

УДК 550.36.01

МОДЕЛЮВАННЯ КОНВЕКТИВНИХ ПОТОКІВ ТЕПЛОПЕРЕНОСЕННЯ У ВЕРХНІЙ МАНТІЇ ЗЕМЛІ

В.В. Фурман

*Львівський національний університет імені Івана Франка
79005, м. Львів, вул. Грушевського, 4
E-mail: fourman@franko.lviv.ua*

Описано залежність теплового стану мантії від можливих варіацій температури на межі ядро–мантія, побудовано теплову модель мантії Землі. Наголошено, що визначення мантійних температур за даними про спостережений тепловий потік містить чинник невизначеності, пов'язаний із труднощами з'ясування внеску кори за результатами інтерпретації спостереженого теплового потоку. Запропоновано оригінальний метод побудови теплової моделі планети, який можна використати як один з критеріїв для перевірки коректності інших методів. Виявлено зв'язок між інтенсивністю конвективних процесів теплоперенесення в мантії та тепловим потоком у корі Землі.

Ключові слова: Теплоперенесення в мантії, мантійна конвекція, тепла модель мантії Землі, математична модель.

Мантія поки що недоступна для безпосереднього вивчення, однак про неї вже накопичена значна інформація, що ґрунтується на застосуванні різних непрямих методів дослідження. Вплив мантії на поверхню Землі досить різноманітний. Сучасні дані свідчать, що структура верхньої мантії континентів є визначальною для еволюції Землі. Раніше передбачали, що континенти – це пасивні утворення, які просто впливають на мантійними потоками, структура й еволюція яких не залежить явно від структури і властивостей континентальної літосфери. Зіставлення й отожнення процесів, що відбуваються всередині Землі, і просто теплової машини, має певні обмеження. Інтенсивність підігріву в Землі значно перевершує природні можливості теплообміну всередині рідини шляхом теплопровідності, унаслідок чого виникають конвекційні потоки. У випадку з Землею, якби не було підігріву речовини зсередини, залишалося б розглядати теплообмінні процеси як процес вистигання планети зовні. У цьому разі конвекційні потоки могли б виникнути через нерівномірність вистигання поверхні Землі. Однак теплопередавання залежить від градієнта температур, і вистигання відбувається швидше там, де градієнт більший. Тобто локальний більший градієнт температур (що виникає незрозуміло як) у природних умовах повинен неодмінно знижуватися. Система, відповідно до законів термодинаміки, повинна прагнути до термодинамічної рівноваги. Отже, для виникнення і розбіжності градієнтів потрібні надійні джерела енергії. Тому їх потрібно шукати, і не тільки для конвекційних потоків; вони потрібні для горизонтального руху літосферних плит, фактично для руху континентів. Де джерела енергії для цих рухів?

Теплоперенесення та конвективні процеси в мантії. Із чим же пов'язані високі температури в глибині Землі? Дискусії на цю тему тривають протягом бага-

трьох років. За однією з найпоширеніших гіпотез, джерелом тепла в надрах планети слугують радіоактивні елементи в її ядрі, а головним теплоносієм – глибинні флюїди, особливо характерні для зовнішнього ядра. Зрозуміло, що мине ще багато років, перш ніж будуть накопичені додаткові відомості й удосконалені теоретичні гіпотези, і ми зможемо одержати чіткіше уявлення про структуру і динамічні властивості мантії. Моделі конвекції запропоновані для пояснення того, як процеси, що відбуваються в мантії, можуть надавати руху шарам літосфери. Конвекція полягає в тому, що тепла речовина піднімається вгору, а холодна опускається вниз. Різні гіпотези щодо можливого механізму цього процесу [1–6] передбачають великі конвекційні контури, що охоплюють усю товщу мантії. Альтернативна схема ґрунтується на аргументах, що поглинання тепла під час фазових переходів може обмежувати область конвекції поверхневими шарами мантії. У ще іншій моделі конвективна область обмежена астеносферою, тобто шаром мантії, що простягається на глибині від 100 до 300 км. Водночас, зони, де літосфера може “провалюватися” у мантію і, отже, брати участь у конвекції, охоплюють глибини до 700 км. Нарешті, є ще одна модель, у якій передбачено, що конвекційний механізм полягає в утворенні всередині мантії теплових “стовпів”. Згідно з цією моделлю, усі висхідні потоки сконцентровані приблизно в 20 таких стовпах з основою на межі з мантією і кожний з них має діаметр близько кількох сотень кілометрів. Зустрічний (спадний) потік складається з всієї речовини мантії, яка повільно знижується. Коли висхідний потік досягає літосфери, він розпливається у горизонтальному напрямі, утворює нагріті зони, що на поверхні мають вулканічну активність. Він також може піднімати літосферу, зумовлюючи рух її шарів. За будь-якого механізму конвекції вертикальне переміщення речовини в мантії призводить до змін розподілу температури всередині мантії. Отже, унаслідок конвекції в речовині мантії, що зазнає зміни тиску і температури, відбуваються фазові зміни, через що вона набуває стану рівноваги з навколишнім середовищем.

Головні теплові джерела в мантії Землі – це запас тепла, що залишився ще з часів раннього розплавленого стану, і тепло, що утворилося під час розпаду радіоактивних елементів. Середній вміст радіоактивних елементів у земній корі не перевищує тисячних часток грама на кілограм породи, однак тепловий потік, який вони генерують, впливає на теплові властивості Землі загалом [2, 5].

Теплофізичні константи Землі такі: повний тепловий потік Q_{\oplus} – $4,4 \cdot 10^{13}$ Вт; питома масова ізобарна теплоємність C_p , верхня мантія – 1 250 Дж/кг·К, нижня мантія – 1 260 Дж/кг·К; теплопровідність k_r , верхня мантія – 5 Вт/м·К; теплопровідність k_r , нижня мантія – 10 Вт/м·К.

Про тепловий запас надр Землі можна судити з розподілу температур. Найнадійнішими вважають визначення температур, які ґрунтуються на температурах плавлення глибинних надр. Сучасна техніка ще не в змозі безпосередньо змоделювати відповідні умови, екстраполюючи результати експериментів, виконаних з використанням ударних хвиль. Тому розбіжність моделей розподілу поля температур є в межах однієї–двох тисяч градусів. Серед цих моделей найбільшу температуру плавлення – 8 240 К у центрі Землі – навів О. Вільямсон та ін. [7, 8], а найменшу температуру – 5 150 К – Р. Бухлер [9]. Розрахункові значення температур плавлення беруть трохи нижчими з огляду на наявність легкого компонента, причому відхилення може становити від 500 до 1 000 К [2]. Водночас є і досить відомі

та зрозумілі сучасні значення теплофізичних величин. На тепловий стан Землі значно впливає тепловий потік Q_{\oplus} з її поверхні, який визначають досить упевнено [2]. Не менше важливий тепловий потік з ядра в мантію багато в чому зумовлений конвективними процесами, що відбуваються в ядрі та мантії Землі, інтенсивність яких, відповідно, впливає на магнітне поле, що генерується в ньому. Розходження в оцінці цього теплового потоку з ядра Землі є в межах $(0,3-2,0) \cdot 10^{13}$ Вт, як зазначено ще в [4]. У працях [2, 10–13] побудовано самоузгоджені моделі теплового стану сферично-симетричної Землі, що спираються на моделі температур плавлення і залежності між безрозмірними термодинамічними і теплофізичними параметрами. Недоліком подібних праць є використання параметрів, мало пов'язаних з умовами в глибинних надрах Землі. В інших працях [14–18] змодельовано пряму задачу ефективного теплоперенесення, причому задано розподіл як радіоактивних джерел, так і ефективної теплопровідності. Сьогодні цей підхід розвинуто в працях присвячених числовому моделюванню теплової конвекції в мантії Землі [19–24]. Однак у подібних працях сферично-симетричне теплоперенесення у мантії фактично задане споконвічно через фіксовані джерела тепла, температури і/або теплові потоки меж мантії. Наша мета – визначення цілком самоузгодженої довготермінової (на години до декількох сотень мільйонів років) моделі сферично-симетричного теплоперенесення в мантії, на підставі [15]. Передбачуваний результат моделювання – фізична залежність теплоперенесення від малої кількості таких параметрів, які можна оцінювати й уточнювати незалежно. Основою моделі є значення температур фазового переходу між оболонками Землі і теплового потоку з її поверхні. У підсумку вірогідно оцінено зв'язок між інтенсивністю конвективних процесів теплоперенесення в мантії, значенням теплового потоку з ядра Землі і середнім вмістом радіоактивних джерел тепла в корі Землі.

Моделі мантійної конвекції. У праці [14] уперше з'ясовано, що тепла конвекція у верхній мантії під континентами придушена, і, відповідно, зменшений (утричі) тепловий потік, що виходить через континенти. Водночас океанічна літосфера не може сильно гальмувати винесення тепла з мантії, тому що океанічні літосферні плити беруть участь у конвективному кругообігу речовини мантії. Автори [11–20] довели, що нерухомий континент спочатку пригнічує мантійну конвекцію під собою і розширює конвективну комірку, а потім, через декілька сотень мільйонів років, після прогрівання субконтинентальної мантії під континентом виникає гарячий висхідний мантійний потік. Оскільки континенти не фіксовані в просторі, а плавають по мантії, то і їхній вплив на структуру мантійної конвекції виявляється ще сильнішим. У перших працях враховували тільки механічну взаємодію мантії з рухомими плитами у вигляді ефективної граничної умови. У місцях перебування плити замість умови вільної межі задавали горизонтальні швидкості [21–25]. У [22] наведено результати розрахунку числової двовимірної моделі мантійної конвекції з урахуванням механічної і теплової взаємодії з континентами, що плавають. У цьому разі для запобігання розтіканню в'язких континентів використано штучний прийом фіксації крайніх точок континентів. Дослідники [12, 14–16] побудували перші самоузгоджені тривимірні числові моделі мантійної конвекції з двома тривимірними твердими континентами, що вільно плавають, на підставі прямого розв'язування взаємозалежної системи рівнянь теплової конвекції і рівнянь руху твердих континентів. Автори [15] на прикладі двовимірної моделі детально виклали матема-

тичне формулювання задачі і метод її розв'язування. Вони розглянули ближчу до реальної Землі модель конвекції з числом Релея $R_a = 10^6$ на сітці 200×80 з тонким континентом товщиною $d = 90$ км і горизонтальним розміром $l = 6$ тис. км. З порівняння еволюції нестационарної конвекції в мантії без континенту і з континентом у ті ж моменти часу видно, що рухомий континент кардинально змінює структуру мантійної конвекції. Сучасні досягнення в науках про Землю ґрунтуються на дослідженнях, де головним завданням є аналіз сейсмічних і гравітаційних даних про будову і динаміку глибинних структур, тому було б неправильним обійти результати інтерпретації даних про тепловий потік, що прямо пов'язаний з розподілом температур у корі та мантії. Незважаючи на прямий зв'язок, виявляється, що інтерпретація цих даних становить велику проблему. Під час опрацювання вимірних на поверхні значень теплового потоку необхідно визначити і відняти складову, зумовлену теплогенеруванням радіоактивних елементів кори. В областях давніх кратонів внесок цієї складової в повний тепловий потік становить близько 70 %, тоді як похибка її визначення велика. Оптимістичний прогноз похибки визначення різницевого (мантійного) потоку – близько 5–7 мВт/м²с [26], що є величиною, порівнянною зі спостережуваним значенням. Крім того, техніка інтерпретації може значно відрізнятись, наприклад, поправку за зміни клімату враховують далеко не всі дослідники.

Отже, результати, отримані різними дослідниками для різних структур, порівнювати прямо не можна, більшість дослідників дає близькі значення мантійного теплового потоку під кратонами. У праці [26] отримане значення мантійного потоку під Канадським – 10–15 мВт/м²с, що трохи менше від значення, обчисленого цими ж дослідниками для Південної Африки (17–18 мВт/м²с). Ця розбіжність відповідає різниці мантійних температур близько 100 °С, що узгоджується із сейсмічними, згідно з якими аномалія швидкості під Південною Африкою також менша. Автори узагальнили наявні дані про тепловий потік і теплогенерування в корі та побудували серію карт (рис. 1), що відображають розподіл температури на різних глибинах під континентами [26, 27]. Ці розрахунки ґрунтуються на розв'язку стаціонарної теплової задачі і доповнені даними інших дослідників, отриманими для тектонічно активних районів континентів. На глибині 150 км температура під усіма кратонами знижена і становить 700–1 100 °С, причому найменше значення відповідає Східному Сибіру і Північно-Західній Африці. За межами кратонів температура практично однакова (~ 1 300 °С) і дорівнює адіабатичній температурі, яку повинна мати конвектувальна мантія.

Трохи пізніше запропоновано кілька моделей літосфери, що вистигає, які дають змогу пояснити цей феномен [28]. Серед них можна виділити дві головні моделі: плити, що вистигає, і півпростору [29]. З моделі плити, що вистигає, найбільше розроблена, зокрема, з урахуванням сферичності Землі, формула для розподілу температури T із глибиною h залежно від віку τ :

$$T(h, \tau) = \frac{T_0}{\left(1 - \frac{h}{R_\oplus}\right)} \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi h}{L_{\max}}\right)}{n} \exp\left[-\left(\frac{n\pi h}{L_{\max}}\right)^2 \tau\right] - \left(1 - \frac{R_\oplus}{L_{\max}}\right) \frac{h}{R_\oplus} \right\},$$

де $T_0 = 1\ 300$ °С – температура конвективної мантії в основі океанічної літосфер-

ної плити; R_{\oplus} – радіус Землі; $L_{\max}=120\sim 130$ км – максимальна потужність літосферної плити; k_l – коефіцієнт теплопровідності. Розподіл густини з глибиною можна визначити за коефіцієнтом теплового розширення:

$$\rho(h) = \rho_0 [1 - \alpha T(h, \tau)],$$

де $\rho_0 = 3\,350$ кг/м³, $\alpha = 3,3 \cdot 10^{-5}/\text{K}^\circ$. Для континентальних районів, як і у початковій стандартній моделі, вважали, що розподіл густини відповідає старому океанові

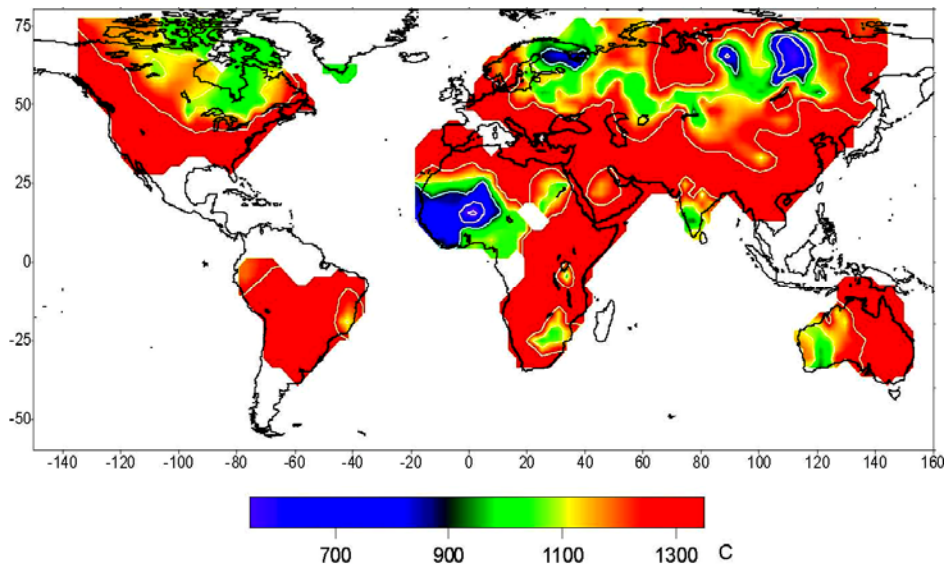


Рис. 1. Розподіл температури на глибині 150 км за результатами інтерпретації даних про тепловий потік, отриманий у [27].

(180 млн років). Донедавна всі глобальні конвективні моделі розраховували на підставі припущення, що мантійні неоднорідності густини зумовлені винятково варіаціями поля температур. Однак, мабуть, це припущення не працює для верхньої мантії континентів. Сейсмічні і теплові дані засвідчують, що температура верхньої мантії під давніми кратонами дуже знижена, принаймні на 400–600 °С, порівняно з молодшими континентальними й океанічними структурами [27]. Отже, якщо не брати до уваги інші чинники, то густина мантії під ними повинна бути підвищена, тобто повинна існувати сила, що дестабілізує ці утворення, унаслідок чого континентальна частина верхньої мантії матиме тенденцію до занурення, а це значно обмежить час існування таких структур. Наприклад, розрахунки В. Трубіцина засвідчують, що, навіть беручи до уваги підвищену в'язкість, час існування кратонів не повинен перевищувати мільярда років [30, 31], тоді як реальний час існування цих структур принаймні у декілька разів більший. Для того, щоб узгодити цю суперечність, Т. Джордан [32] запропонував гіпотезу, відповідно до якої збільшення густини, зумовлене зниженням температури, скомпенсоване під кратонами завдяки змінам хімічного складу, що спричинені виплавленням з первинної мантійної речовини деяких ком-

понентів під час формування кори. У підсумку корені континентів зберігають нейтральну плавучість щодо навколишньої мантії, і час їхнього існування значно збільшується, тому що зумовлений тільки підвищеною (низькотемпературною) в'язкістю континентальної літосфери.

Правильність гіпотези Т. Джордана підтверджена експериментальними даними, отриманими на підставі аналізу зразків перидотитів з різних кратонів, згідно з якими густина мантіїної речовини під ними може бути знижена (за однакових T - P умов) на 1,5–2,5 % щодо верхньої мантії молодих континентальних або океанічних структур [33–35]. Проте ступінь цієї компенсації дотепер не визначений, також не з'ясовано, до яких глибин можуть поширюватися теплові й хімічні аномалії під континентами. Зазвичай вважають, що верхня мантія давньої континентальної літосфери “суха”, тому що вода вилучена з первинної мантіїної речовини під час виплавлення кори.

Мантійна теплова конвекція. Теплову конвекцію в'язкої мантії описують розподілом вектора конвективних швидкостей $V_i(x,y,z)$, розподілом температури $T(x,y,z)$ і тиску $p(x,y,z)$ [30, 31, 36]. У наближенні Бусінеска ці невідомі функції знаходять, розв'язуючи систему трьох рівнянь: рівняння перенесення імпульсу, рівнянь перенесення тепла і маси:

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} + \rho g \delta_{i3}; \quad (1)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{k \partial T}{\partial x_i} \right) + Q; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (V_i \rho)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (3)$$

де ρ – густина мантії; g_i – прискорення вільного падіння; T – температура, яку відлічують від адіабатичного розподілу; k – коефіцієнт теплопровідності; Q – термометрична густина теплових джерел; δ_{ij} – символ Кронекера (дорівнює 1, якщо $i = j$, і 0, якщо $i \neq j$); S_{ij} – девіаторний тензор в'язких напружень,

$$S_{ij} = \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right), \quad (4)$$

де μ – кінематична в'язкість. Відносне значення інерційних членів у лівій частині рівняння перенесення імпульсу в'язкої рідини (2) порівняно з членами у правих частинах рівнянь має порядок $k\rho/\mu \approx 10^{-23}$. Тому цими інерційними членами можна знехтувати. У наближенні Бусінеска прийmemo $\rho = \rho_0(1 - \alpha T)$ в останньому члені плавучості рівняння (1) і $\rho = \rho_0$ у всіх інших членах рівнянь (1)–(3). Будемо відлічувати тиск від його гідростатичного розподілу $p_0(z)$, який визначають з умови $\Delta p_0 = \rho_0 \gamma$. Уведемо безрозмірні змінні, приймаючи за одиницю вимірювання для довжини товщину мантії D , для швидкості – D/k , для часу – D^2/k , для температури – T_0 , для в'язкості – μ , для тиску і напружень – $\mu_0 k/D^2$, для густини теплових джерел – kT_0/D^2 . У цих змінних рівняння конвекції (1)–(3) набудуть вигляду

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} + R_a T \delta_{i3} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V}\nabla T = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + Q; \quad (6)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0, \quad (7)$$

де R_a – число Релея,

$$R_a = \frac{\alpha \rho_0 g T_0 D^3}{k \mu_0}. \quad (8)$$

Рівняння для розподілу температури T_c усередині твердого континенту в початковій нерухомій системі координат зводиться до рівняння теплопровідності з адвективним перенесенням тепла зі швидкостями, що задовольняють співвідношення

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} + u\nabla T_c = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial T_c}{\partial x_i} \right) + Q_c, \quad (9)$$

де Q_c – густина теплових джерел усередині континенту. Рівняння мантійної конвекції (1)–(3) і рівняння для руху континенту та перенесення тепла в ньому (9) пов'язані між собою через граничні умови. Як уже зазначено, для мантійних плинів на нижній і бічній межах розрахункової області приймаємо умову непротікання і прослизання (дорівнює нулю нормальна складова швидкості рідини і дорівнюють нулю тангенціальні складові в'язких сил):

$$V_k n_k = 0, \quad S_{ki} \tau_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

де n_k – одиничний вектор, нормальний до заданої поверхні; τ_i – одиничні вектори, дотичні до неї. На межі твердих рухомих континентів приймаємо умову непротікання і прилипания, тобто рівність швидкостей рідкої мантії і швидкостей континенту на всій поверхні зануреної в мантію частини континенту:

$$V_i = u_i. \quad (11)$$

Температура на нижній межі області фіксована $T = 1$. На бічних межах приймаємо умову нульового теплового потоку

$$\frac{\partial T}{\partial n_k} = 0, \quad (12)$$

де n_k – одиничний вектор, нормальний до поверхні області. На верхній поверхні температура мантії дорівнює нулю ($T = 0$) тільки в океанічній області поза континентом. На поверхні зануреного в мантію континенту приймаємо умову безперервності температури і теплового потоку між мантією і континентом:

$$T = T_c, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T_c}{\partial n}. \quad (13)$$

На верхній поверхні континенту температуру вважаємо такою, що дорівнює нулю:

$$T_c = 0. \quad (14)$$

Отже, математична проблема зводиться до такого. Маємо три невідомі функції координат і часу для мантійної конвекції: вектор швидкостей мантійних плинів $V_i(x, y, z, t)$, розподіл температури $T(x, y, z, t)$ і розподіл тиску $p(x, y, z, t)$, а також чотири невідомі функції часу для руху континентів як цілих: два компоненти мигте-

вої швидкості поступального руху центра ваги $u_0(t)$ і $v_0(t)$, один компонент миттєвої кутової швидкості обертання континенту навколо центра ваги $\omega(t)$ і розподіл температури в континенті $T_c(x, y, z, t)$. Для їхнього розрахунку є система взаємозалежних рівнянь: три диференціальні рівняння конвекції (1)–(3), три інтегральні співвідношення (5)–(7), до яких звелися рівняння Ейлера, і рівняння перенесення тепла в континенті (9). Знаючи в заданий момент положення і швидкості континенту $u_0(t)$, $v_0(t)$ і $\omega(t)$, можна знайти його положення в наступний момент часу τ . Для визначення сталих інтегрування диференціальних рівнянь слугують граничні умови (10)–(14). Знайдені в такий спосіб розподіли температури $T(x, y, z, t)$ з розв'язків наведених вище рівнянь дають нам змогу відшукати зв'язок між процесами мантійної теплової конвекції та тепловим потоком з верхньої мантії Землі, якщо дотримуватися міркувань наближення сферично-симетричного теплоперенесення мантії Землі [6].

Модель теплоперенесення в мантії Землі. У найпростішому випадку, використовуючи ефективну теплопровідність [37, 38], Землю можна уявити у вигляді сферичних шарів зі сталими теплофізичними властивостями. Тоді задача про охолодження Землі для сферичного шару зі сталими значеннями питомої масової теплоємності c_p , теплопровідності k_p , і середнім для шару значенням густини ρ зводиться до розв'язування такого рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} T(r, \tau) = a \nabla^2 T(r, \tau) + \frac{q_v(r, \tau)}{c_p \rho}, \quad (15)$$

де $a = k_t / c_p \rho$ – температуропровідність; T – температура; $q_v(r, \tau)$ – функція об'ємної потужності внутрішніх джерел тепла; r – радіальна координата; τ – час. Як граничні умови на зовнішній межі шару R , на підставі відомих даних, задамо змінні в часі температуру і тепловий потік. У підсумку відповідні граничні умови набудуть такого вигляду:

$$\begin{aligned} T(R_0, \tau) &= \varphi(\tau), \\ \left. \frac{\partial}{\partial r} T(r, \tau) \right|_{r=R_0} &= -\frac{\psi(\tau)}{4\pi R_0^2}, \end{aligned} \quad (16)$$

Умова (16) відповідає завданню для теплового потоку:

$$Q(R_0) = -4\pi R_0^2 \left. \frac{\partial}{\partial r} T(r, \tau) \right|_{r=R_0} = \psi(\tau). \quad (17)$$

Як початкові умови, якщо $\tau = 0$, $T(r, \tau)$ приймаємо як функцію, залежну тільки від r : $T(r, 0) \Rightarrow f(r)$. Для одержання аналітичного розв'язку задачі запишемо всі функції (температури і теплового джерела) у рівнянні (15) як розвинування в ряд Тейлора за часом:

$$T(r, \tau) = T_0(r) + T_1(r) \cdot \tau + T_2(r) \cdot \tau^2 + \dots + T_n(r) \cdot \tau^n + \dots; \quad (18)$$

$$q_v(r, \tau) = q_{v0}(r) + q_{v1}(r) \cdot \tau + q_{v2}(r) \cdot \tau^2 + \dots + q_{vn}(r) \cdot \tau^n + \dots \quad (19)$$

Скористаємось лінійним наближенням і будемо розглядати тільки нульовий та перший члени розвинування (19):

$$\begin{aligned} T(r, \tau) &= T_0(r) + T_1(r) \cdot \tau; \\ q_v(r, \tau) &= q_{v0}(r) + q_{v1}(r) \cdot \tau. \end{aligned} \quad (20)$$

Таке наближення для часу близько 100 млн років привносить у розв'язок досить малу похибку – близько кількох відсотків, тому що характерний час теплоперенесення – близько 10 млрд років [39]. Така похибка цілком допустима, тому що теплофізичні характеристики порід, які формують надра Землі, відомі зі ще значно більшою похибкою. Також прийнятне і те, що розподіл радіоактивних елементів може не змінюватися з часом, а змінюється тільки потужність тепловиділення:

$$q_v(r, \tau) = q(r)(q_0 - q_1 r), \quad (21)$$

де q_0 – відносна густина розподілу внутрішніх джерел. Підставимо (20) і (21) у рівняння (15), одержимо таке співвідношення:

$$c_p \rho T_1(r) = k \nabla^2 T_0(r) + k \nabla^2 T_1(r) \cdot \tau + q(r)(q_0 - q_1 r). \quad (22)$$

Тоді, прирівнявши члени за однакових ступеней τ , перепишемо (22) як систему рівнянь:

$$\begin{cases} k \nabla^2 T_0(r) = c_p \rho(r) T_1(r) - q_0 q(r); \\ k \nabla^2 T_1(r) = q_1 q(r). \end{cases} \quad (23)$$

Граничні ж умови в цьому випадку необхідно змінити так:

$$\begin{aligned} T_0(R_0) &= \varphi_0; \quad \left(\frac{\partial T_0(r)}{\partial r} \right)_{r=R_0} = -\frac{\Psi_0}{4\pi R_0^2}; \\ T_1(R_0) &= \varphi_1; \quad \left(\frac{\partial T_1(r)}{\partial r} \right)_{r=R_0} = -\frac{\Psi_1}{4\pi R_0^2}; \end{aligned} \quad (24)$$

У такому разі система рівнянь (23) з граничними умовами (24) допускає вже не наближений, а точний аналітичний розв'язок

$$Q_1(r) = 4\pi \int_{R_0}^1 \xi^2 q_{v1} \rho_v(\xi) \partial \xi + \Psi_1, \quad (25)$$

$$T_{\{0,1\}}(r) = -\frac{1}{4\pi k} \int_{R_0}^r \frac{1}{\eta^2} Q_{\{0,1\}}(\eta) \partial \eta + \varphi_{\{0,1\}} = \quad (26)$$

$$-\frac{1}{k} \int_{R_0}^r \frac{1}{\eta^2} \int_{R_0}^{\eta} \xi^2 q_{v1} \rho_v(\xi) \partial \xi \partial \eta + \frac{\Psi_{\{0,1\}}}{4\pi k} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{r} \right) + \varphi_{\{0,1\}}$$

$$Q_0(r) = 4\pi \int_{R_0}^r \xi^2 (q_{v1} \rho_v(\xi) - c_p \rho T_1(\xi)) \partial \xi + \Psi_0, \quad (27)$$

Якщо підставити в (24)–(27) функцію розподілу джерел тепла й ефективні коефіцієнти теплоперенесення, можна прямо одержати шукані розподіли температури і теплового потоку.

Однак якщо цілком припустимо вважати, що радіоактивні джерела розташовані винятково у верхніх шарах земної кори, то щодо значення ефективної теплопровідності можна зробити лише дуже грубі оцінки, що в цьому випадку не прийнятне. Подолати ці труднощі можна, якщо з достатньою точністю знати температури фазових переходів [1] на межах поділу шарів, що формують оболонки Землі (див. таблицю).

Значення температур фазових переходів на межах шарів

| Межа | Радіус, км | Температура, °С | Середня густина ρ , кг/м ³ | Теплоємність c_p , Дж/кг С |
|--------------------------------|------------|-----------------|--|------------------------------|
| Поверхня Землі | 6 371 | 0 | 3 165,22 | 1 250 |
| Зона плавлення вулканічних лав | 6 271 | 1 160–1 240 | 3 385,42 | 1 250 |
| Перша зона фазового переходу | 5 971 | 1 600 | 3 841,85 | 1 250 |
| Друга зона фазового переходу | 5 771 | 1 900 | 4 861,23 | 1 260 |
| Ядро–мантія | 3 480 | 3 000–5 000 | | |

Урахування цих надлишкових даних дає змогу сформулювати зворотну задачу теплопровідності, у якій невідомими будуть значення ефективної теплопровідності в кожному зі структурних шарів Землі [6]. Для дослідження розподілу теплового потоку в мантії розділимо її на $N-1$ сферичних шарів з різними фазовими станами (рис. 2). Закони збереження потребують безперервності температури і теплового потоку, тобто для членів розкладання в ряд (20) на межі між двома сусідніми шарами $n-1$ і n

$$\begin{aligned} Q_1^{(n)}(R_r^{(n)}) &= Q_1^{(n-1)}(R_r^{(n)}), T_1^{(n)}(R_r^{(n)}) = T_1^{(n-1)}(R_r^{(n)}); \\ Q_0^{(n)}(R_r^{(n)}) &= Q_0^{(n-1)}(R_r^{(n)}), T_0^{(n)}(R_r^{(n)}) = T_0^{(n-1)}(R_r^{(n)}); \\ T_0^{(n)}(R_r^{(n+1)}) &= T_0^{(n+1)}, \end{aligned} \quad (26)$$

де T_0^n – n -не значення температури фазового переходу; R_n – n -й радіус поділу на сферичні оболонки. На зовнішній межі для верхнього шару задамо значення загального теплового потоку Q_{\oplus} і знехтуємо зміною температури з часом (стрімкий фазовий перехід між оболонками тверда земна кора–атмосфера):

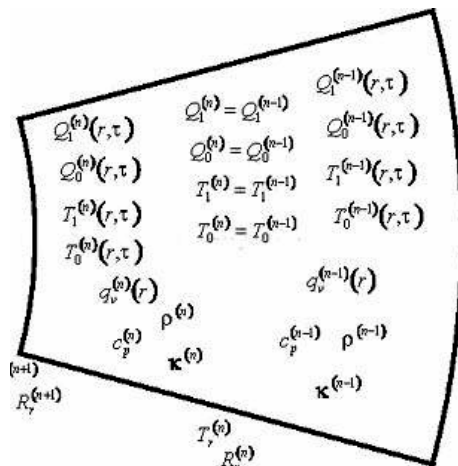


Рис. 2. Схема поділу мантії на сферичні шари.

$$Q_0^1(R_r^1) = Q_{\oplus}, T_1^1(R_r^1) = 0. \quad (27)$$

Аналогічно для найнижчого шару

$$T_1^{N-1}(R_r^N) = 0, T_0^{N-1}(R_r^N) = T_r^N. \quad (28)$$

Остаточно одержимо трансцендентну систему з $5N$ рівнянь, складених з (26)–(28) відповідно до (22)–(25). Невідомі тут сталі інтегрування $\varphi_0^n, \varphi_1^n, \psi_0^n, \psi_1^n$, ефективні теплопровідності κ^n для $n > 1$ і середнє значення функції розподілу радіоактивних джерел тепла

$$\rho_V(r) = \rho_v^n = \text{const}.$$

Для моделювання процесів мантіїної теплової конвекції та її взаємодії з тепловим потоком з верхньої мантії Землі у наближенні сферично-симетричного теплоперенесення мантії Землі як розв'язку систем нелінійних рівнянь (15)–(17), автори [6] розробили програму, за допомогою якої отримано фізично значимі для Землі результати, відображені на рис. 3.

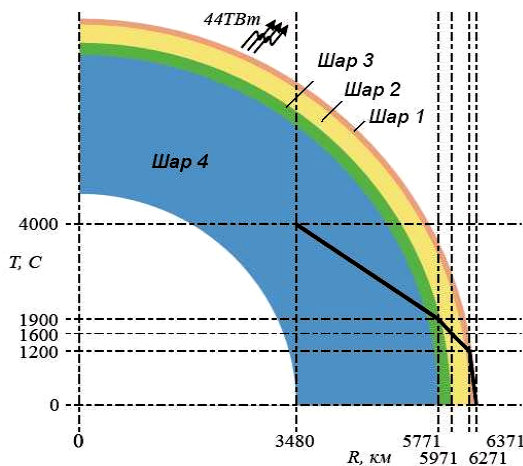


Рис. 3. Модель теплоперенесення у верхній мантії Землі в наближенні чотирьох шарів.

(Сталі радіоактивні значення для (7) з [1] такі: $Q_{\oplus} = 44 \cdot 10^{12}$; Вт = 44ТВт; $q_0 = 4,722375 \cdot 10^{-9}$; $q_1 = -2,680118 \cdot 10^{-26}$).

Аналогічно до [2], область від межі ядро–мантія до поверхні розділили на чотири сферичні шари. Для визначення середніх значень густини шарів використовували модель будови Землі PREM (Preliminary Reference Earth Model) [40]. Температури фазових переходів (див. таблицю) та дані про тепловий потік з поверхні Землі Q_{\oplus} взято із [1].

Отже, метод побудови простої самоузгодженої теплової моделі мантії Землі та її конвекції є незалежним від інших методом визначення розподілу температури і теплового потоку у верхній мантії Землі. Дослідження структури розподілу густини мантії має вирішальне значення для розуміння еволюції Землі, тому що саме диференціація густини в мантії, пов'язана з варіаціями як температури, так і хімічного складу, є рушійною силою мантіїної конвекції. І все-таки всі наявні інформаційні дані, які ми наразі можемо мати, недостатні для повного розуміння природи термодинамічних та конвективних процесів, що відбуваються у

мантії, хоча вони є ключовими положеннями до пояснення багатьох геофізичних і геологічних явищ. Виконаний аналіз можливостей побудови простої самоузгодженої теплової моделі мантії Землі та її конвекції, що ґрунтується тільки на вірогідно відомих даних, свідчить про залежність теплового стану мантії від можливих варіацій температури на межі ядро–мантія. Результати цієї праці дають змогу отримати функціональні залежності для розподілів температури і теплового потоку в надрах Землі, обчислити їх, а також спроектувати еволюцію залежно від температур фазових переходів, концентрацій радіоактивних джерел і характеристик теплопровідності верхньої твердої частини мантії і кори Землі.

1. *Кабан М.К.* Структура верхней мантии континентов по сейсмическим и гравитационным данным // Электронный информационный журнал “Вестник отделения наук о Земле”. 2002. № 1 (20–41). http://www.scgis.ru/russian/cp1251/h_dgggms/1-2002/scpub11.htm#begin.
2. *Летников Ф.* К проблеме источника внутреннего тепла Земли // Докл. АН. 2001. Т. 378. № 3. Стр. 387–389.
3. *Старченко С.В., Степанов А.А.* Источники и потоки тепла в мантии Земли // Докл. АН. 2002. Т. 384. № 3. С. 391–394.
4. *Степанов А.А., Старченко С.В.* Сферически-симметричный теплоперенос в мантии // Исследовано в России. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2005/169.pdf>.
5. *Стэйси Ф.* Физика Земли / Пер. с англ. М.: Мир, 1972. 344 с.
6. *Трубицын В.П., Белавина Ю.Ф., Рыков В.В.* Тепловая конвекция в мантии с переменной вязкостью и континентальной плитой конечных размеров // Физика Земли. 1994. № 7/8. С. 5–17.
7. *Трубицын В.Р., Бобров А.М., Кубышкин В.В.* Тепловая конвекция в мантии, вызванная горизонтальным и вертикальным градиентом температуры // Физика Земли. 1991. № 5. С. 12–23.
8. *Фурман В.В., Павлюк О.М.* Особливості моделювання геодинамічних процесів та термодинамічні характеристики глибинних структур // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. геол. 2004. Вип. 18. С. 112–136.
9. *Allen K. McNamara, Shijie Zhong.* The influence of thermochemical convection on the fixity of mantle plumes // Earth and Planetary Science Letters. 222 (2004). P. 485–500.
10. *Anderson O.L., Duba A.* Experimental melting curve of iron revisited. J. Geophys. Res. 102 (1997). P. 22659–22669.
11. *Artemieva I.M. and Mooney W.D.* 2001. Thermal thickness and evolution of Precambrian lithosphere: A global study // J. Geophys. Res. V. 106. B. P. 16387–16414.
12. *Bouhler R.* Temperature in the Earth’s core from melting point Measurements of iron at high static pressures. Nature 363 (1993). P. 534–536.
13. *Cazenave A., Dominh K., Allegre C.J. & Marsh J.G.* 1986. Global Relationship between oceanic geoid and topography // J. geophys. Res. V. 91. B. P. 11439–11450.
14. *Davaille F. Girard, M. Le Bars.* How to anchor hotspots in a convecting mantle? // Earth Planet. Sci. Lett. 203 (2002). P. 621–634.

15. *Dziewonski A.M., Anderson D.L.* Preliminary Reference Earth Model. *Physics of Earth and Planetary Interiors*. 25 (1981). P. 297–356.
16. *Hager B.H.* 1983. Global isostatic geoid anomalies for plate and boundary layer models of the lithosphere // *Earth planet. Sci. Lett.* V. 63. P. 97–109.
17. *Hansen U., Yuen D.A.* Extended-Boussinesq thermal – chemical convection with moving heat sources and variable viscosity. *Earth Planet. Sci. Lett.* 176 (2000). P. 401–411.
18. *Jordan T.H.* 1978. Composition and development of the continental tectosphere // *Nature*. V. 274. P. 544–548.
19. *Loddoch et al.* Temporal variations in the convective style of planetary mantles // *Earth and Planetary Science Letters*. 251 (2006). P. 79–89.
20. *Montague N.L., Kellogg L.* Numerical models of adense layer at the base of the mantle and implications for the geodynamics at DU, *J. Geophys. Res.* 105 (2000). P. 11101–11114.
21. *Parmentier E.M., Sotin C. and Travis B.J.* Turbulent 3-D thermal convection in an infinite Prandl number, volumetrically heated fluid; Implication for mantle dynamics // *Geophys. J. Int.*, 1994. Vol. 116. 241–254.
22. *Parmentier E.M., Sotin C. and Travis B.J.* Turbulent 3-D thermal convection in an infinite Prandl number, volumetrically heated fluid; Implication for mantle dynamics // *Geophys. J. Int.* 1994. Vol. 116. P. 241–254.
23. *Poudjom Djomani Y.H., O'Reilly S.Y., Griffin W.L. and Morgan P.* 2001. The density structure of subcontinental lithosphere through time. *Earth Planet. Sci. Lett.* Vol. 184. P. 605–621.
24. *Ritsema J. and van Heijst H.* 2000. New seismic model of the upper mantle beneath Africa // *Geology*. V. 28. P. 63–66.
25. *Roberts P.H., Gladzmaier G.A.* Geodynamo theory and simulations. *Review of Modern Physics*. Vol. 72. N 4. 2000. P. 1081–1123.
26. *Röhm A.H.E., Snieder R., Goes S. and Trampert J.* 2000. Thermal structure of continental upper mantle inferred from S-wave velocity and surface heat flow // *Earth planet. Sci. Lett.* V. 181. P. 395–407.
27. *Sotin C., Labrosse S.* Three-dimensional thermal convection in an iso-viscous, infinite Prandtl number fluid heated from within and from below: applications to the transfer of heat through planetary mantles. *Physics of Earth and Planetary Interiors*. N 112. 1999. P. 171–190.
28. *Sotin C., Labrosse S.* Three-dimensional thermal convection in an iso-viscous, infinite Prandtl number fluid heated from within and from below: applications to the transfer of heat through planetary mantles. *Physics of Earth and Planetary Interiors*. N 112. 1999. P. 171–190.
29. *Stein C., Schmalzl J., Hansen U.* 2004. The effect of rheological parameters on plate behaviour in a self-consistent model of mantle convection. *Phys. Earth Planet. Inter.* 142. P. 225–255.
30. *Takesi Yukutake.* The inner core and the surface heat flow as clues to estimating the initial temperature of the Earth's core. *Physics of Earth and Planetary Interiors*. 121. 2000. P. 103–137.
31. *Trubitsyn V.P., Rykov V.V.* 2000. A 3-D spherical model of mantle convection with floating continents // U.S. Geological Survey. Open File Report. 00-218. P. 2–44.

32. *Trubitsyn V.P.* 2000. Principles of the tectonics of floating continents // *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*. V. 36. P. 708–741.
33. *Trubitsyn V.P.* 2000. Principles of the tectonics of floating continents // *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*. V. 36. P. 708–741.
34. *Trubitsyn V.P., Rykov V.V.* 2000. A 3-D spherical model of mantle convection with floating continents // U.S. Geological Survey. Open File Report. 00-218. P. 2–44.
35. *Walzer U., Hendel R., Baumgardner J.* 2004a. The effects of a variation of the radial viscosity profile on mantle evolution. *Tectonophysics*. 384. P. 55–90.
36. *Van der Lee S. and G. Nolet.* 1997. Upper mantle S-velocity structure of North America // *J. Geophys. Res.* V. 102. P. 22815–22838.
37. *Van Schmus W.R.* Natural radioactivity of the crust and mantle. *Global Earth Physics. A Handbook of Physical Constants*. AGU Reference Shelf 1. Am. Geophys. 1995. P. 283–291.
38. *Wen L., Silver P., James D., Kuehnel R.* Seismic evidence for a thermochemical boundary at the base of the Earth's mantle, *Earth Planet. Sci. Lett.* 189 (2001). P. 141–153.
39. *Williams Q., Knittle E., Jeanloz R.* The high-pressure melting curve of iron: a technical discussion. *J. Geophys. Res.* 96 (1991). P. 2171–2184.
40. *Zhong S., Zuber M.T., Moresi L., Gurnis M.* Role of temperature-dependent viscosity and surface plates in spherical shell models of mantle convection. *J. Geophys. Res.* 105 (2000). P. 11063–11082.

THE SIMULATION OF THE CONVECTION THERMAL FLOODING OF THE UPPER EARTH'S MANTLE

V.V. Fourman

Ivan Franko National University of Lviv, Hrushevskij Str. 4, UA – 79005 Lviv

E-mail: fourman@franko.lviv.ua

The correlation mantle thermo state from possible temperature variations on core-mantle region are showed and Earth's mantle thermo model is constructed. The obtaining mantle's temperature from observer about the thermal flooding including factor uncertainty, which connected with complexity determination crust's component from the results of interpretation of the observer thermal flooding. The original method of the construction Earth's thermal model are proposed, which may be used what same on criteria for checking of correction another methods. It should be noted about correlation between thermal process convection into mantle and value of thermal flooding in the Earth' crust.

Key words: Mantle thermal flooding, mantle convection, Earth's mantle thermal model, mathematical model.

Стаття надійшла до редколегії 22.10.2007

Прийнята до друку 03.12.2008