний і $L_{a_1^{-1}a_2}$ – скінченний;
4) існує слово $u \in \lambda^* \setminus \{\varepsilon\}$ таке, що $k_1 = ua_2$ тоді і тільки тоді, коли $R(a_1^{-1}a_2)$ – нескінченний і $R_{a_1^{-1}a_2}$ – скінченний;
5) існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_1 = uk_2$, тоді і тільки тоді, коли $L(a_1^{-1}a_2)$ – нескінченний і $L_{a_1^{-1}a_2}$ – нескінченний;
6) існує слово $u \in \lambda^*$ таке, що $a_2 = uk_2$ тоді і тільки тоді, коли $R(a_1^{-1}a_2)$ – нескінченний і $R_{a_1^{-1}a_2}$ – нескінченний.

Це і завершує доведення леми. □

Лема 6. *Нехай λ — довільний кардинал $\geqslant 2$, $k_1^{-1}k_2, t_1^{-1}t_2$ – довільні ненульові елементи напівгрупи P_λ, $a_1^{-1}a_2$ – довільний ненульовий елемент напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ і $f : P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} \to P_\lambda^{t_1^{-1}t_2}$ – ізоморфізм. Тоді виконуються такі умови:*

(1) *$f(k_2^{-1}k_1) = t_2^{-1}t_1$;*
(2) *існує автоморфізм поліциклічного моноїда $i \colon P_\lambda \to P_\lambda$ такий, що*

$$f(k_2^{-1}a_1^{-1}a_2k_1) = t_2^{-1} \cdot i(a_1^{-1}a_2) \cdot t_1,$$

для довільного $k_2^{-1}a_1^{-1}a_2k_1 \in D_{k_2^{-1}k_1}$;
(3) *якщо $f(a_1^{-1}a_2) = b_1^{-1}b_2$, $f(a_1^{-1}k_1) = c_1^{-1}c_2$ і $f(k_2^{-1}a_2) = c_1^{-1}c_2$, то $c_1 \in \operatorname{suff}(b_1)$ і $c_2 \in \operatorname{suff}(b_2)$;*
(4) *якщо $f(a_1^{-1}a_2) = b_1^{-1}b_2$, $f(a_1^{-1}k_1) = c_1^{-1}c_2$ і $f(k_2^{-1}a_2) = d_1^{-1}d_2$, то $b_1 = c_1$ і $b_2 = d_2$;*

Доведення. (1) З того, що всі ідемпотенти напівгрупи $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ належать її піднапівгрупі $P_\lambda(k_2^{-1}k_1, k_1^{-1}k_2)$ і $k_2^{-1}k_1$ є образом 1_{P_λ} при відповідному ізоморфізмі випливає, що $k_2^{-1}k_1$ є найбільшим ідемпотентом стосовно природного порядку. Тому $f(k_2^{-1}k_1) = t_2^{-1}t_1$.

(2) Нехай $g_1 : P_\lambda \to P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$, $g_2 : P_\lambda^{t_1^{-1}t_2} \to P_\lambda$ – ізоморфізми такі, що $g_1(a_1^{-1}a_2) = k_2^{-1}a_1^{-1}a_2k_1$ і $g_2(t_2^{-1}a_1^{-1}a_2t_1) = a_1^{-1}a_2$. Тоді $g_2 \circ f \circ g_1$ – автоморфізм поліциклічного моноїда. Припустимо протилежне. Для будь-якого автоморфізму $i \colon P_\lambda \to P_\lambda$ поліциклічного моноїда існує $a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda$ такий, що $f(k_2^{-1}a_1^{-1}a_2k_1) \neq t_2^{-1}i(a_1^{-1}a_2)t_1$. Тоді для будь-якого автоморфізму i моноїда P_λ існує $a_1^{-1}a_2 \in P_\lambda$ такий, що

$$(g_2 \circ f \circ g_1)(a_1^{-1}a_2) = b_1^{-1}b_2 \neq i(a_1^{-1}a_2),$$

а це суперечить тому, що $g_2 \circ f \circ g_1$ – автоморфізм поліциклічного моноїда.

(3) Розглянемо рівність $a_1^{-1}a_2 = a_1^{-1}k_1 *_{k_1^{-1}k_2} k_2^{-1}a_2$. З леми 5 випливає, що $f(a_1^{-1}k_1) = c_1^{-1}c_2t_1$ і $f(k_2^{-1}a_2) = t_2^{-1}d_1^{-1}d_2$. Тому

$$\begin{aligned} f(a_1^{-1}a_2) &= c_1^{-1}c_2t_1 *_{t_1^{-1}t_2} t_2^{-1}d_1^{-1}d_2 = \\ &= c_1^{-1}c_2t_1 \cdot t_1^{-1}t_2 \cdot t_2^{-1}d_1^{-1}d_2 = \\ &= c_1^{-1}c_2 \cdot d_1^{-1}d_2. \end{aligned}$$

З леми 1 випливає, що $c_1 \in \mathrm{suff}(b_1)$ і $d_2 \in \mathrm{suff}(b_2)$.

(4) Нехай $f(a_1^{-1}k_1) = c_1^{-1}c_2t_1$. З пункту (2) випливає, що $f^{-1}(t_2^{-1}c_2t_1) = k_2^{-1}i(c_2)k_1$, де i – деякий автоморфізм поліциклічного моноїда. Тоді з пункту (3) випливає, що $i(c_2)k_1 \in \mathrm{suff}(k_1)$. Тому $i(c_2) = \varepsilon$, і отже, $c_2 = \varepsilon$. Отож, $f(a_1^{-1}k_1) = c_1^{-1}t_1$. Аналогічно доводиться, що $f(k_2^{-1}a_2) = t_2^{-1}d_2$.

Розглянемо рівність $a_1^{-1}a_2 = a_1^{-1}k_1 *_{k_1^{-1}k_2} k_2^{-1}a_2$. Тоді

$$\begin{aligned} f(a_1^{-1}a_2) &= f(a_1^{-1}k_1) *_{t_1^{-1}t_2} f(k_2^{-1}a_2) = \\ &= c_1^{-1}t_1 *_{t_1^{-1}t_2} t_2^{-1}d_2 = \\ &= c_1^{-1}t_1 \cdot t_1^{-1}t_2 \cdot t_2^{-1}d_2 = \\ &= c_1^{-1}d_2, \end{aligned}$$

що і завершує доведення леми. □

Теорема 2. *Нехай λ – довільний кардинал $\geqslant 2$ і $k_1^{-1}k_2, t_1^{-1}t_2$ – довільні ненульові елементи напівгрупи P_λ. Якщо $f\colon P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} \to P_\lambda^{t_1^{-1}t_2}$ – ізоморфізм, то перетворення $f\colon P_\lambda = P_\lambda^{k_1^{-1}k_2} \to P_\lambda = P_\lambda^{t_1^{-1}t_2}$ поліциклічного моноїда P_λ є його автоморфізмом.*

Доведення. Розглянемо рівність $a_1^{-1}a_2 = k_1^{-1} *_{k_1^{-1}k_2} k_2^{-1}a_1^{-1}a_2$. З леми 6(4) випливає, що $f(k_1) = y_1^{-1}t_1$ і $f(k_2^{-1}a_1^{-1}a_2) = t_2^{-1} \cdot i(a_1^{-1}) \cdot y_2$, де i – деякий автоморфізм λ-поліциклічного моноїда. Тому

$$\begin{aligned} f(a_1^{-1}a_2) &= f(k_1^{-1}) *_{t_1^{-1}t_2} f(k_2^{-1}a_1^{-1}a_2) = \\ &= y_1^{-1}t_1 *_{t_1^{-1}t_2} t_2^{-1}i(a_1^{-1})y_2 = \\ &= y_1^{-1}t_1 \cdot t_1^{-1}t_2 \cdot t_2^{-1}i(a_1^{-1})y_2 = \\ &= y_1^{-1}i(a_1^{-1})y_2. \end{aligned}$$

Оскільки y_1 не залежить від вибору елемента $a_1^{-1}a_2$, то $f(P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}) = y_1^{-1}P_\lambda^{t_1^{-1}t_2}$. Звідси випливає, що $y_1 = \varepsilon$. Тому $f(a_1^{-1}a_2) = i(a_1^{-1}) \cdot y_2$. Аналогічно доводиться, що $f(a_1^{-1}a_2) = z_1^{-1} \cdot i(a_2)$. Отже, $f(a_1^{-1}a_2) = i(a_1^{-1}) \cdot i(a_2) = i(a_1^{-1}a_2)$. □

Твердження 7. *Нехай λ – довільний кардинал $\geqslant 2$. Якщо $k_1^{-1}k_2, t_1^{-1}t_2 \in P_\lambda$, то напівгрупа $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ ізоморфна напівгрупі $P_\lambda^{t_1^{-1}t_2}$ тоді і тільки тоді, коли існує автоморфізм $i\colon P_\lambda \to P_\lambda$ поліциклічного моноїда такий, що $i(k_1^{-1}k_2) = t_1^{-1}t_2$.*

Доведення. Імплікація ($\Rightarrow$) випливає з теореми 2.

($\Leftarrow$) Припустимо, що існує автоморфізм $i : P_\lambda \to P_\lambda$ такий, що $i(k_1^{-1}k_2) = t_1^{-1}t_2$. Для довільних $a_1^{-1}a_2, b_1^{-1}b_2 \in P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ маємо

$$\begin{aligned} i(a_1^{-1}a_2 *_{k_1^{-1}k_2} b_1^{-1}b_2) &= i(a_1^{-1}a_2 \cdot k_1^{-1}k_2 \cdot b_1^{-1}b_2) = \\ &= i(a_1^{-1}a_2) i(k_1^{-1}k_2) i(b_1^{-1}b_2) = \\ &= i(a_1^{-1}a_2) \cdot t_1^{-1}t_2 \cdot i(b_1^{-1}b_2) = \\ &= i(a_1^{-1}a_2) *_{t_1^{-1}t_2} f(b_1^{-1}b_2). \end{aligned}$$

Тому відображення $i\colon P_\lambda \to P_\lambda$ визначає ізоморфізм між напівгрупами $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ і $P_\lambda^{t_1^{-1}t_2}$, оскільки елементи напівгруп $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$, $P_\lambda^{t_1^{-1}t_2}$ і P_λ є рівними тоді і лише тоді, коли вони мають однакові зображення як елементи поліциклічного моноїда P_λ. $\square$

Подяка

Автор висловлює подяку своєму науковому керівнику Олегу Гутіку за допомогу, цінні поради та сприяння під час написання роботи, а також рецензетові за корисні поради та зауваження.

Список використаної літератури

1. O. Andersen, *Ein Bericht uber die Struktur abstrakter Halbgruppen*, PhD Thesis, Hamburg, 1952.
2. S. Bardyla, *Classifying locally compact semitopological polycyclic monoids*, Mat. Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka **13** (2016), 13–28.
3. S. Bardyla, *On universal objects in the class of graph inverse semigroups*, Eur. J. Math. (to appear). DOI: 10.1007/s40879-018-0300-7
4. S. Bardyla and O. Gutik, *On a semitopological polycyclic monoid*, Algebra Discrete Math. **21** (2016), no. 2, 163-183.
5. S. Bardyla and O. Gutik, *On a complete topological inverse polycyclic monoid*, Carpathian Math. Publ. *8* (2016) no.2. 183–194. DOI: 10.15330/cmp.8.2.183-194
6. S. J. Boyd, M. Gould, and A. Nelson, *Interassociativity of semigroups*, Misra, P. R. (ed.) et al., Proceedings of the Tennessee topology conference, Nashville, TN, USA, June 10–11, 1996. Singapore, World Scientific, (1997), pp. 33–51.
7. K. Chase, *Sandwich semigroups of binary relations*, Discrete Math. **28** (1979), no. 3, 231–236. DOI: 10.1016/0012-365X(79)90130-4
8. K. Chase, *New semigroups of binary relations*, Semigroup Forum **18** (1979), no. 1, 79–82. DOI: 10.1007/BF02574176
9. K. Chase, *Maximal groups in sandwich semigroups of binary relations*, Pac. J. Math. **100** (1982), no. 1, 42–59. DOI: 10.2140/pjm.1982.100.43
10. O. O. Desiateryk, *Variants of commutative bands with zero,* Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka (2015), no. 4, 15–20.
11. I. Dolinka, I. Đurđev, and J. East, *Sandwich semigroups in diagram categories*, Preprint (in preparation).
12. I. Dolinka, I. Đurđev, J. East, P. Honyam, K. Sangkhanan, J. Sanwong, and W. Sommanee, *Sandwich semigroups in locally small categories I: Foundations*, Algebra Univers. **79** (2018), Art. ID 75, pp. 35. DOI: 10.1007/s00012-018-0537-5

13. I. Dolinka, I. Đurđev, J. East, P. Honyam, K. Sangkhanan, J. Sanwong, and W. W. Sommanee, *Sandwich semigroups in locally small categories II: Transformations*, Algebra Univers. **79** (2018), Art. ID 76, pp. 63. DOI: 10.1007/s00012-018-0539-3
14. I. Dolinka and J. East, *Variants of finite full transformation semigroups*, Int. J. Algebra Comput. **25** (2015), no. 8, 1187–1222. DOI: 10.1142/S021819671550037X
15. I. Dolinka and J. East, *Semigroups of rectangular matrices under a sandwich operation*, Semigroup Forum **96** (2018), no. 2, 253–300. DOI: 10.1007/s00233-017-9873-6
16. J. East, *Transformation representations of sandwich semigroups*, Exp. Math. (2018) (to appear). DOI: 10.1080/10586458.2018.1459963
17. C. Eberhart and J. Selden, *On the closure of the bicyclic semigroup*, Trans. Amer. Math. Soc. **144** (1969), 115–126. DOI: 10.2307/1995273
18. O. G. Ganyushkin and O. O. Desiateryk, *Variants of a semilattice*, Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka (2013), no. 4, 12–16.
19. O. Ganyushkin and V. Mazorchuk, *Classical finite transformation semigroups, an introduction*, **9** of Algebra and Appl., Springer, London, 2009.
20. B. N. Givens, A. Rosin, and K. Linton, *Interassociates of the bicyclic semigroup*, Semigroup Forum **94** (2017), no. 1, 104–122. DOI: 10.1007/s00233-016-9794-9
21. O. Gutik and K. Maksymyk, On semitopological interassociates of the bicyclic monoid, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **82** (2016), 98–108.
22. O. Gutik and K. Maksymyk, *On variants of the bicyclic extended semigroup*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **84** (2017), 22–37.
23. J. B. Hickey, *Semigroups under a sandwich operation*, Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser. **26** (1983), no. 3, 371–382. DOI: 10.1017/S0013091500004442
24. J. B. Hickey, *On variants of a semigroup*, Bull. Austral. Math. Soc. **34** (1986), no. 3, 447–459. DOI: 10.1017/S0004972700010339
25. W. Huang, *Matrices which belong to an idempotent in a sandwich semigroup of circulant Boolean matrices*, Linear Algebra Appl. **249** (1996), no. 1–3, 157–167. DOI: 10.1016/0024-3795(95)00325-8
26. D. G. Jones, *Polycyclic monoids and their generalizations.* PhD Thesis, Heriot-Watt University, 2011.
27. D. G. Jones and M. V. Lawson, *Graph inverse semigroups: Their characterization and completion*, J. Algebra **409** (2014), 444–473. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2014.04.001
28. T. Khan and M. Lawson, *Variants of regular semigroups*, Semigroup Forum **62** (2001), no. 3, 358–374. DOI: 10.1007/s002330010034
29. M. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, World Scientific, Singapore, 1998.
30. V. Mazorchuk and G. Tsyaputa, *Isolated subsemigroups in the variants of* $\mathscr{T}_n$, Acta Math. Univ. Comen., New Ser. **77** (2008), no. 1, 63–84
31. M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley and Sons, New York, 1984.
32. M. Nivat and J.-F. Perrot, *Une generalisation du monoide bicyclique*, C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. **A 271** (1970), 824–827.
33. А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп*, Том 1, пер. с англ., Мир, Москва, 1972.
34. А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп*, Том 2, пер. с англ., Мир, Москва, 1972.

Стаття: надійшла до редколегії 04.2.2018
доопрацьована 13.02.2019
прийнята до друку 18.02.2019

INTERASSOCIATES OF A POLYCYCLIC MONOID

Markiian KHYLYNSKYI

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine
e-mail: khymarkyan@gmail.com

We study properties of interassociativities of a polycyclic monoid P_λ. Green's relations on an interassociativity $P_\lambda^{k_1^{-1}k_2}$ of a polycyclic monoid P_λ are described. Also we proved a criterium when two interassociativities of P_λ are isomorphic.

Key words: polycyclic monoid, interassociate, Green's relations, isomorphism, antiisomorphism.