УДК 519.863+656.022.3

МОДИФІКАЦІЇ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ МАРШРУТИЗАЦІЇ ТА ЇХ ОСОБЛИВОСТІ

М. Дацко

Львівський національний університет імені Івана Франка
79000 м. Львів, пр. Свободи 18

У статті розглянуто особливості транспортних задач маршрутизації.
Ключові слова: задачі маршрутизації, транспортні витрати, часові вікна.

Транспортні задачі маршрутизації вперше були сформульовані в науковій літературі у 50-х роках 20-го століття, проте на сьогоднішній день залишається багато запитань, які вони породжують. В подальшому у цій статті звернемо увагу на особливості, які виникають у задачах маршрутизації та проведемо їх аналіз.

На перший погляд розглядаючи класичну транспортну задачу, задачу комівояжера чи інші задачі цього класу вони видаються доволі простими, як щодо постановки, так і щодо методів їх розвязку. Проте, як показує практична діяльність, застосування таких задач для вирішення реальних економічних проблем при значній кількості постачальників, споживачів, складів, особливостей вантажів, що спричиняють до появи нових обмежень - це зовсім не так.

Транспортна задача маршрутизації в загальній постановці перетинається із рядом відомих задач, зокрема як було зазначено вище із задачею комівояжера. Транспортна задача маршрутизації є узагальненням задачі комівояжера, тому, відповідно, NP-важкою. Задача комівояжера – це транспортна задача маршрутизації з одним транспортним засобом без обмеження на вмістимість, без складу і без попиту у споживачів, а складна задача комівояжера, що передбачає один початковий пункт і m комівояжерів, відображає транспортну задачу маршрутизації зі складом, із m транспортними засобами без обмеження на вмістимість і без попиту у споживачів.

Відомі наступні методи розв'язування транспортних задач маршрутизації:

– точний підхід (до ста пунктів):
– ▪ метод віток і границь (Фішер, 1994);
– наближений підхід:
– ▪ метод Кларка і Райта (1964);
– ▪ ієрархічний метод (Фішер і Йякумур, 1981; Таіллард, 1993);
– ▪ еврістичне покращення складного маршруту (Кіндервотер та Сейвелсберг, 1997);
– мета-евристики:
– ▪ метод Рочета і Таілларда (1995);
– ▪ метод Шоуна (1998);
– ▪ метод Келлі і Ксу (1999);
– ▪ декомпозиційний метод пошуку Тосса і Віго (1998);
– ▪ система мурашиної колонії, Гамбарделла (1999).

Цільова функція в транспортних задачах маршрутизації, як правило, мінімізує сумарні транспортні витрати в розрізі загальної відстані перевезень, загального часу перевезень, а також кількості необхідних транспортних засобів[2].

При загальній постановці транспортних задач маршрутизації вважають, що задано набір споживачів із обсягами попиту, а також витрати в розрізі споживачів повязані із перевезеннями продукції. При цьому необхідно побудувати маршрути з мінімальними транспортними витратами, кожен з яких починається і закінчується на складі і наприклад, при забезпеченні виконання наступних вимог:

– кожен споживач обслуговується лише один раз;
– сукупний попит на будь-якому маршруті не перевищує вмістимість транспортного засобу Q;
– довжина будь-якого маршруту не перевищує встановленої довжини L;
– змінна кількість складів;
– неоднорідність вантажів, які перевозяться;
– особливості законодавства, що регулює відносини які виникають в ході реалізації задачі (митне законодавство, трудове законодавство);
– невзаємозамінність транспортних засобів;
– можливість виникнення циклічних маршрутів;
– вимоги техніки безпеки;
– кількість транспортних засобів, тощо.

Розглянемо ситуацію коли маємо один транспортний засіб та набір споживачів однорідного товару. Одиночна транспортна задача маршрутизації розподілу [4] полягає в тому, щоб визначити такий маршрут для транспортного засобу, який починається і закінчується в певному пункті, причому транспортний засіб повинен відвідати певних споживачів із заданого набору, а споживачі, що не були відвідані, повинні бути розподілені на маршруті до інших споживачів або – ізольовані взагалі. Ціллю задачі є мінімізація завантаженості маршруту та мінімізація витрат, пов'язаних з розподілом та ізоляцією споживачів.

Особливими випадками одиночної транспортної задачі є задача усередненого циклу, де не дозволяється ізоляція споживачів, задача комівояжера тощо.

Приклад формулювання одиночної транспортної задачі маршрутизації із розподілом зображено на рисунку 1. Слід відзначити, що в загальному випадку маршрут має різні початок і кінець, але на практиці можна стверджувати, що вони збігатимуться.

Одиночна транспортна задача маршрутизації розподілу має багато практичних застосувань, як наприклад, планування надання необхідних медичних послуг для населення в сільській місцевості, виїздна торгівля, тощо. При такій інтерпретації наведеної задачі міркування споживачів є наступними – транспортний засіб не може відвідати всіх споживачів, тому споживачі, які не були відвідані, обирають з двох шляхів: подорожувати до найближчого пункту, який буде відвіданий, для задоволення своїх потреб, або ж залишитися без необхідних послуг. Варто зауважити, що якщо поставити за мету відвідати всіх споживачів, то одиночна транспортна задача маршрутизації розподілу перетвориться у класичну транспортну задачу.

Розглянемо одиночну транспортну задачу маршрутизації на графі. Споживачі, початковий та кінцевий пункти маршруту представлені як вершини графа $V = \{0,1,...,i,...,j,...,n,n+1\}$. Споживачі відповідно є вершинами з номерами від *1* до *n*, початковий пункт маршруту є вершиною *0*, а кінцевий пункт – вершиною *n+1*.

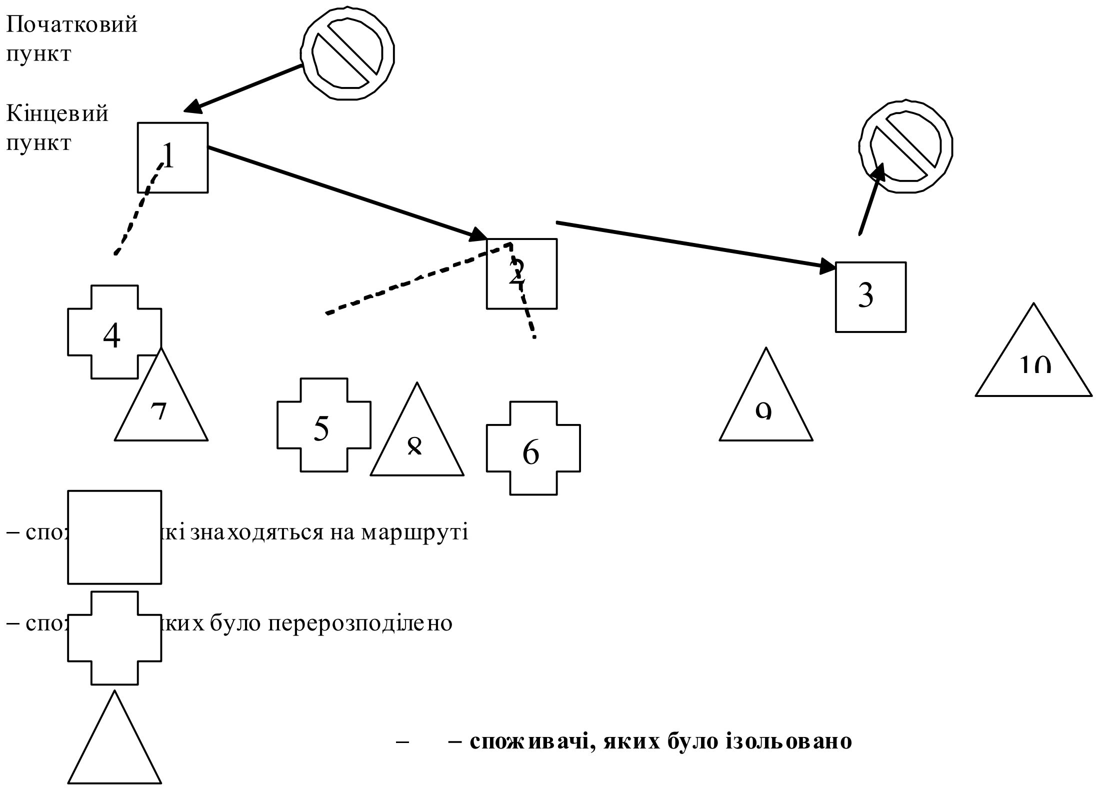

Рис. 1. Маршрут руху транспортного засобу в одиночній транспортній задачі маршрутизації із розподілом споживачів.

Нехай:

C_{ij} – витрати на рух транспортного засобу на дузі маршруту *(i,j)*;

d_{ij} – витрати на розподіл пунктів, які не були включені в початковий маршрут (вершини *j*) до пунктів, які включені в маршрут (вершини *i*);

D_i – витрати на ізоляцію вершини *i*;

F^+ – набір вершин, які повинні бути включені в маршрут, де $\{0,\ n+1\} \in F^+, \quad F^+ \subseteq V$;

F^- – набір вершин, що не повинні бути включені в маршрут, а мають бути розподілені, $F^+ \cap F^- = \not\subset,$;

λ^M – ваговий коефіцієнт маршрутних витрат в їх загальній структурі;

λ^P – ваговий коефіцієнт витрат розподілу в їх загальній структурі;

λ^I – ваговий коефіцієнт витрат на ізоляцію в їх загальній структурі;

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ якщо дуга (i,j) використовується як маршрутна дуга}; \\ 0, \textit{ в протилежному випадку}; \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ якщо вершина } j \textit{ (пункт, що не включено в маршрут) є розподіленою} \\ \textit{до вершини } i \textit{ (пункт, який включено в маршрут)}; \\ 0, \textit{ в протилежному випадку}; \end{cases}$$

$$z_i = \begin{cases} 1, \textit{ якщо вершина } i \textit{ є включеною в маршрут}; \\ 0, \textit{ в протилежному випадку}; \end{cases}$$

$$w_i = \begin{cases} 1, \textit{ якщо вершина } i \textit{ не є включеною в маршрут і є розподіленою} \\ \textit{до вершини, що є на маршруті}; \\ 0, \textit{ в протилежному випадку}; \end{cases}$$

$$v_i = \begin{cases} 1, \textit{ якщо вершина } i \textit{ не є включеною в маршрут і є ізольованою}; \\ 0, \textit{ в протилежному випадку}; \end{cases}$$

Так чином, економіко-математична модель одиночної транспортної задачі маршрутизації розподілу може бути представлена так:

$$\lambda^M \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} C_{ij} x_{ij} + \lambda^P \sum_{i=o}^{n+1} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} y_{ij} + \lambda^I \sum_{i=1}^{n} D_i v_i \to \min \quad (1)$$

$$v_i + w_i + z_i = 1, \qquad \forall\, i \in V \quad (2)$$

$$z_i = 1, \qquad \forall\, i \in F^+ \quad (3)$$

$$w_i = 1, \qquad \forall\, i \in F^- \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{0j} = 1 \quad (5)$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_{(i,n+1)} = 1 \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = \sum_{j=0}^{n} x_{ji} = z_i, \qquad i = \overline{1,n} \quad (7)$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} y_{ij} = w_j, \qquad j = \overline{1,n} \quad (8)$$

$$y_{ij} \le z_i, \qquad \forall\, i \in V, \quad j = \overline{1,n} \quad (9)$$

$$\sum_{j \in S, k \notin S} x_{jk} \ge z_i, \qquad \forall\, i \in S, \forall\, S \subset V, S \ne \not\subset \quad (10)$$

$$v_i, w_i, z_i \in \{0,1\} \qquad \forall\, i \in V \quad (11)$$

$$x_{ij}, y_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall\, i, j \in V \quad (12)$$

Цільова функція (1) мінімізує зважену суму так званих маршрутних, ізоляційних та розподільчих витрат. Обмеження (2) показує, що кожна вершина або включена в початковий маршрут, або знаходиться поза ним – ізольованою чи розподіленою. Обмеження (3) та (4) вказують на належність граней, що включені в початковий маршрут, в F^+, а невключених і розподілених граней – в F^-. Обмеження (5) та (6) показують, що маршрут розпочинається в пункті *0* та закінчується в пункті *n+1*. Обмеження (7) показує, що грані, які входять в маршрут мають одну вхідну і одну вихідну дугу, а відповідно обмеження (8) – що вершина *j* точно розподіляється до однієї з вершин, якщо вона не входить в початковий маршрут і є розподіленою, а в іншому випадку, не розподіляється до жодної з вершин. Обмеження (9) показує, що вершини, які не входять в маршрут, розподіляються лише до граней, які входять в маршрут. Обмеження (10) показує, що всі набори *S*, що містять в собі вершину, яка знаходиться на маршруті, мають хоча б одну дугу.

Вагові коефіцієнти λ, які представлені у цільовій функції, відображають той факт, що на практиці витрати, які мають місце у транспортному процесі, мають різну значимість для учасників цього процесу.

Задача проектування найменш витратних маршрутів, які повинні бути визначені так, щоб кожен пункт відвідувався тільки однією машиною в межах заданого часового інтервалу і всі маршрути починалися і закінчувалися на складі, причому загальна потреба в продукції всіх пунктів на одному маршруті не може перевищувати вантажомісткості машини, може бути інтерпретована як транспортна задача маршрутизації з часовими вікнами [1]. Суть транспортної задачі маршрутизації з часовими вікнами полягає в тому, щоб не тільки мінімізувати кількість машин, а й також загальний час перебування в рейсі та загальну відстань перевезень.

Транспортна задача маршрутизації з часовими вікнами визначена на графі (N, A). Набір пунктів N включає в себе споживачів, які позначаються $(1,2,...,i,...,h,...,j,...,n) \in C$, а також пункти 0 та n+1, які відображають склад. Набір A відповідає можливим комунікаціям між пунктами; всі маршрути розпочинаються в пункті 0 і завершуються в n+1. Вартість перевезення і час подорожі позначаються c_{ij} та t_{ij} , $(i, j) \in A$ відповідно, причому час подорожі t_{ij} включає час на обслуговування споживача i . Дано також набір однакових транспортних засобів V, кожен з яких має визначену місткість q, а кожен споживач відповідно – потребу d_i, $i \in C$. Час обслуговування споживачів повинен бути визначеним в межах заданого інтервалу часу, що називається часовим вікном, [a_i, b_i], $i \in C$. Транспортні засоби повинні залишити склад в межах часового вікна [a_o, b_o] і повернутися до його завершення [a_{n+1}, b_{n+1}]. Транспортному засобу дозволяється прибувати перед відкриттям часового вікна і очікувати, поки обслуговування стане можливим, але не дозволяється прибувати після кінцевого терміну. В загальному випадку приймаємо, що $a_o = b_o = 0$, тобто всі маршрути починаються в час *0*. Зрозуміло, що особливості окремих задач можуть вимагати додаткового узгодження таких понять як “час обслуговування”, “часове вікно”, тощо.

Модель задачі включає два типи змінних. Змінна x_{ij}^k (визначена $\forall (i, j) \in A, \forall k \in V$) є рівною *1*, якщо транспортний засіб *k* здійснює рейс із пункту *i* до пункту *j*, і дорівнює *0* в протилежному випадку. Змінна s_i^k (визначена $\forall i \in N, \forall k \in V$) вказує на час початку обслуговування споживача *i*, $i \in C$ транспортним засобом *k*, $k \in V$, причому якщо транспортний засіб *k* не обслуговує споживача *i*, s_i^k виключаємо із розгляду. Приймаємо, що $S_o^k = 0, \forall k$; S_{n+1}^k – час прибуття транспортного засобу *k* на склад.

Необхідно знайти певний набір маршрутів з мінімальними транспортними витратами, причому існує єдиний маршрут для кожного транспортного засобу і всі споживачі обслуговуються тільки один раз. При побудові маршрутів потрібно враховувати обмеження на місткість транспортних засобів та на тривалість часових вікон обслуговування споживачів. Таким чином, економіко-математична модель транспортної задачі маршрутизації з часовими вікнами матиме наступний вигляд:

$$\sum_{k \in V} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^k \to \min \tag{13}$$

$$\sum_{k \in V} \sum_{j \in N} x_{ij}^k = 1 , \qquad \forall\ i \in C \tag{14}$$

$$\sum_{i \in C} d_i \sum_{j \in N} x_{ij}^k < q , \qquad \forall\ k \in V \tag{15}$$

$$\sum_{j \in N} x_{0j}^k = 1 , \qquad \forall\ k \in V \tag{16}$$

$$\sum_{i \in N} x_{ih}^k - \sum_{j \in N} x_{hj}^k = 0 , \qquad \forall\ k \in V, \forall\ h \in C \tag{17}$$

$$\sum_{i \in N} x_{i,n+1}^k = 1 , \qquad \forall\ k \in V \tag{18}$$

$$x_{ij}^k (s_i^k + t_{ij} - s_j^k) \le 0 , \qquad \forall k \in V, \quad \forall (i,j) \in A \tag{19}$$

$$a_i \le s_i^k \le b_i , \qquad \forall\ k \in V, \quad \forall\ i \in N \tag{20}$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} , \qquad \forall\ k \in V, \quad \forall\ (i,j) \in A \tag{21}$$

Цільова функція (13) мінімізує сумарні транспортні витрати на всіх маршрутах руху транспортних засобів. Набір обмежень (14) показує, що кожен споживач повинен бути прикріплений тільки до одного транспортного засобу. Набір обмежень (15) показує, що жоден транспортний засіб не може обслужити більше споживачів, ніж дозволяє його місткість. Обмеження (16),(17),(18) забезпечують, що транспортний засіб *k* залишає пункт *0* один раз; залишає пункт *h,* $h \in C$ *,* якщо і тільки якщо він відвідає цей пункт; повертається в пункт *n+1*. Набір обмежень (19) встановлює, що транспортний засіб *k* не може прибути в пункт *j* перед тим, як наступить момент часу $S_i^k + t_{ij}$, якщо він здійснює рейс від *i* до *j*. Набір обмежень (20) забезпечує непорушність усіх часових вікон.

Із розглянутих, як приклад, типів транспортних задач маршрутизації стає очевидним той факт, що при їх практичному застосуванні неодмінно виникне цілий ряд труднощів повязаних із припущеннями на основі яких вони будуються. Так суттєвим, в окремих випадках, з практичної точки зору, є припущення про однаковий тип транспортних засобів, про однорідну продукцію яка перевозиться, про можливість відвідати або не відвідати того чи іншого клієнта, тощо.

Поряд із наведеними недоліками у постановці транспортних задач маршрутизації, особливе місце займає також проблема знаходження розвязку таких задач, адже як було зазначено вище вони відносяться до NP-задач. З огляду на це пріоритетними стають мета-еврістичні методи розвязку таких задач, зокрема, метод мурашиних колоній.

---

1. Bräysy O., Gendreau M. Tabu Search Heuristics for the Vehicle Routing Problem with Time Windows, Transportation Science, Vol. 39, No. 1, pp. 104-118, February 2005.
2. Gambardella L.M, Taillard E., Agazzi G., MACS-VRPTW: A Multiple Ant Colony System for Vehicle Routing Problems with Time Windows , In D. Corne, M. Dorigo and F. Glover, editors, New Ideas in Optimization. McGraw-Hill, London, UK, pp. 63-76, 1999.
3. Olivera A., Viera O. Adaptive Memory Programming for the Vehicle Routing Problem with Multiple Trips. Computers and Operations Research, Vol. 34, No. 1, pp. 28-47, 2007.
4. Vogt L., Poojari C.A., Beasley J.E. A Tabu Search Algorithm for the Single Vehicle Routing Allocation Problem, Journal of Operational Research Society, 2005.