УДК 336.761:004.942

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОЦІНЮВАННЯ РИНКОВОЇ ЦІНИ АКЦІЇ В МОМЕНТ ВИКОНАННЯ ОПЦІОНУ

Н. Купрій

Львівський національний університет імені Івана Франка

Створено математичну модель оцінювання ринкової ціни акції в момент виконання опціону. Виведено формули для визначення інтервалу зміну ринкової ціни call- та put-опціонів європейського стилю. На підставі отриманих результатів проведено обчислення інтервалів дохідності чотирьох базових опціонних стратегій.

Ключові слова: опціон, call- та put-опціони, момент виконання опціону, ринкова ціна, дохідність, опціонні стратегії.

Створення ефективно діючого фінансового ринку є найважливішим завданням розвитку економіки країни. Будь-які масштабні економічні перетворення залишаться незавершеними без створення конкурентно-спроможного фінансового сектора, здатного мобілізувати, перерозподіляти та надавати реформованій економіці інвестиційні ресурси. Тому розвиток фондового ринку, як невід'ємної частини фінансового ринку та важливого сегмента національної економіки, набуває першочергового значення.

В умовах, коли відбувається синхронізація темпів економічного зростання в базових галузях економіки та зміцнення міжгалузевих зв'язків, простежується тенденція активізації діяльності на фондовому ринку за рахунок збільшення обсягів торгів на ринку цінних паперів.

В Україні у 2005 році обсяг торгів на ринку цінних паперів перевищив обсяги як виробництва продукції сільського господарства, так і товарів народного споживання [11].

Важливе місце на ринку цінних паперів займають опціони. Опціон – це фінансовий контракт між двома сторонами – покупцем і продавцем, який за визначену премію надає право (але не зобов'язує) купити або продати визначений фінансовий інструмент, що лежить в основі даного контракту, за фіксованою ціною протягом встановленого терміну.

У 2005 р. в Україні загальних обсяг зареєстрованих Державною комісією з цінних паперів та фондового ринку випусків цінних паперів становив 61,99 млрд. грн., що є найвищим показником з початку реєстрації випусків, з них опціонів – на суму 160,55 млн. грн. Порівняно з 2004 роком обсяг зареєстрованих випусків опціонів збільшився у 1,43 рази [11].

Починаючи з 2000 року, Державною комісією з цінних паперів та фондового ринку зареєстровано випуски опціонів здійснених 14 емітентами [11].

Збільшення кількості фінансових операцій з опціонами зумовлює активні дослідження різних математичних моделей, які описують поведінку цих фінансових інструментів на ринку та їх базових активів. У математичній та економічній літературі питання, пов'язані з моделюванням поведінки акцій та опціонів на ринку висвітлюється у працях українських та зарубіжних вчених [1-4, 6-10 та ін.].

Для характеристики опціонів використовують 6 показників: ціна виконання, опціонна премія, дата виконання (експірації), тип опціону, стиль опціону, актив, що лежить в його основі (базовий актив). Ціна виконання опціону – це ціна, за якою власник опціону може купити (продати) базовий актив. Покупець опціону за надане йому право проведення фінансової операції на ринку цінних паперів сплачує продавцеві опціону певну винагороду – премію, яка є ринковою ціною опціону. Дата виконання (момент виконання) – це останній операційний день на біржі, в який цей опціон може бути виконаний. Якщо опціон не виконується до цієї дати, то він втрачає дійсність, а його власник – премію.

Опціони бувають двох типів: опціони, які дають право купити базовий актив – call-опціони та опціони, що дають право продати базовий актив – put-опціони. Власник call-опціону розраховує на підвищення ринкових цін на базовий актив ("грає на "бичому" ринку"), а власник put-опціону – на пониження ("грає на "ведмежому" ринку").

Залежно від стилю виконання розрізняють опціони європейського й американського стилів. Опціон європейського стилю не може бути виконаний до настання дати виконання. Опціон американського типу може бути виконаний в будь-який момент часу від дати купівлі до дати виконання.

Залежно від можливості одержання прибутку (збитку) розрізняють:

– опціони з виграшем ("при грошах") – це call-опціони з ціною виконання нижчою за ринковий (поточний) курс базового активу, або put-опціони з ціною виконання вищою за поточний курс базового активу;
– опціони без виграшу ("нейтральні опціони ") – це call- і put-опціони, ціна виконання яких дорівнює

поточному курсу базового активу;

– опціони з програшем ("без грошей") – це call-опціони з ціною виконання вищою за поточний курс базового активу, або put-опціони з ціною виконання нижчою за поточний курс базового активу.

1. Обчислення ринкової ціни опціонів європейського стилю

Ціна опціону є похідною від ціни фінансового інструмента, що лежить в його основі (ним можуть виступати акції, облігації, валюта, біржеві індекси, ф'ючерсні контракти і т.д.). Надалі розглядатимемо опціони на акції. Торгівля опціонами на акції розпочалася в 1973 р. на Чиказькій біржі опціонів (Chicago Board Options Exchange, CBOE). Зараз опціони на акції є найбільш поширеними опціонними контрактами.

Премія опціону складається з двох компонент: внутрішньої вартості та "вартості в часі". Покупці опціонів, з одного боку, готові сплатити більшу премію за опціони з довшим терміном виконання, оскільки вони мають більше часу на здійснення їх сподівань, а з другого – вони вимагають більшої премії за опціони з довшим терміном виконання, оскільки вони ризикують протягом більшого періоду часу. Таким чином, у більшості випадків справджується такий принцип: чим більший термін виконання опціону, тим вища його "вартість в часі", що відображається у більшому розмірі премії. Внутрішня вартість опціону показує, на скільки він перебуває "при грошах". Опціони "без грошей" не мають внутрішньої вартості, їх премія складається лише з "вартості в часі".

Однією з найпоширеніших математичних моделей обчислення ринкової ціни call-опціону є модель Блека-Шоулса. Згідно з формулою Блека-Шоулса премія call-опціону С обчислюється так [10]:

$$C = S\mathrm{N}(d_1) - Xe^{-rT}\mathrm{N}(d_2), \qquad (1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{X} + rT}{\sigma\sqrt{T}},\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

тут S – поточна ціна акції, X – ціна виконання опціону, r=1+i, i – безризикова процентна ставка для періоду T, σ – волатильність базового активу, T – термін дії опціону, $\mathrm{N}(d)$ – функція нормального розподілу з параметрами (0,1).

Ринкова ціна put-опціону обчислюється за такою формулою [10]:

$$P = C - S + \frac{X}{r} \qquad (2)$$

Якщо невідоме точне значення деякого параметра a, то говорять, що "параметр a приблизно дорівнює $\overline{a}$ і знаходиться в діапазоні $[a_{\min}, a_{\max}]$". Часто цим точкам відповідають суб'єктивні ймовірності реалізації відповідних "нормального", "песимістичного" та "оптимістичного" сценаріїв вихідних даних [6].

У класичній моделі Блека-Шоулса параметри *S, X, r, T,* σ є постійними і фіксуються в момент виписування опціону. На підставі значень цих параметрів за формулою (1) визначається ринкова ціна call-опціону європейського стилю. Однак відомо, що в багатьох випадках премія, обчислена за цією формулою, суттєво відрізняється від реальної ринкової ціни опціону. У зв'язку з цим існують різні узагальнення моделі Блека-Шоулса, зокрема [4].

У даній роботі пропонується один з варіантів модифікованої моделі Блека-Шоулса. Спробуємо визначити інтервал зміни раціональної ціни опціону за умови, що параметри *S, X, r, T* є сталими, а σ змінюється в певних межах, тобто $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2]$ (інвестор прогнозує можливий діапазон коливань ціни акції).

Використовуючи формулу (1) та методику інтервальної оцінки, запропоновану в [6], знайдемо, що:

$$\left[d_1^{(1)}, d_1^{(2)}\right] = \left[\frac{\ln\frac{S}{X} + rT}{\sigma_2\sqrt{T}}, \frac{\ln\frac{S}{X} + rT}{\sigma_1\sqrt{T}}\right],$$

$$\left[d_2^{(1)}, d_2^{(2)}\right] = \left[\frac{\ln\frac{S}{X} + rT}{\sigma_2\sqrt{T}} - \sigma_2\sqrt{T}, \frac{\ln\frac{S}{X} + rT}{\sigma_1\sqrt{T}} - \sigma_1\sqrt{T}\right].$$

Функцію нормального розподілу *N(0,1)* обчислимо наближено за формулою:

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}\left(1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{8}+...\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{40}+...\right). \qquad (3)$$

Звідси, на підставі формули (3), в якій з точністю до $\varepsilon=10^{-4}$ зберігається 3 доданки, знайдемо:

$$N\left(\left[d_1^{(1)},d_1^{(2)}\right]\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[d_1^{(1)}-\frac{(d_1^{(2)})^3}{6}+\frac{\left(d_1^{(1)}\right)^5}{40},d_1^{(2)}-\frac{(d_1^{(1)})^3}{6}+\frac{\left(d_1^{(2)}\right)^5}{40}\right]=$$

$$=\left[N(d_1)^{(1)},N(d_1)^{(2)}\right], \qquad (4)$$

$$N\left(\left[d_2^{(1)},d_2^{(2)}\right]\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[d_2^{(1)}-\frac{(d_2^{(2)})^3}{6}+\frac{\left(d_2^{(1)}\right)^5}{40},d_2^{(2)}-\frac{(d_2^{(1)})^3}{6}+\frac{\left(d_2^{(2)}\right)^5}{40}\right]=$$

$$=\left[N(d_2)^{(1)},N(d_2)^{(2)}\right].$$

Використавши (1), формулу для визначення інтервалу зміни ринкової ціни європейського call-опціону запишемо так:

$$[C_1,C_2]=\left[SN\left(d_1^{(1)}\right)-Xe^{-rT}N\left(d_2^{(2)}\right),SN\left(d_1^{(2)}\right)-Xe^{-rT}N\left(d_2^{(1)}\right)\right].$$

(5)

Знаючи зв'язок (2) між цінами call- і put-опціонів, отримаємо таку формулу для обчислення інтервалу зміни ринкової ціни put-опціону європейського стилю:

$$[P_1,P_2]=\left[C_1-S+\frac{X}{r},C_2-S+\frac{X}{r}\right] \qquad (6)$$

2. Визначення інтервалу зміни ринкової ціни акції
в момент виконання опціону

У даній роботі зроблена спроба змоделювати інтервал зміни ринкової ціни акції в момент виконання опціону. Це здійснюється на основі використання відомостей щодо розподілу випадкової величини майбутньої ціни акції та принципів знаходження інтервалу довіри.

Для побудови відповідної економіко-математичної моделі введемо необхідні позначення. Нехай

S_t – випадкова ціна акції в періоді t, $t=0,1,2,...T$;

T – термін дії опціону;

S_T – випадкова величина – фінальна ціна базового активу в момент t=T експірації опціону (невідома величина);

$[S_{T1},S_{T2}]$ – інтервал зміни випадкової величини S_T, який будемо визначати;

i – безризикова процентна ставка (відома величина);

S_0 – ціна акції в початковий момент часу t=0 (відома величина);

$\sigma=\sigma(S_T)$ – волатильність базового активу – відхилення S_T від свого середнього значення $M(S_T)$ (відома величина).

Спираючись на дослідження Уотшема Е.Дж. та Паррамоу К. [7], які стверджують, що випадкова величина $\frac{S_T}{S_0}$ має логнормальний розподіл з деякими параметрами (m, s^2), змоделюємо визначення інтервалу зміни ринкової ціни акції в момент виконання опціону.

Спочатку проведемо обчислення чисельних характеристик випадкової величини $\frac{S_T}{S_0}$ – її математичного сподівання $M\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$ і дисперсії $D\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$:

$$M\left(\frac{S_T}{S_0}\right)=\frac{MS_T}{MS_0}=\frac{S_0(1+i)}{S_0}=(1+i), \tag{7}$$

$$D\left(\frac{S_T}{S_0}\right)=\frac{1}{S_0^2}DS_T=\frac{1}{S_0^2}\left(\sigma(S_T)\right)^2=\frac{\sigma^2\left(MS_T\right)^2}{S_0^2}=\sigma^2(1+i)^2. \tag{8}$$

Формули для обчислення математичного сподівання і дисперсії логнормально-розподіленої випадкової величини з параметрами (m,s^2) записуються так [7]:

$$\begin{cases} M\left(\dfrac{S_T}{S_0}\right)=e^{m+\frac{s^2}{2}}, \\ D\left(\dfrac{S_T}{S_0}\right)=\left(e^{s^2}-1\right)e^{2m+s^2}. \end{cases} \tag{9}$$

На підставі (7), (8) з (9) знайдемо, що

$$\begin{cases} m=\ln\dfrac{1+i}{\sqrt{\sigma^2+1}}, \\ s=\sqrt{\ln\left(\sigma^2+1\right)}. \end{cases} \tag{10}$$

Оскільки випадкова величина $\ln\dfrac{S_T}{S_0}$ має нормальний розподіл з параметрами (m, s^2), $\ln\dfrac{S_T}{S_0}\in N\left(m,s^2\right)$, то

$$\Pr\left\{\ln\frac{\mathrm{S_T}}{S_0}\in[m-\delta,m+\delta]\right\}=\Pr\left\{\ln\frac{\mathrm{S_T}}{S_0}-m\in[-\delta,\delta]\right\}=$$

$$=\Pr\left\{\left(\ln\frac{\mathrm{S_T}}{S_0}-m\right)/s\in[-\delta/s,\delta/s]\right\}=1-\alpha, \tag{11}$$

де α – рівень значущості, δ – деяке відхилення від m, яке потрібно визначити.

Очевидно, що випадкова величина $\dfrac{\ln\frac{S_T}{S_0}-m}{s}$ має нормальний розподіл з параметрами (0,1). За таблицею значень функції розподілу нормального розподілу з параметрами (0,1) [5] знаходимо відповідний квантиль $q_{0,975}$ для рівня значущості $\alpha=0{,}05\left(1-\dfrac{\alpha}{2}=0{,}975\right)$:

$$q_{0,975}=\frac{\delta}{s}=1{,}96. \tag{12}$$

З рівності (12) отримаємо:

$$\delta=1{,}96s. \tag{13}$$

Використовуючи формулу (11), приходимо до висновку, що

$$\Pr\left\{\frac{S_T}{S_0}\in\left[e^{m-\delta},e^{m+\delta}\right]\right\}=1-\alpha. \tag{14}$$

Підставивши значення m, s, δ з формул (10), (13) в (14), знайдемо, що

$$S_T\in\left[\frac{1+i}{\sqrt{\sigma^2+1}}S_0\exp\left\{-1{,}96\sqrt{\ln\left(\sigma^2+1\right)}\right\},\ \frac{1+i}{\sqrt{\sigma^2+1}}S_0\exp\left\{1{,}96\sqrt{\ln\left(\sigma^2+1\right)}\right\}\right]. \tag{15}$$

Отже, для рівня значущості $\alpha=0{,}05$ знайдений інтервал довіри і можна стверджувати, що значення ринкової ціни акції в момент виконання опціону з ймовірністю 0,95 знаходяться в даному інтервалі.

3. Використання математичної моделі оцінювання ринкової ціни акції
в момент виконання опціону при обчисленні дохідності
базових опціонних стратегій

Вміле використання опціонів значно розширює інвестиційні можливості і шанси на успіх у ринковій грі. За допомогою комбінації опціонів можна утворювати стратегії, які дозволяють обмежувати ризик при проведенні гри на фондовій біржі. Для цього розроблені і успішно застосовуються десятки опціонних стратегій.

Пропонується на основі відомих формул дохідності базових опціонних стратегій провести обчислення інтервалів дохідності цих стратегій. До базових опціонних стратегій належать відкриті (“непокриті”) та закриті (“покриті”) позиції.

При відкритій позиції у портфелі є лише опціон. При сприятливій кон’юнктурі ринку дохідність від купівлі “непокритих” опціонів може складати сотні відсотків. Це однак і найризикованіші стратегії, оскільки у випадку, коли напрям ринку буде передбачено неправильно, після дати закінчення терміну всі інвестиції у відкриті опціони будуть втрачені. Проаналізуємо дохідність основних “непокритих” опціонних стратегій.

Введемо такі позначення:

X_c – ціна виконання call-опціону;

X_p – ціна виконання put-опціону;

I_T – дохідність (збитковість) комбінації, випадкова величина.

1. Купівля “непокритого” call-опціону.

Купуючи “непокритий” call-опціон, інвестор розраховує отримати премію – різницю між фінальною ціною базового активу S_T і ціною виконання опціону X_c. Якщо ця різниця покриває ціну купівлі опціону C, то власник опціону отримує прибуток, в протилежному випадку – збиток. Дохідність цієї стратегії визначають за такою формулою:

$$I_T = \max\left(S_T - X_c, 0\right) - C \tag{16}$$

Спробуємо визначити інтервал зміни випадкової величини дохідності даної стратегії. Використовуючи виведені формули (5) для знаходження інтервалу зміни ринкової ціни європейського call-опціону та (15) для обчислення інтервалу зміни ціни акції в момент виконання опціону, на підставі (16) знайдемо інтервал дохідності цієї стратегії:

$$\left[I_{T1}, I_{T2}\right] = \begin{cases} \left[S_{T1} - X_c - C_2, S_{T2} - X_c - C_1\right], & X_c < S_{T1}, \\ \left[-C_2, S_{T2} - X_c - C_1\right], & X_c \in \left[S_{T1}, S_{T2}\right], \\ \left[-C_2, -C_1\right], & X_c > S_{T2}. \end{cases} \tag{17}$$

2. Купівля “непокритого” put-опціону.

Використовуючи цю стратегію, інвестор розраховує отримати премію – різницю між ціною виконання опціону X_p і фінальною ціною базового активу S_T. Якщо ж та різниця більша від ціни купівлі опціону P, то власник опціону отримує прибуток, в протилежному випадку – збиток.

Дохідність такої стратегії визначають за формулою:

$$I_T = \max\left(X_p - S_T, 0\right) - P \tag{18}$$

Врахувавши інтервали зміни значень P та S_T, обчислені за формулами (6) та (15) відповідно і використавши формулу дохідності стратегії (18) , визначимо інтервал зміни дохідності цієї стратегії:

$$\left[I_{T1}, I_{T2}\right] = \begin{cases} \left[-P_2, -P_1\right], & X_p < S_{T1}, \\ \left[-P_2, X_p - S_{T1} - P_1\right], & X_p \in \left[S_{T1}, S_{T2}\right], \\ \left[X_p - S_{T2} - P_2, X_p - S_{T1} - P_1\right], & X_p > S_{T2}. \end{cases} \tag{19}$$

Другий тип базових опціонних стратегій – закриті (“покриті”), або хеджовані позиції. В закритій позиції торгують разом акцією і опціоном на неї. Можна змінювати кількість опціонів, що припадають на одну акцію в портфелі, тобто змінювати коефіцієнт або пропорцію хеджування. Розглянемо базові “покриті” опціонні стратегії.

Купівля “покритого” put-опціону.

Інвестор, купуючи put-опціон і базовий актив, зменшує дохідність своїх інвестицій у випадку досягнення додатного прибутку, але зменшує при цьому збиток.

Оскільки вартість такої стратегії дорівнює $\max\left(X_p - S_T, 0\right)$, а затрати на її купівлю складають $-P - S$, то дохідність стратегії обчислюють за наступною формулою:

$$I_T = \max\left(X_p - S_T, 0\right) - P - S\,.$$

Застосувавши попередні міркування, отримаємо інтервал дохідності цієї стратегії:

$$[I_{T1}, I_{T2}] = \begin{cases} [-P_2 - S, -P_1 - S], & X_p < S_{T1}, \\ [-P_2 - S, X_p - S_{T1} - P_1 - S], & X_p \in [S_{T1}, S_{T2}], \\ [X_p - S_{T2} - P_2 - S, X_p - S_{T1} - P_1 - S], & X_p > S_{T2}. \end{cases}$$

Купівля "покритого" call-опціону.

Оскільки ($-C - S$) – затрати на купівлю такої стратегії, то

$$I_T = \max(S_T - X_c, 0) - C - S. \tag{20}$$

І тоді визначений на підставі формул (5), (15) та (20) інтервал дохідності даної стратегії обчислюється так:

$$[I_{T1}, I_{T2}] = \begin{cases} [S_{T1} - X_c - C_2 - S, S_{T2} - X_c - C_1 - S], & X_c < S_{T1}, \\ [-C_2 - S, S_{T2} - X_c - C_1 - S], & X_c \in [S_{T1}, S_{T2}], \\ [-C_2 - S, -C_1 - S], & X_c > S_{T2}. \end{cases}$$

Висновки

При розв'язанні фінансових задач на визначення дохідності опціонних стратегій важливим є питання про визначення інтервалу зміни ринкової ціни акції в момент виконання опціону. У даній роботі запропоновано математичну модель для знаходження такого інтервалу, який дає можливість визначити діапазон зміни ринкової ціни акції в момент експірації опціону.

Щоб отримати інтервал зміни ринкової ціни call- та put-опціонів європейського стилю, була проведена модифікація формули Блека-Шоулса для обчислення ціни опціонів. На підставі цього отримано діапазон зміни премії опціонів європейського стилю.

Одним з важливих питань оцінювання опціонних стратегій є визначення їх дохідності. На підставі запропонованої математичної моделі та виведеної формули проведено обчислення інтервалів дохідності чотирьох базових опціонних стратегій.

Використовуючи запропоновану модель оцінювання ринкової ціни акції в момент виконання опціону та викладений принцип визначення інтервалів дохідності, можна проводити оцінювання комбінованих опціонних стратегій.

---

1. Бондарев Б.В., Шурко И.Л. Финансовая математика. – Д.: Кассиопея, 1998.
2. Бугрій М.І. Основи фінансово-кредитного аналізу. Л.: Видавничий центр ЛНУ ім. І.Франка, 2006.
3. 3. Буренин А.Н. Фьючерсные, форвардне и опционные рынки. – М.: Тривола, 1994.
4. Ковтун С. Узагальнення моделі Блека-Шоулса. // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. Л.: Видавничий центр ЛНУ ім. І.Франка, 2006.
5. Колде Я.К. Практикум по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1991.
6. Недосекин А.О. Нечетко-множественный анализ риска фондовых инвестиций. – С.-П.: Сезам, 2002.
7. Уотшем Е.Дж., Паррамоу К. Количественные методы в финансах. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999.
8. Чесноков А.С. Инвестиционная стратегия, опционы и фьючерсы. – НИИ Управления Мин. Экономики РФ, 1993.
9. Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Краиков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов європейского и американського типов. – М., 1994.
10. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. // J. Political Economy – 1973 – Vol.81.
11. www.ssmsc.gov.ua Державна комісія з цінних паперів та фондового ринку. Звіт за 2005р

MATHEMATICAL MODEL EVALUATING THE MARKET PRICE OF STOCK AT THE DATE OF EXPIRATION

N. Kupriy

Ivan Franko National University of Lviv

A mathematic model was created evaluating the price of stock at the date of expiration. Formulas that calculate the range of market value of European call- and put-options were derived. This results were than used to calculate the ranges of profit of four basic option strategies.

Key words: option, call- and put-options, expiration data, market price, profit, option strategies.