УДК 681.3:519.816

ЗАСТОСУВАННЯ НЕЧІТКИХ МІР ТА ІНТЕГРАЛІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ СЛАБКО СТРУКТУРОВАНИХ ЗАДАЧ ЕКОНОМІКИ

М. Сявавко

Львівський національний університет імені Івана Франка

Нечіткі міри забезпечують більш повне подання вихідних даних для моделювання реальних економічних процесів із використанням модальності інформаційних одиниць. До того ж для обробки нечіткої інформації, формалізованої у вигляді нечітких мір, найбільш прийнятним є використання нечіткого інтеграла. Теоретичні напрацювання підтверджено практичними застосуваннями до економічних задач.
Ключові слова: нечіткість, міра, інтеграл, імовірність, довір'я, можливість, правдоподібність, апроксимація, розподіл, густина, належність, економіка.

Під час розв'язування багатьох задач аналізу складних систем економіки за умов невизначеності дуже часто користуються методами теорії ймовірності та математичної статистики. Зараз зростає потреба до нових підходів математичного опису інформації, яка характеризується високим рівнем невизначеності. Тут один із можливих підходів базується на узагальненні поняття міри та побудові нечітких мір, які позбавлені цілої низки обмежень ймовірнісної міри.

В економіці існує різноманіття інтерпретацій поняття імовірності. Це – класична частотна інтерпретація Лапласа, суб'єктивні ймовірності за Байєсом, Де Фінетті, Севіджом тощо [1]. З математичної точки зору, а саме з позицій теорії міри, найбільш змістовним є асимптотичне трактування імовірності А.Н. Колмогорова.

Як відомо [8], *мірою* називають функцію множини $m : \mathrm{P}\ (X) \to R,$ що задовольняє наступні три аксіоми:

$A \subseteq X \Leftrightarrow m(A) \geq 0;$

$m(\emptyset) = 0;$

якщо $A, B \in \mathrm{P}\,(A)$, то $m(A \bigcup B) = m(A) + m(B) - m(A \bigcap B).$

Тут Р (*X*) – множина всіх підмножин X, а $R-$ множина дійсних чисел. Коли $R = [0,1]$, ці аксіоми визначають імовірнісну міру [3].

Під *суб'єктивною імовірністю* розуміють ступінь впевненості про дану подію, яка виникає в людини на основі її психологічних даних [2]. Ця ступінь впевненості завжди залежить від індивідуального досвіду і тому є відмінною для кожної людини. Неясність міркувань, побудованих на суб'єктивному аналізі, обумовлює значні труднощі, які виникають через використання суб'єктивної ймовірності.

Суб'єктивну імовірність можна розглядати як індивідуальний спосіб обробки тих аспектів суб'єктивних даних, які доступні індивідуальному міркуванню. Але найчастіше такі міркування неадитивні. Нагадаємо, що адитивність є властивістю величин, яка полягає в тому, що значення величини, яке відповідає цілому об'єкту, дорівнює сумі значень величин, відповідних до його частин за будь-якого розбиття об'єкта на частини. У [2,7] показано, що реальна поведінка людини найчастіше суперечить припущенню про адитивність мір, яку вона використовує, оцінюючи ситуацію. На відміну від суб'єктивної імовірності, нечітка міра вільна від вельми обтяжливої вимоги адитивності, що робить її особливо привабливою при розв'язанні тих задач економіки, в яких наявна невизначеність типу нечіткості.

На сьогодення існує тенденція ймовірнісного трактування нечітких множин. Але з точки зору теорії міри, такий підхід є невиправданим, оскільки поняття ймовірнісної міри є звуженням поняття нечіткої міри. Неважко побачити, що поняття густини ймовірності та функції належності, якою характеризують нечітку множину, порівняльні. Якщо ймовірнісна міра є шкалою для виміру невизначеності типу випадковості, нечіткі ж міри є суб'єктивними шкалами для нечіткості. Отже, в теорії ймовірності розглядають статистичну невизначеність, наприклад, ймовірність потрапляння в ціль дорівнює 0,9. Теорія ж нечітких множин дозволяє працювати з лінгвістичною невизначеністю, наприклад, влучний стрілець. До того ж принципова відмінність теорії ймовірності від теорії можливості полягає і в тому, що в цих теоріях по-різному виконується аксіома порівняння:

$p(A) + p(\overline{A}) = 1 -$ для теорії ймовірності;

$\mu(A) + \mu(\overline{A}) \neq 1 -$ для теорії можливості.

Поняття нечіткої міри та її використання для подання нечітких даних в економетрії

У геометрії існують такі поняття як довжина відрізка, площа плоскої фігури, об'єм тіла. Однак, коли мова йтиме про довільну обмежену множину G, то замість цих понять вживається узагальнений для цих слів вираз – поняття міри m множини: $m = mesG_0$. Природньо від цієї міри вимагати виконання таких умов:

міра $m(G) \geq 0$ із $m(\emptyset) = 0$ і $m(X) = 1$ (умова обмеженості);

коли множини G_1 і G_2 конгруентні (лат. *congruenta* – відповідність, узгодження), то

$m(G_1) = m(G_2)$;

якщо множина G є сумою скінченної або зчисленної множини попарно без спільних точок множин G_k, $k = \overline{1,\infty}$, то

$$m(G) = \sum_{k=1}^{\infty} m(G_i) \text{ (умова адитивності).}$$

Нечітка міра забезпечує зняття обтяжливого обмеження адитивності і тим самим розширює її можливості для моделювання в економіці реальних процесів.

Нехай $X -$ довільна множина, а B – борелева множина на X.

Означення 1. Функція $g(\bullet)$, визначена як $g: B \to [0,1]$, називається *нечіткою мірою,* якщо вона задовольняє наступним вимогам [6]:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 1)\ g(\emptyset) = 0, \\ 2)\ g(X) = 1, \end{array}\right\} (обмеженість); \\ 3)\ якщо\ A, B \in \mathrm{B}\ і\ A \subset B,\ то\ g(A) \leq g(B)\ (монотонність); \\ 4)\ якщо\ F_n \in \mathrm{B},\ де\ \{F_n\} - монотонна\ послідовність,\ то \lim\limits_{n\to\infty} g(F_n) = \\ \quad = g(\lim\limits_{n\to\infty} F_n)\ (неперервність) \end{array}\right\} \quad (1)$$

Нагадаємо, що борелеві множини на X утворюють найменшу сім'ю множини на X із наступними властивостями:

сім'я замкнена відносно доповнень;

сім'я замкнена відносно злічених об'єднань;

якщо $X = R$, сім'я містить відкритий інтервал.

Трійку (X, B, g) називають *простором з нечіткою мірою.* Для нечіткої міри в загальному випадку не повинна виконуватися умова адитивності:

$$g(A \bigcup B) \neq g(A) + g(B).$$

Таким чином, нечітка міра є однопараметричним розширенням ймовірнісної міри.

Вираз $g(A)$ подає міру, яка характеризує ступінь нечіткості A, тобто оцінку нечіткості судження «$X \in A$» або ступінь суб'єктивної сумісності X із A. Неважко встановити, що із монотонності міри g випливають співвідношення

$$\begin{array}{l} \forall A,\ B \in \mathrm{B} : g(A \bigcup B) \geq \max(g(A), g(B)); \\ \forall A,\ B \in \mathrm{B} : g(A \bigcap B) \leq \min(g(A), g(B)). \end{array} \quad (2)$$

Перша умова із (2) виконується для *мір довір'я,* а друга для *мір правдоподібності.* Граничними випадками нечітких мір є *міри можливості Poss і необхідності Ness,* для яких виконуються рівності:

$$\begin{array}{l} g(A \bigcup B) = \max(g(A), g(B)) = Poss, \\ g(A \bigcap B) = \min(g(A), g(B)) = Ness \end{array} \quad (3)$$

Для побудови нечітких мір використовують наступне λ-правило [14]. Нехай $A, B \in \mathrm{B}$, $A \bigcap B = \emptyset$. Тоді

$$g_\lambda(A \bigcup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B),\ -1 < \lambda < \infty. \quad (4)$$

У випадку $A \bigcup B = X$ називатимемо вираз (4) умовою нормування g_λ-мір Суджено. Очевидно, що $g_\lambda(X) = 1$; $g_\lambda(\emptyset) = 0$. Параметр $\lambda \in (-1, \infty)$ називають параметром нормування g_λ-міри.

За $\lambda > 0$

$$g_\lambda(A \bigcup B) > g_\lambda(A) + g_\lambda(B) \quad (5)$$

маємо *клас супераддитивних мір,* а за $-1 < \lambda < 0$

$$g_\lambda(A \bigcup B) < g_\lambda(A) + g_\lambda(B) \quad (6)$$

одержимо *клас субадитивних мір.*

Як показано в [4], у загальному випадку, коли A і $B-$ довільні, що перетинаються підмножини множини X, тобто $A, B \in \mathrm{B}$, $A \bigcap B \neq 0,$ вираз (4) має вигляд

$$g_\lambda(A \bigcup B) = \frac{g_\lambda(A) + g_\lambda(B) - g_\lambda(A \bigcap B) + \lambda g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B)}{1 + \lambda g_\lambda(A \bigcap B)}. \tag{7}$$

Якщо $X = \mathrm{B}$, то g_λ-міру можна одержати при допомозі неперервної функції h, яка має наступні властивості:

1) *якщо* $x \leq y$, *то* $h(x) \leq h(y)$ *із* $x, y \in \mathrm{B}$;

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0; \ \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1.$

Функція h аналогічна функції розподілу ймовірності. Її називають *нечіткою функцією розподілу* (див. рис. 1).

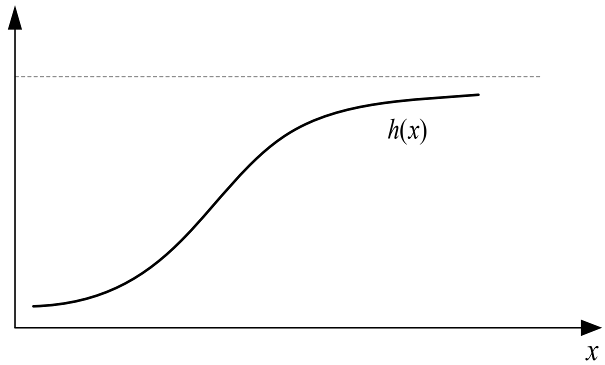

Рис. 1. Функція розподілу нечіткості

Таким чином, нечітку міру g_λ на (B, B) можна побудувати у вигляді

$$g_\lambda([a,b]) = \frac{h(b) - h(a)}{1 + \lambda h(a)} \quad \forall [a,b] \subset \mathrm{B}. \tag{8}$$

Міра, що в (8), задовольняє λ-правилу. Зокрема,

$$g_\lambda((-\infty, x]) = h(x) \quad \forall \lambda \in (-1, +\infty). \tag{9}$$

Розглянемо тепер випадок, коли X є скінченною множиною $K = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$. Тоді нечітка міра g_λ алгебри всіх підмножин $(K, 2^K)$ будується наступним чином.

Нехай $0 \leq g^i \leq 1, \ 1 \leq i \leq n,$ де $g^i \equiv g(\{s_i\})$. За умови, що величини $g^i (i = \overline{1, n})$ задані, при довільному $S \subset K$ можна одержати міру $g_\lambda(S)$

$$g_\lambda(S) = \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{s_i \in S}(1 + \lambda g^i) - 1\right), \tag{10}$$

яка задовольняє λ-правилу (4). Тому величини g^i називаються нечіткою густиною λ-нечіткої за Суджено міри g_λ.

Вираз (10) також задовольняє λ-правилу і з

$$\frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda g^i) - 1\right) = 1, \quad \lambda \in (-1, \infty) \tag{11}$$

випливає, що

$$\begin{aligned} &g_\lambda(\{s_i\}) = g^i, \\ &g_\lambda(\{s_i, s_j\}) = g^i + g^j + \lambda g^i g^j, \ i \neq j \end{aligned} \tag{12}$$

Приклади нечітких мір

Почнемо з примітивного класу мір, а саме *мір Дірака.* Вони визначаються співвідношенням

1

$$\forall A \in \mathrm{B}\ ,\ \mu_D(A) = \begin{cases} 1, & \textit{коли} \quad x_0 \in A, \\ 0 & \textit{в протилежному випадку}, \end{cases} \tag{13}$$

де x_0 – заданий елемент в X.

Міри Дірака – частковий випадок ймовірнісної міри, що відповідає детермінованій ситуації. Це міра *повної впевненості.*

Супераддитивні міри. Це, як було вказано в першій умові (2), встановлюється, по-перше, *функцією довір'я.* Означення функції довір'я (*belief function)* запропоновано в [13], де припускається, що ступінь довіри висловленню $A = \emptyset,$ яке є істинним, не обов'язково дорівнює 1. Це означає, що сума ступенів довіри висловленню A і його запереченню $\overline{A}$ також не обов'язково дорівнює 1, а може бути або рівною, або меншою за 1. Іншими словами, коли висловлення $A \neq \emptyset$ є істинним з певним ступенем $s \in [0,1]$, то міра невизначеності встановлюється згідно функції

$$\forall B \in \mathrm{B}\ : b(B) = \begin{cases} 1, & \textit{якщо}\ \ B = X, \\ s, & \textit{якщо}\ \ B \supset A,\ B \neq X, \\ 0, & \textit{якщо}\ \ B \not\subset A \end{cases} \tag{14}$$

яку називають *простою функцією носія, зосередженою на А.*

Якщо $s = 1,$ то одержимо міру, яку називають *мірою визначеності,* яка зосереджена на $A.$ Якщо $|A| = 1,$ одержимо міру Дірака, що зосереджена на $A.$ Якщо $s = 0$ або $A = X,$ тоді $b(B)$ називають пустою функцією довір'я (повне незнання).

Через ці узагальнення в [9] була введена міра довір'я:

$$b(\emptyset) = 0; b(X) = 1; \forall A \in \mathrm{B}\ : 0 \le b(A) \le 1;$$

$$\forall A_1,...,A_n \in \mathrm{B}\ : b(A_1 \bigcup ... \bigcup A_n) \ge \sum_{i=1}^{n} b(A_i) - \sum_{i<j} b(A_i \bigcap A_j) + ... + (-1)^{n+1} b(A_1 \bigcap A_2 \bigcap ... \bigcap A_n).$$

У випадку, коли $|\mathrm{B}| = 2,$ одержимо

$$\forall A,\ B \in \mathrm{B}\ : b(A \bigcup B) \ge b(A) + b(B) - b(A \bigcap B)$$

і

$$\forall A \in \mathrm{B}\ : b(A) + b(\overline{A}) \in [0,1].$$

Можливі також інші означення цієї міри [11].

Нехай m -міра, що задовольняє наступним властивостям:

$$1)\ m(\theta) = 0;$$

$$2)\ \sum_{A \in \mathrm{B}} m(A) = 1 \quad (\textit{повна довіра}). \tag{15}$$

Тоді

$$\forall A \in \mathrm{B}\ : b(A) = \sum_{B \subset A} m(A) \tag{16}$$

є функція довір'я. Тому функції довір'я називають також нижніми ймовірностями. Із (16) випливає:

$$\forall A \in \mathrm{B}\ : b(A) + b(\overline{A}) = 1 - \sum_{\substack{B \not\subset A \\ B \not\subset \overline{A}}} m(B)\ \in [0,1]. \tag{17}$$

Довільна g_λ -нечітка міра (крім міри Дірака) є функція довір'я тоді і тільки тоді, коли $\lambda \ge 0$ [9]. Звідси випливає, що міра ймовірності є частковим випадком функції довір'я (див. рис. 2).

Узгоджена функція довір'я. Поняття узгодженої функції довір'я (*consonant belief function*) будується на визначенні ядра $C = \{B \in X \mid m(B) > 0\},$ повністю впорядкованого згідно вкладеності. Можна встановити, що будь-яка проста функція носія є узгодженою функцією довір'я. Якщо вислів $A \neq X$ є істинним з певним ступенем $s \in [0,1],$ то його міра невизначеності виражається через функцію

$$\forall B \subset \mathrm{B}\ : b(B) = \begin{cases} s, & \textit{якщо}\ \ B = A, \\ 1 - s, & \textit{якщо}\ \ B = X, \\ 0, & \textit{якщо}\ \ B \neq A, B \neq X. \end{cases} \tag{18}$$

В (13) узгоджена функція довір'я визначається через наступні аксіоми:

1) $b(\emptyset)=0;\ b(X)=1,$

2) $b(A\bigcap B)=\min(b(A),b(B))\forall A\in \mathrm{B}.$

При цьому

$$\min(b(A),b(\overline{A}))=0\ \forall b\exists A,B:b(A\bigcup B)>\max(b(A),b(B)).$$

Зауважимо, що міри довір'я позначають через *Bel.*

Субадитивні міри. До цього класу мір належать *міри правдоподібності.* Ця міра множини A із X визначена в [9, 13] як

$$Pl(A)=1-b(\overline{A}), \tag{19}$$

де $b-$ функція довір'я.

Міри правдоподібності називаються також верхніми ймовірностями [10].

Нехай μ і ν - дві міри такі, що $\forall A\in \mathrm{B}:\mu(A)+\nu(\overline{A})=1.$ У цьому випадку μ є функцією довір'я тоді і тільки тоді, коли $\nu-$ міра правдоподібності.

Міра можливості. Мірою можливості [15] називають функцію $Poss\mathrm{B}\to[0,1],$ яка задовольняє наступним аксіомам:

1) $Poss(\emptyset)=0;\ Poss(X)=1,$

$$2)\ \forall i\in N,\ A_i<X,\ Poss\left(\bigcup_{i\in N}(A_i)\right)=\sup_{i\in N}Poss(A_i). \tag{20}$$

Тут $N-$ множина натуральних чисел.

Міра можливості може бути побудована через функцію належності (можливості) $\mu(x):[0,1],$ так, щоб $\sup\limits_{x\in X}\mu(x)=1$ (умова нормування).

Міра ймовірності. Ймовірнісна міра ($\lambda=0$) є частковим випадком функції довір'я або міри правдоподібності (див. рис.2). Нечітка міра $g=P$ є ймовірнісною мірою тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

1) $\forall A\in \mathrm{B}:P(A)\in[0,1];\ P(\emptyset)=0;\ P(X)=1,$

2) *якщо* $\forall i\in N:A_i\in \mathrm{B}$ *і* $\forall i\neq j:A_i\bigcap A_j=\emptyset,$ *то* $P\left(\bigcup_{i\in N}A_i\right)=\sum_{i\in N}P(A_i).$

Очевидно, що нечітка міра є нечіткою мірою ймовірності P тоді і тільки тоді, коли вона є мірою довір'я і мірою правдоподібності, тобто, коли виконується умова

$$Pl=Bel=P.$$

Для нечітких мір існує взаємозв'язок:

$$Poss\geq Pl\geq p\geq Bel\geq Ness \tag{21}$$

Міра можливості $Poss$ відповідає стратегії оптиміста, а міра необхідності $Ness$ відповідає стратегії песиміста.

Нечіткі міри різних модальностей є двоїстими одна до одної. Зокрема, *<Poss і Ness >, <Pl і Bel>* є двоїстими нечіткими мірами.

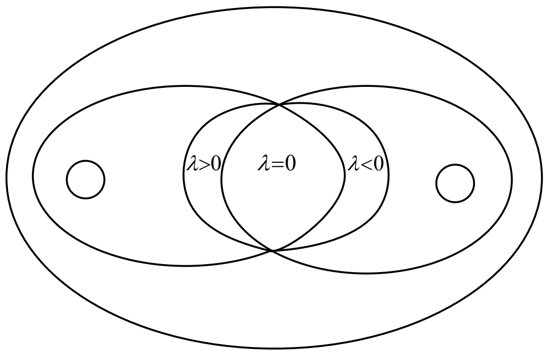

Рис. 2. Співвідношення між нечіткими мірами:1-нечіткі міри (без міри Дірака);2- g_λ **-міри,** $-1<\lambda<\infty;$ **3 - функції довір'я; 4 - міри правдоподібності; 5=**$3\cap 4-$ **ймовірнісна міра (** $\lambda=0$ **); 6 - узгоджені функції довір'я (міра необхідності);7-міра можливості.**

Розв'язання практичних задач моделювання нечітких систем економіки із використанням апарату теорії нечітких мір вимагає працювати з великими об'ємами нечітких даних. Тому для спрощення обчислювальних алгоритмів на ЕОМ вигідно апроксимувати нечіткі міри. Для цієї мети можна використовувати референт-функції L і R [6, 11]. Референт-функцією L називають числову функцію, якщо для неї виконуються умови:

$i)\ \forall x \in R^{+} \equiv [0,\infty)\ L(0)=1;$

$ii)\ L(-x)L(x);$

$iii)\ L(\cdot)$ *монотонно спадає на* R^{+}.

Приклади референт-функцій:

$a)\ L(x)=\max(0,1-|x|^{p}),\ p\ge 1;$

$б)\ L(x)=\exp(-|x|^{p}),\ \ p\ge 1;$

$в)\ L(x)=\dfrac{1}{1+|x|^{p}},\ \ p\ge 1.$

Нечіткий інтеграл як очікуване значення суб'єкта

З'ясуємо перш за все основні поняття теорії нечітких інтегралів, розроблених Суджено [14].

Означення 2. Нечіткий інтеграл від функції $h: X \to [0,1]$ на множині $A \subseteq X$ за нечіткою мірою g визначається наступним чином:

$$S = \int_A h(x)\circ g(\bullet) = \sup_{\alpha\in[0,1]} (\alpha \wedge g(A \cap F_{\alpha})), \tag{22}$$

де $H_{\alpha} = \{x \mid h(x) \ge \alpha\}$ [14].

Нечіткий інтеграл також називають *нечітким очікуваним значенням* або *FEV (fuzzy expected value).*

Нехай тепер $\Phi(X)-$ множина нечітких підмножин базової множини X. Оскільки поняття нечіткої підмножини включає в собі поняття звичайної підмножини, то $\Phi(X)$ є нечітким розширенням $\mathrm{B} : \Phi(X) \supset \mathrm{B}$.

Означення 3. Функція множини $\tilde{g}$, визначена як

$$\tilde{g}(A) = \int \mu_A \circ g \tag{23}$$

де $A = \{x, \mu_A(x)\},\ \mu_A \in \Phi(X)$, називається розширенням g на $\Phi(X)$.

Означення 4. Нечіткий інтеграл від функції $h: X \to [0,1]$ на нечіткій множині $\mu_A \in \Phi(X)$ за нечіткою мірою g визначається так:

$$\int_{\mu_A} h(x)\circ g = \int_X \mu_A(x) \wedge h(x)\circ g. \tag{24}$$

Відзначимо основні властивості нечітких інтегралів (*HI*) [4]. Нехай $a \in [0,1],\ (G_1, G_2, G) \subseteq X$. Тоді, якщо $h: X \to [0,1]$, то:

$$\int_G (a \vee h)\circ g = a \vee \int_G h\circ g;$$

$$\int_G (a \wedge h)\circ g = a \wedge \int_G h\circ g;$$

$$\int_G (h_1 \wedge h_2)\circ g \le \int_G h_1\circ g \wedge \int_G h_2\circ g;$$

$$\int_G (h_1 \vee h_2)\circ g \ge \int_G h_1\circ g \vee \int_G h_2\circ g;$$

$$\int_{G_1\cup G_2} h\circ g \ge \int_{G_1} h\circ g \vee \int_{G_2} h\circ g;$$

$$\int_{G_1\cap G_2} h\circ g \le \int_{G_1} h\circ g \wedge \int_{G_2} h\circ g.$$

На рис. 3 зображена графічна інтерпретація *HI(22),* де $f(x)-$ нечітка густина. В [7] показана спорідненість *HI* із інтегралом Лебега [8].

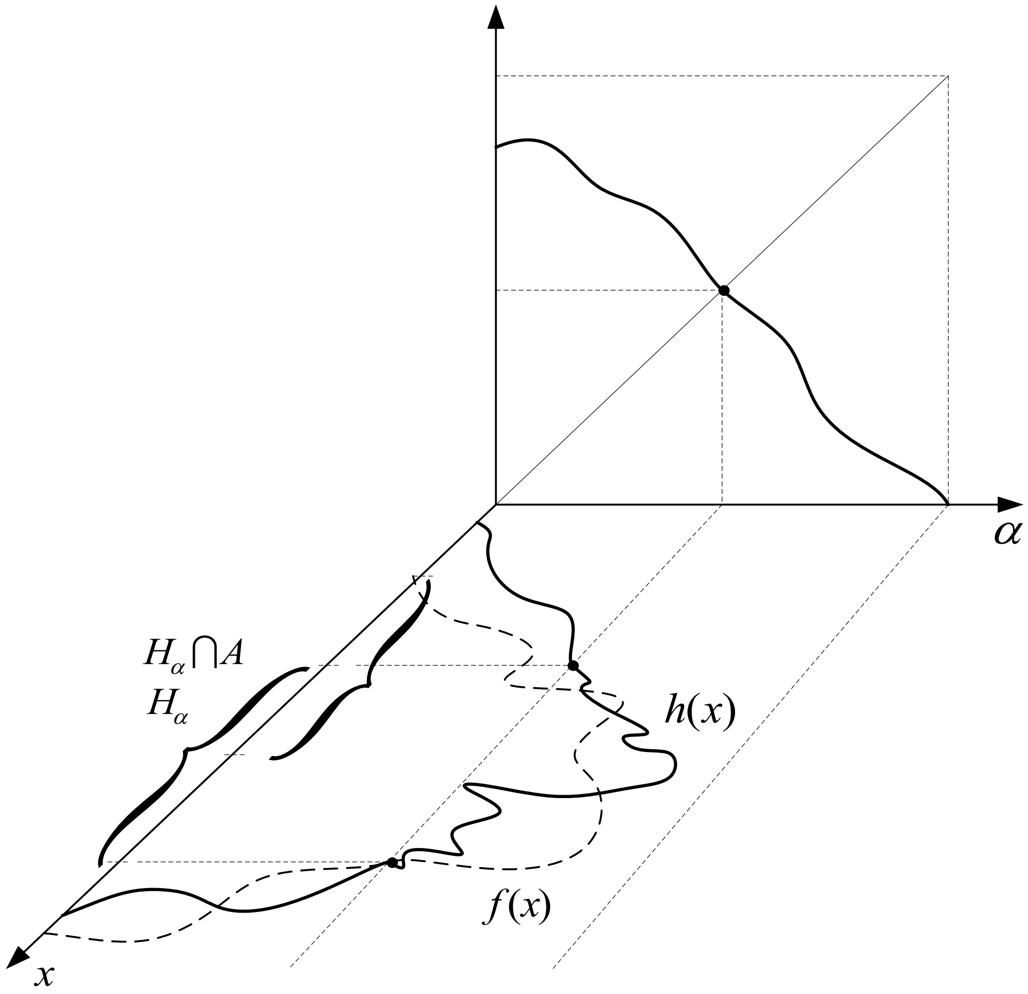

Рис. 3. Графічна інтерпретація нечіткого інтеграла

Нехай тепер $X = R,$ де $R -$ дійсна пряма, а $H -$ функція, що володіє властивостями функції розподілу ймовірностей:

$$\begin{aligned} &1)\ \textit{якщо}\ x < y, \textit{то}\ H(x) \le H(y); \quad 2)\ \lim_{x\to a} H(x) = H(a); \\ &3)\ \lim_{x\to+\infty} H(x) = 0; \qquad\qquad 4)\ \lim_{x\to+\infty} H(x) = 1. \end{aligned} \tag{25}$$

Використовуючи таку функцію, для всіх $(a,b) \subset R$ можна побудувати $g_\lambda\{(a,b)\}$ наступним чином:

$$g_\lambda((a,b)) = (H(b) - H(a))/(1 + \lambda H(a)). \tag{26}$$

Співвідношення (26) безпосередньо випливає із λ-правила

$$g_\lambda(G_1 \bigcup G_2) = g_\lambda(G_1) + g_\lambda(G_2) + \lambda g_\lambda(G_1) g_\lambda(G_2),\ -1 < \lambda < \infty, \tag{27}$$

де G_1 і $G_2 -$ довільна пара підмножин множини X, які не перетинаються.

Суджено назвав таку функцію функцією F-розподілу та використав її для підрахунку *HI*.

Функція густини ймовірностей є відображенням R в R^+ таким чином, щоб

$$\int p(x)dx = 1.$$

Для

$$P : \mathrm{B} \to (0,1), \quad P(A) = \int_A p dx$$

є ймовірністю того, що $W \in A,$ де $W -$ випадкова змінна із значенням в $R.$

Аналогічним чином можна розглянути деякий тип функції належності для простору λ-нечіткої міри $(R, \mathrm{B}, g_\lambda).$

Нехай тепер r-відображення R в R^+ і

$$\int_R r(x)dx = N_\lambda,$$

де

$$N_\lambda \equiv (\log(1+\lambda))/\lambda, \quad -1 < \lambda < \infty. \tag{28}$$

Тоді λ-нечітку міру $g_\lambda : \mathrm{B} \to (0,1)$ задають через співвідношення

$$g_\lambda(A) = \left(e^{\lambda \int_A r(x)dx} - 1 \right) \Big/ \lambda. \tag{29}$$

В (28) використовується інтеграл Лебега, тобто λ-нечітка міра може бути введена як сума безмежного числа інтегралів Лебега функції F-густини r із $A \subset R$.

Виразу (29) можна надати еквівалентного вигляду:

$$g_\lambda = \left((1+\lambda)^\rho - 1\right)/\lambda, \tag{30}$$

або

$$g_\lambda = \int_0^{\rho N} \lambda e^{\lambda t} dt, \tag{31}$$

де $\rho = \int_A r dx \Big/ \int_B r dx.$

Легко переконатися в тому, що всі функції $g_\lambda(A)$ із (29) – (31) задовольняють λ-правилу (27); g_λ має густину r λ-відповідну мірі Лебега.

Зауваження. При бажанні зберегти зв'язок між функцією F-густини і функцією F-розподілу

$$H_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{x} r(x)dx \tag{32}$$

у (25) властивість 4) потрібно замінити на

$$4') \ \lim_{x\to\infty} H_\lambda(x) = \log(1+\lambda)/\lambda. \tag{33}$$

Надалі функцію F-розподілу позначатимемо через $H_\lambda(x)$ і вважатимемо, що вона володіє властивостями 1) – 3) із (25) і (33) та задовольняє (32).

Таким чином, λ-нечітка міра для всіх $(a,b) \subset R$ задається формулою

$$g_\lambda((a,b)) = 1/\lambda \left\{ e^{\lambda(H(b)-H(a))} - 1 \right\}. \tag{34}$$

Можна переконатися в тому [5], що правило побудов (29) – (31) включає в собі як частковий випадок правило побудови (10) для скінченної множини.

Обчислення нечітких інтегралів

Нехай задана функція F-густини r. Тоді, як показано в [5], значення нечіткого інтеграла на R від функції h відносно λ-густини g_λ дорівнює значенню α, для якого

$$\rho(H_\alpha) = \frac{\log(1+\lambda\alpha)}{lig(1+\lambda)}, \quad -1 < \lambda < \infty, \tag{35}$$

де

$$\rho(H_\alpha) \equiv \frac{\int_{H_\alpha} h(x)dx}{\int_R h(x)dx}, \quad H_\alpha = \{x \mid H(x) \geq \alpha\}. \tag{36}$$

Дійсно, із означення *HI* маємо, що

$$\alpha = g_\lambda(H_\alpha). \tag{37}$$

Згідно (30) одержимо, що

$$g_\lambda(H_\alpha) = 1/\lambda \left((1+\lambda)^{\rho(H_\alpha)} - 1\right), \tag{38}$$

де $\rho(H_\alpha)$ визначається згідно (36). Співвідношення (35) випливає із (37) і (38).

Вдивляючись у формулу (35) зауважимо, що її права частина залежить тільки від значень λ і α, а ліва – це відношення області, визначеної через H_α, до всієї області функції F -густини. Таким чином, праву частину виразу (35) можна зобразити у числовому вигляді заздалегідь через таблицю або графік. Можна також показати, що $\rho(H_\alpha)$ володіє такою властивістю. Нехай функція F -густини виражає розподіл ступенів важливості. Нехай особа, що приймає рішення (ОПР) описала свої суб'єктивні ступені важливості через функцію $\varphi: R \to R^+$, в деякому ступені подібну на функцію густини ймовірності, але яка не повинна задовольняти умові нормування (28).

Друга перевага функції F -густини поєднана із встановленням зв'язку між суб'єктивною оцінкою нечітких об'єктів та вибором значення λ.

Розглянемо, наприклад, подання необізнаності. Нехай для простоти $X -$ це інтервал $[0,2]$. Якщо візьмемо ймовірнісну точку зору, то функція густини для подання ситуації необізнаності (непоінформованості) має рівномірний розподіл, тобто

$$p(x) = 0{,}5 \ \ \forall x \in [0,2].$$

Якщо для функції F -густини також прийняти рівномірний розподіл, то згідно (28) маємо

$$r(x) = \frac{\log(1+\lambda)}{2\lambda} \ \ \forall x \in [0,2],$$

а це означає, що значення функції F -густини $r(x)$ залежить від параметра λ тоді, коли густина не залежить від основної змінної.

Аналогічно до того, як міру ймовірності твердження « $A \in [0,1]$ » одержуємо із співвідношення

$$P(A \in [0,1]) = \int_0^1 p(x)dx \ \ (= 0{,}5),$$

нечітку міру $g_\lambda([0,1])$ задаємо через (29) так:

$$g_\lambda([0,1]) = \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda \int_0^1 \frac{\log(1+\lambda)}{2\lambda}dx} - 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}+1}, \ \ -1 < \lambda < \infty.$$

Аналогічна ситуація має місце і для твердження « $A \in [1,2]$ ». Отже, маємо таблицю 1 розподілу нечітких мір для випадку відсутності даних.

Таблиця 1.

Залежність $g_\lambda(A)$ від значень λ

λ	A	
	[0,1]	[1,2]
-1	1	1
-0,89	0,75	0,75
0	0,5	0,5
8	0,25	0,25
∞	0	0

Таким чином, в ситуації непоінфомованості можна сказати наступне:

– можливість того, що « $A \in [0,1]$ », довіює 1;

– ймовірність того, що A належить $[0,1]$, дорівнює 0,5;

– необхідність того, що A належить $[0,1]$, дорівнює 0 тощо.

Ці результати інтуїтивно цілком зрозумілі.

У своїй роботі [12] Кандель висловив припущення, що навіть в тому випадку, коли використовувана нечітка міра співпадає з мірою ймовірності, поняття нечіткої очікуваної величини може виявитись вигіднішим «усередненої оцінки» класичних методів. За таких досліджень функції F -густини є корисними при використанні нечітких інтегралів у створенні теорії «нечіткої статистики».

Практичні задачі

Перш за все навчимося обчислювати *НІ* для простих випадків.

Нечіткі інтеграли Суджено для зліченних множин

Нехай задана скінченна множина

$$X = \{x_i\}, \ \ i = \overline{1,n}.$$

Нехай, крім того, кожному елементу $x_i \in X$ відповідає значення g_i нечіткої густини λ нечіткої міри g_λ згідно Суджено (див. табл. 2). До того ж в табл.2 введені дискретні значення функції $h(x)$.

Таблиця 2

1	1	2	…….	n
g_i	g_1	g_2	…….	g_n
h_i	h_1	h_2	……..	h_n

Значення λ знаходимо із умови нормування за формулою

$$\lambda = \prod_{i=1}^{n} (\lambda g_i + 1) - 1 \tag{39}$$

Рівняння (39) – це алгебраїчне рівняння n -ої степені. З умови, що $\lambda \in (-1, \infty)$ знаходимо його розв'язок.

Далі знаходимо чітку множину індексів і $\Theta_\alpha = \{i \mid h(x_i) \geq \alpha\}$. Тоді значення *НІ* $S = \sup\limits_{\alpha \in [o,1]} (\alpha \wedge g_\alpha)$, де

$$g_\lambda = \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=\Theta_\alpha} (\lambda g_i + 1) - 1 \right). \tag{40}$$

Зокрема, якщо в табл. 2 $n = 5$ і

i	1	2	3	4	5
g_i	0,170	0,257	0,216	0,212	0,061
h_i	0,5	0,7	0,1	0,2	0,3

то із формули (39) одержимо $\lambda = 0{,}25.$ Опісля, обчисливши для

$$\Theta_{0,5} = \{1,2\} \quad g_{0,5} = 4((0{,}25 \cdot 0{,}17 + 1)(0{,}25 \cdot 0{,}257 + 1) - 1) \approx 0{,}4379,$$

Переконуємось в тому, що *НІ* $S = \sup\limits_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \wedge g_\alpha)$ має значення

$$S = 0{,}5 \wedge 0{,}4379 = 0{,}4379,$$

оскільки всі інші вирази $\alpha \wedge g_\alpha$ є меншими за цю величину.

Приклад 1. Після настроювання двох нечітких моделей, що полягала у вирішенні задачі інвестиційного проекту, були отримані функції належності, що відповідають трьом лінгвістичним термам якості проекту (див. табл. 3). Визначити доцільність вибору проекту за g_α -мірою.

Таблиця 3

Лінгвістичний терм	$(H) = 1$	$(C) = 2$	$(B) = 3$
Функція належності для проекту А	0,435	0,521	0,688
Функція належності для проекту В	0,305	0,600	0,621
Нечіткі густини g_i	0,257	0,216	0,212

Розв'язання. Використавши (39), одержимо $\lambda = 0{,}25.$ Тоді для проекту *А* маємо

$$S(A) = \max\{0{,}688 \wedge 0{,}212; 0{,}521 \wedge 0{,}531; 0{,}435 \wedge 1{,}095\} = \max\{0{,}212; 0{,}521; 0{,}435\} = 0{,}521.$$

Аналогічно, $S(B) = 0{,}531.$ За даною мірою доцільнішим є проект *В*.

Нечіткий інтеграл Суджено для нечіткого числа із трикутною функцією належності

Нехай нечітке число $\widetilde{x}$ має вигляд (див. рис. 4)

$$\widetilde{x} = (\widetilde{x}; \gamma; \beta); \quad \gamma = \hat{x} - \underline{x}; \quad \beta = \overline{x} - \hat{x}. \tag{41}$$

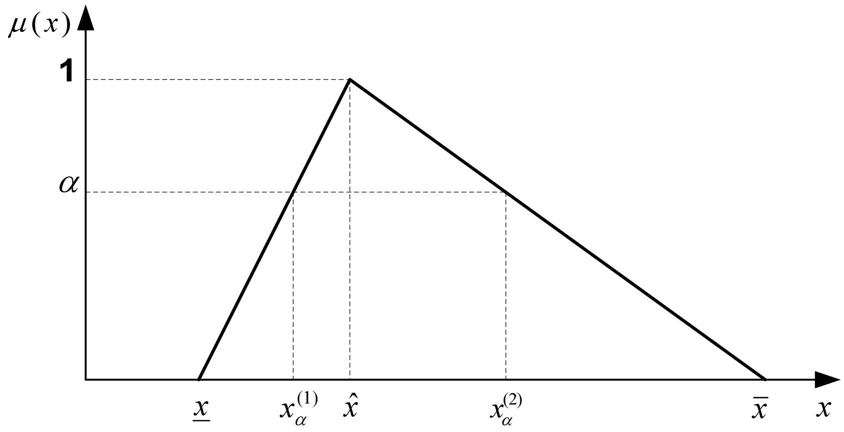

Рис. 4. Трикутна функція належності

Із рисунку випливає, що

$$x_\alpha^{(1)} = \underline{x} + \alpha(\hat{x} - \underline{x}) = \hat{x} - \frac{\gamma}{1+\gamma+\beta};\; x_\alpha^{(2)} = \hat{x} + (1-\alpha)(\overline{x} - \hat{x}) = \hat{x} + \frac{\beta}{1+\gamma+\beta}, \tag{42}$$

а отже

$$x_\alpha^{(2)} - x_\alpha^{(1)} = \overline{x} - \underline{x} - \alpha(\overline{x} - \underline{x}) = (1-\alpha)(\gamma+\beta). \tag{43}$$

Таким чином, із співвідношення

$$\alpha = g(M_\alpha) \tag{44}$$

Маємо *HI* за мірою (4.3), а саме

$$S \equiv \alpha = \frac{\overline{x} - \underline{x}}{1 + \overline{x} - \underline{x}} = \frac{\gamma+\beta}{1+\gamma+\beta}. \tag{45}$$

Приклад 2 (екстраполяція на основі індексу сезонності). У процесі господарської діяльності окремі галузі промисловості, торгівля, побут зіштовхуються з циклічними коливаннями, які викликані сезонним характером виробництва та споживання товарів і послуг.

Зараз для вивчення сезонних коливань за умов нечіткого сприйняття нечіткостей використаємо спеціальний показник, який назвемо *нечітким індексом сезонності.* Цей індекс визначимо за формулою

$$\widetilde{J}_c = \frac{\dfrac{1}{k}\oint \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij}(x) \circ g}{\dfrac{1}{kn}\oint\oint \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_{ij}(x) \circ g \right) \circ g}, \tag{46}$$

де $\mu_{ij}(x) -$ міра належності нечіткого числа, що характеризує обсяг виробництва.

Зауважимо, що у формулі (46) фігурує не параметр α, а інтервал M_α, що у співвідношенні (44).

Конкретизуємо задачу. За даними, які характеризують обсяг реалізації продукції хлібобулочними заводами об'єднання (табл. 4), розрахувати нечіткі індекси сезонності, побудувати сезонну хвилю і провести прогноз обсягу реалізації продукції на окремі місяці наступного року.

Таблиця 4

Обсяг реалізації хлібобулочних виробів (тис. т.)

Рік / Місяць	1-й рік	2-й рік	3-й рік	4-й рік	$\frac{1}{4}\sum_i$	Нечітке сподіване значення за i	Індекс сезонності (в %)	Прогноз (в межах) обсягу реалізації продукції на наступний рік
1	2	3	4	5	6	7	8	9
01	(5,3;0,3;0,5)	(5,4;0,1;0,6)	(5,5;0,2;0,6)	(6,4;0,3;0,5)	(5,65;0,23;0,55)	(5,52;5,99)	(74,6;4,00;5,92)	(5,8;6,5)
02	(5,4;0,1;0,4)	(15,6;0;0,3)	(5,7;0,2;0,5)	(6,7;0,1;0,4)	(5,85;0,1;0,4)	(5,84;5,88)	(77,2;2,55;1,94)	(6; 7)
03	(6,2;0;0,3)	(6,0;0,2;0,4)	(5,9;0,3;0,5)	(6,9;0,2;0,4)	(6,25;0,18;0,4)	(6,14;6,50)	(8,25;3,99;4,85)	(6; 7)
04	(6,4;0,1;0,2)	(6,6;0,1;0,2)	(6,7;0,1;0,3)	(7,3;0,2;0,1)	(6,75;0,13;0,2)	(6,65;6,90)	(89,1;4,07;3,63)	(7; 8)
05	(7,0;0;0,2)	(7,2;0,1;0,3)	(7,5;0,2;0,3)	(7,7;0;0,4)	(7,35;0,08;0,3)	(7,29;7,57)	(97,0;3,81;4,72)	(7,6; 8)
06	(7,5;0,2;0,3)	(7,7;0,1;0,4)	(8,0;0,2;0,3)	(8,2;0,1;0,5)	(7,85;0,15;0,38)	(7,75;8,10)	(103,6;4,53;5,24)	(8,2; 9)
07	(8,0;0,3;0,5)	(8,1;0,2;0,6)	(8,5;0,3;0,7)	(8,7;0;0,6)	(8,33;0,2;0,6)	(8,22;8,66)	(110,0;4,85;6,43)	(8,7; 9,5)
08	(8,5;0;0,4)	(8,6;0;0,3)	(8,8;0,2;0,5)	(9,1;0,3;0,6)	(8,75;0,13;0,45)	(8,67;9,03)	(115,5;4,64;5,86)	(9,1; 10)
09	(8,9;0,1;0,3)	(9,0;0;0,2)	(9,2;0,3;0,3)	(9,5;0,4;0,5)	(9,15;0,2;0,33)	(9,02;9,37)	(180,8;5,41;5,55)	(9,6; 10)
10	(8,3;0,3;0,3)	(8,5;0;0,3)	(9,0;0,5;0,5)	(9,1;0;0,6)	(8,73;0,2;0,43)	(8,61;8,99)	(115,1;5,11;5,59)	(9,1; 10)
11	(8,0;0;0,1)	(8,3;0,1;0,1)	(8,6;0,2;0,3)	(8,4;0;0,5)	(8,33;0,08;0,25)	(8,27;8,52)	(110,0;4,18;4,55)	(8,7; 9)
12	(7,5;0,2;0,1)	(7,9;0;0)	(8,3;0,3;0,4)	(8,0;0;0,5)	(7,93;0,13;0,25)	(7,84;8,11)	(104,7;4,4;4,32)	(8,2; 9)
$\frac{1}{12}\sum_j$	(7,25; 0,13; 0,3)	(7,41;0,07; 0,31)	(7,64; 0,25; 0,43)	(8;0,13;0,47)	(7,575;0,15;0,38)	-	(100;4,3;4,88)	(94; 103)
Нечітке сподіване значення						(7,44; 7,82)		

Розраховані для даних таблиці 4 індекси сезонності подані у графі 8, а їх ряд створює сезонну хвилю. Для обчислення цих даних використано формулу (46) і операцію ділення двох нечітких чисел.

Індекс сезонності для складання прогнозу використовується наступним чином.

Припустимо, що на наступний рік об'єднання передбачає реалізувати (98;4;5) тис. т. хлібобулочних виробів. Для того, щоб сформувати помісячний план реалізації продукції можна використати наступну залежність;

$$\tilde{Q}_i = \frac{\dfrac{\tilde{Q}\,\tilde{i}_c}{n}}{100}, \tag{47}$$

де $\tilde{Q}_i -$ очікуваний місячний об'єм реалізації продукції ($i = \overline{1,n}$);

$\tilde{Q} -$ очікуваний річний обсяг реалізації продукції;

$\tilde{J}_c -$ індекс сезонності;

$n -$ кількість періодів ($n = 12$).

Результати розрахунків наведені в графі 9 таблиці 4. Зауважимо, що ці результати є нечіткими очікуваними значеннями особи, що приймає рішення.

Процес суб'єктивного оцінювання

Розглянемо задачу суб'єктивного оцінювання деякою особою нечітко описаних об'єктів, наприклад, товару, супермаркету, дому, інноваційного проекту, виробничого комплексу тощо. Нехай об'єкт будемо характеризувати через n показників. Нехай $K = \{s_1,...,s_n\} -$ множина показників. Наприклад, при оцінці товару такими показниками можуть бути: $s_1 -$ ціна, $s_2 -$ якість, $s_3 -$ зовнішній вигляд, $s_4 -$ сезонність, $s_5 -$ рівень життєвого циклу товару, а для техніко-економічного рівня проекту такі оцінки: $s_1 -$ масштаб проекту, $s_2 -$ новизна проекту, $s_3 -$ пріоритетність напрямку, $s_4 -$ ступінь проробки, $s_5 -$ правова захищеність, $s_6 -$ екологічний рівень.

Взагалі множина K необов'язково повинна бути множиною фізичних показників, вона може бути множиною поглядів, критеріїв тощо.

Нехай $h: K \to [0,1] -$ оцінка елемента s. На практиці $h(s)$ можна визначити як об'єктивно, так і суб'єктивно. Наприклад, коли об'єкт – це дім, об'єктивно маємо оцінку $h(s_1) = h(\textit{площа}) = 800 м^2$, яку можна нормалізувати числом із інтервалу $[0,1]$. Для обличчя ми в змозі використати лише суб'єктивні оцінки, наприклад, $h(ока)=0{,}7$. Вважатимемо, що нечітка міра показників є суб'єктивною мірою. Вона виражає ступінь важливості підмножини з K. Наприклад, $g(s_1)$ виражає ступінь важливості елемента s при оцінці об'єкта; $g(s_1,s_2)-$ аналогічно означає ступінь важливості показників s_1 і s_2. Необхідно відзначити, ступінь важливості всієї множини K дорівнює одиниці.

Обчисливши *HI* від h по g одержимо:

$$S=\oint_K h(s)\circ g, \tag{48}$$

де $S-$ узагальнена оцінка об'єкта.

Співвідношення (48) – це згортка n часткових оцінок. Показник (48) використовують у випадку, коли окремі показники взаємно незалежні.

Процес суб'єктивного оцінювання об'єктів припускає ідентифікацію власне нечіткої міри. Про експериментальну побудову нечіткої міри див. [4]. Там так само через *HI* вивчаються проблема прийняття рішення та процес навчання в нечіткій ситуації, проводиться оцінка нечіткості.

---

1. Кайберг Г. Вероятность и индуктивная логика. – М.: Прогресс, 1978. – 504 с.
2. Козелецкий Ю. Психологическая теория решений. – М.: Прогресс, 1979. – 504 с.
3. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.-Л. ОНТИ, 1936. – 140 с.
4. Нечёткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / под ред. Д.А. Поспелова. – М.: Наука, 1986. – 312 с.
5. Нечёткие множества и теория возможностей. Последние достижения / Под ред. Р. Ягера. – М.: Радио и связь, 1986. – 406 с.
6. Сявавко М., Рибицька О. Математичне моделювання за умов невизначеності. – Львів: Українські технології, 2000. – 319 с.
7. Уолтен Т.С. Использование алгебраических моделей для изучения процессов принятия решений. – В кн.: Нормативные и дескриптивные модели принятия решений. М: Наука, 1981, С. 310 – 319.
8. Халмош П.Р. Теория меры. – М.: Мир, 1953. – 503 с.
9. Banon G. Distinction between several subsets of fuzzy measures. – Fuzzy Sets and Systems, 1981, V.5, p. 291 – 306.
10. Dempster A.P. Upper and lower probabilities induced by multi-valued mapping. – Ann. Math. Statist., 1967, V.38, p. 325 – 339.
11. Dubois D., Prade H. Fuzzy sets and systems. Theory and applications. – New York: Academic Press, 1980. – 393 p.
12. Kandel A. Fuzzy statistics and forecast evaluation, IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics, 1978, SMC-8, N5, p. 396 – 401.
13. Shafer G.A. A mathematical theory of evidence. – Princeton, New York: Princeton University Press, 1976.
14. Sugeno M. Fuzzy measure and fuzzy integral. – Trans. SICE, 1972, V.8, N2, p. 95 – 102.
15. Zadeh L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. – Fuzzy Sets and Systems, 1978, V.1, p. 3 -28.

APPLICATION OF FUZZY MEASURES AND INTEGRALS FOR THE DECISION OF POORLY STRUCTURED PROBLEMS IN ECONOMY

M. Syavavko

Ivan Franko National University of L'viv

Fuzzy measures provide more complete presentation of output information for the mathematical model of the real economic processes with the use of modality of informative units. Besides for treatment of fuzzy information, formalized as fuzzy measures, most acceptable is the use of fuzzy integral. Theoretical works are confirmed by practical applications to the economic tasks.

Keywords: fuzziness, measure, integral, probability, trust, possibility, plausibility, approximation, division, density, belonging, economy.