

УДК 330.322

МОДЕЛІ ПОРТФЕЛЬНОЇ ТЕОРІЇ

О. Белз

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
Проспект Свободи 18, 79008 Львів, Україна*

Описано найвідоміші моделі портфельної теорії. Досліджено можливість застосування моделей портфельної теорії у вітчизняній практиці.

Ключові слова: цінні папери, портфельна теорії, економіко-математичні моделі.

Постановка проблеми. Питання формування й оцінення портфеля фінансових інвестицій посідає одне з провідних місць у сучасній економіці. Портфель цінних паперів розглядають як упорядковану сукупність, яка відповідає прийнятному для інвестора рівню дохідності, ризику та ліквідності. Перш ніж сформувати портфель, інвестор повинен: вивчити перелік цінних паперів, що обертаються на фондовому ринку країни, оцінити їхні переваги і недоліки через критерій безпеки, прибутковості та зростання; мати первинну інформацію про емітентів і стан фондового ринку; визначитися з вибором типу портфеля і кількісним складом вхідних активів; мати загальне уявлення про можливості диверсифікованості портфеля через співвідношення попиту та пропозиції у разі зміни цін і обсягу інвестицій. Управління портфелем цінних паперів має починатися з оцінення динаміки цін скупки та продажу наявних у портфелі активів і рівня їх коливань; розрахунку рівня прибутковості цінних паперів, що становлять портфель; визначення необхідного рівня прибутковості, що дає змогу взяти до уваги рівень ризику вкладання засобів; розрахунку вартості акцій, що дає змогу з'ясувати доцільність придбання цінних паперів; визначення терміну окупності акцій.

Формування портфеля цінних паперів є непростим завданням, оскільки вимагає узгодження суперечливих критеріїв: максимізації норми прибутку та мінімізації ризику. Крім того, на ефективному ринку цінні папери з високою нормою прибутку характеризуються порівняно високим ступенем ризику, і навпаки.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У сучасній портфельній теорії [1; 2; 4] відомі моделі формування портфеля цінних паперів, які беруть до уваги певні особливості портфеля. З метою досягнення оптимальності інвестиційного портфеля із цінних паперів різних видів застосовують методи його збалансування. Одним із таких методів є диверсифікація – розподіл фінансових інструментів таким чином, щоб досягти максимального доходу з мінімальним ризиком.

В. Вітлінський та С. Наконечний [3] сформуливали загальне правило для інвестора, який має можливість розподіляти засоби між декількома активами. Необхідно прагнути розподілити вкладення між різними видами активів, зокрема такими, що виявили за минулі роки, по-перше, різну щільність зв'язку (кореляцію) із загальноринковими цінами (індексами); по-друге, протилежну фазу коливань норми прибутку між собою (цін) усередині портфеля.

Сформований відповідно до наведених чинників портфель цінних паперів повинен бути оцінений у сукупності за обраними критеріями

Дослідники портфельної теорії виокремлюють низку чинників, які потрібно брати до уваги під час формування портфеля фінансових інвестицій, проте не аналізують можливість використання моделей портфельної теорії за умов недостатньо розвинутого фондового ринку в Україні.

Формулювання цілей статті. Метою роботи є аналіз найвідоміших моделей портфельної теорії на предмет застосування їх у вітчизняній практиці.

Виклад основного матеріалу дослідження. На практиці застосовують багато методик формування оптимальної структури портфеля цінних паперів [1; 2; 4]. Більшість із них заснована на методиці Марковіца, який уперше запропонував математичну формалізацію задачі знаходження оптимальної структури портфеля цінних паперів в 1952 році, за що був удостоєний Нобелівської премії у галузі економіки.

Основні постулати, на яких побудована класична портфельна теорія:

Ринок складається з кінцевої кількості активів, прибутковості яких для заданого періоду вважають випадковими величинами.

Інвестор може, наприклад, відповідно до статистичних даних отримати оцінку очікуваних (середніх) значень дохідності і їхніх попарних коваріацій, а також ступенів можливості диверсифікації ризику.

Інвестор може формувати будь-які допустимі (для певної моделі) портфелі. Прибутковості портфелів є також випадковими величинами.

Порівняння вибраних портфелів ґрунтується тільки на двох критеріях – середній прибутковості й ризику.

Інвестор не схильний до ризику в тому розумінні, що із двох портфелів з однаковою прибутковістю він обов'язково віддасть перевагу портфелю із меншим ризиком.

Особливість головної ідеї моделі Марковіца в тому, щоб статистично розглядати майбутній дохід, який приносять фінансові інструменти як випадкову, змінну тобто доходи по окремих інвестиційних об'єктах випадково змінюються в деяких межах. Якщо якимсь чином випадково визначити по кожному інвестиційному об'єкту певну вірогідність настання, можна отримати розподіл вірогідності отримання доходу по кожній альтернативі вкладення засобів. Такий процес називають моделлю вірогідності ринку. Для спрощення моделі Марковіца вважають, що доходи розподілені нормально.

За моделлю Марковіца визначають показники, що характеризують обсяг інвестицій і ризик, що дає змогу порівнювати різні альтернативи вкладення капіталу з погляду поставлених цілей і створити масштаб для оцінення різних комбінацій.

Як масштаб сподіваного доходу із низки можливих доходів на практиці використовують найвірогідніше значення, яке в разі нормального розподілу збігається із математичним очікуванням, а саме:

$$m = M(R) = M\left(\sum_{i=1}^N x_i \cdot R_i\right) = \sum_{i=1}^N x_i \cdot M(R_i), \quad (1)$$

де m – сподівана норма прибутку портфеля цінних паперів; x_i – відносна вага i -го активу у портфелі цінних паперів; R_i – норма прибутку i -го виду цінних паперів.

Модель Г.-М. Марковіца, опублікована вперше 1952 року (H/Markowitz. Portfolio selection // J. Finance. – 1952. – № 7. – р. 77–91.) у математичному вигляді подана так:

$$\begin{cases} V \rightarrow \min, \\ m \geq R_0, \\ \sum_{i=1}^N x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \\ i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2)$$

де V – ризик портфеля цінних паперів; R_0 – заданий інвестором рівень сподіваної дохідності.

Ризик портфеля цінних паперів розраховують як дисперсію його норми прибутку:

$$\begin{aligned} V = D(R) &= D\left(\sum_{i=1}^N x_i \cdot R_i\right) = \\ &= x_1^2 D(R_1) + \dots + x_n^2 D(R_n) + 2x_1x_2 \text{cov}(R_1 R_2) + \dots + 2x_{n-1}x_n \text{cov}(R_{n-1} R_n) = \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N x_k x_j \text{cov}(R_k R_j) = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 x_i^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \sum_{j=1}^N x_k x_j \text{cov}(R_k R_j), \end{aligned} \quad (3)$$

де $\text{cov}(R_k R_j)$ – коваріація дохідностей k -го та j -го цінного паперу (саме наявність коваріації між різними цінними паперами дає змогу зменшити ризик портфеля завдяки підбору часток x_i), яку розраховують так:

$$\text{cov}(R_k R_j) = \frac{\sum_{t=1}^T (R_{kt} - R_k) \cdot (R_{jt} - R_j)}{T}; \quad (4)$$

σ_i^2 – дисперсія дохідності i -го цінного паперу, яку розраховують так:

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{t=1}^T (R_{it} - R_i)^2}{T}, \quad (5)$$

де R_{it} – норма прибутку i -го виду цінних паперів у t -й період, $t = \overline{1; T}$.

З економічного погляду задача (2) означає знаходження портфеля, який дає мінімальний ризик у випадку заданого інвестором рівня сподіваної дохідності R_0 , а саме в чисельному визначенні відносних часток акцій і облігацій в портфелі, які найбільш вигідні для власника.

У моделі Г.-М. Марковіца допустимими є тільки стандартні портфелі (без коротких позицій). Інвестор щодо кожного активу перебуває в довгій позиції.

З огляду на неприпустимість коротких позицій в моделі Марковіца на частки цінних паперів у портфелі накладається умова позитивності. З огляду на це особливістю цієї моделі є обмеженість прибутковості допустимих портфелів, оскільки прибутковість будь-якого стандартного портфеля не перевищує найбільшої прибутковості активів, з яких він побудований.

Наступним важливим кроком розвитку портфельної теорії були праці Джеймса Тобіна. Наприкінці 50-х років XX століття Дж. Тобін досліджував питання про розподіл сукупного капіталу в економіці між грошовою формою та формою цінних паперів. Такий підхід був, по суті, макроекономічним, на відміну від мікроекономічного підходу Марковіца, та стосувався глибинних питань ролі фінансових ринків в економіці. Під час розгляду сукупного капіталу, який був у формі цінних паперів, Тобін не обмежився ризикованими акціями, а ввів до аналізу державні боргові зобов'язання (облігації, казначейські векселі тощо), які вважав за безризиковий актив. У математичному виразі задачу, сформульовану Тобіном, можна записати так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m - R^0}{V} \rightarrow \max, \\ \sum_{i=1}^N x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \\ i = \overline{1, n} \end{array} \right. \quad (6)$$

де R^0 – дохідність безризикового активу.

За результатами аналізу цієї моделі було доведено, що у випадку наявності на ринку безризикових активів наявний ринковий портфель акцій, а стратегії інвесторів суттєво змінюються. Замість вибору портфеля з ефективної множини інвестори мають розподіляти капітал між ринковим портфелем та безризиковим активом. Це доведення назвали *теоремою про інвестування в два фонди*.

Після праць Дж. Тобіна увага до теорії портфеля цінних паперів суттєво зросла як у теоретиків, так і у практиків. Численні дослідження на початку 60-х виявили низку недоліків моделей Г. Марковіца та Дж. Тобіна. З теоретичного боку критика акцентувала на тому, що ці моделі відображають

лише внутрішні чинники ризику ринку акцій, математично відображені кореляційною залежністю між рівнями доходів акцій. У той же час такі зовнішні чинники ризику, як інфляція, динаміка ділових циклів, рівень процентних ставок за державними позиками безпосередньо не брали до уваги. Критика з боку практиків акцентувала увагу на складності обчислень у процесі побудови оптимальних портфелів.

Першим кроком у подоланні недоліків стала розроблена 1963 року В. Шарпом одноіндексна модель, яку сьогодні називають його ім'ям. Модель ґрунтується на припущенні, що дохідності всіх акцій залежать від одного чинника, яким є певний ринковий індекс. Шарп не розробив нового методу складання портфеля, а спростив проблему таким чином, що наближений розв'язок може бути знайдено із значно меншими зусиллями. Шарп ввів β -фактор, який відіграє особливу роль у сучасній теорії портфеля:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}, \quad (7)$$

де σ_{iM} – коваріація між темпами зростання курсу цінного папера і темпами зростання ринку; σ_M^2 – дисперсія прибутковості ринку.

Показник “бета” характеризує ступінь ризику паперу і свідчить, у скільки разів зміна ціни папера перевищує зміну ринку в цілому. Якщо бета більше від одиниці, то такий папір можна віднести до інструментів із підвищеним ступенем ризику, оскільки його ціна “рухається” в середньому швидше за ринок. Якщо бета менше від одиниці, то ступінь ризику цього папера порівняно низький, оскільки протягом періоду глибини розрахунку його ціна змінювалася повільніше, ніж ринок. Якщо бета менше від нуля, то в середньому рух цього папера був протилежний до руху ринку протягом періоду глибини розрахунку.

В індексній моделі Шарпа використовують тісну кореляцію між зміною курсів окремих акцій. Передбачається, що необхідні вхідні дані можна приблизно визначити за допомогою всього лише одного базисного чинника і відношень, що пов'язують його зі зміною курсів окремих акцій. Здебільшого за такий чинник беруть значення якого-небудь індексу.

Математичний вигляд одноіндексної моделі для акції A може бути поданий так:

$$R_A = \alpha_A + \beta_A \cdot R_I + \varepsilon_A, \quad (8)$$

де R_A – дохідність акції A ; α_A – чиста сподівана дохідність акції A ; R_I – дохідність обраного в моделі індексу I ; β_A – чутливість дохідності акції A до змін у дохідності індексу I ; ε_A – складова, яка характеризує остаточний або специфічний ризик акції A , $\varepsilon_A = 0$.

У моделі припускається незалежність специфічного ризику від змін дохідності ринку – $\text{COV}(R_I, \varepsilon_A) = 0$, та незалежність специфічних ризиків різних компаній – $\text{COV}(\varepsilon_A, \varepsilon_B) = 0$.

Зазначений підхід значно спрощував знаходження вхідних параметрів для моделі Г. Марковіца. Необхідно просто обчислити коефіцієнти лінійної регресії дохідності акцій до індексу, тоді матимемо $\text{COV}(R_A, R_B) = \beta_A \cdot \beta_B \cdot \sigma_I^2$

З теоретичного погляду модель (8) характеризує дохідність як величину, що має власну складову (параметр α_A та випадкова величина ε_A) та складову, зумовлену індексом $\beta_A R_I$. Обчислюючи α_A для моделі (8), ми отримаємо один з найвідоміших результатів В. Шарпа – розподіл ризику на систематичний та несистематичний. Справді,

$$\sigma(R_A) = \sqrt{\beta_A^2 \cdot \sigma(R_I)^2 + \sigma(\varepsilon_A)^2}. \quad (9)$$

Перший доданок під коренем – систематичний ризик, а другий – несистематичний. Підставляючи вирази типу (8) у вираз для дохідності портфеля $R = R_1 x_1 + \dots + R_n x_n$, отримаємо

$$R = x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n + (x_1 \beta_1 + \dots + x_n \beta_n) R_I + x_1 \varepsilon_1 + \dots + x_n \varepsilon_n. \quad (10)$$

Мінімізація ризику портфеля R приводить до наступної оптимізаційної задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sqrt{(x_1 \beta_1 + \dots + x_n \beta_n)^2 \sigma(R_I)^2 + x_1^2 \sigma(\varepsilon_1)^2 + \dots + x_n^2 \sigma(\varepsilon_n)^2} \rightarrow \min, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \\ i = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (11)$$

Аналіз цієї задачі дає один з визначних результатів портфельної теорії у разі збільшення акцій в портфелі, ризик портфеля зменшується, але не до 0, а до певного рівня, який відповідає систематичному ризику. Тобто портфельний ефект нівелює специфічні ризики фірм, але загальний, систематичний, ризик, яким обтяжений весь ринок, залишається.

Модифікацією моделі Шарпа є модель Квазі-Шарпа, яка ґрунтується на взаємозв'язку прибутку кожного цінного папера з деякого набору N цінних паперів з прибутковістю одиничного портфеля з цих паперів.

Головні припущення моделі Квазі-Шарпа:

- за характеристики прибутку цінного папера беруть математичне очікування прибутку;
- одиничний портфель цінних паперів – це портфель, що складається з усіх

цінних паперів, які розглядають, взятих у рівній пропорції;

– взаємозв'язок прибутку цінного папера і прибутку одиничного портфеля описують лінійною функцією

– під ризиком цінного папера слід розуміти ступінь залежності змін прибутку цінного папера від змін прибутку одиничного портфеля;

– вважають, що дані минулих періодів, використані під час розрахунку прибутку та ризику, відображають повною мірою майбутнє значення прибутку.

За моделлю Квазі-Шарпа прибутковість цінного папера пов'язують з прибутковістю одиничного портфеля функцією лінійної регресії такого вигляду:

$$R_i = \bar{R}_i + \beta_i (R^{sp} - \bar{R}^{sp}), \quad (12)$$

де: R_i – прибутковість i -го цінного паперу; R^{sp} – прибутковість одиничного портфеля; β_i – коефіцієнт регресії; \bar{R}_i – середня прибутковість i -го цінного папера за минулі періоди; \bar{R}^{sp} – середня прибутковість одиничного портфеля за минулі періоди.

Коефіцієнт β характеризує ступінь залежності прибутку цінного папера від прибутку одиничного портфеля. Чим вищий β , тим більше залежить прибутковість цінного папера від коливань прибутку одиничного портфеля, тобто від коливань прибутку решти цінних паперів, що входять в одиничний портфель. Коефіцієнт β називають β -ризиком, але його трактування відрізняється від трактування однойменного показника в моделі Шарпа.

Як і в моделі Шарпа, в моделі Квазі-Шарпа є ризик того, що поцінована прибутковість цінного папера не належатиме вибудованій лінії регресії. Цей ризик називають залишковим ризиком. Залишковий ризик характеризує ступінь розкиду значень прибутку цінного папера навколо лінії регресії. Залишковий ризик i -го цінного папера позначають $\sigma_{\epsilon i}$.

Загальний ризик вкладень у цінний папір складається з β -ризиком, тобто ризику зниження прибутку внаслідок зменшення прибутку одиничного портфеля, і залишкового ризику $\sigma_{\epsilon i}$, тобто ризику зниження прибутку внаслідок зменшення прибутку одиничного портфеля, і залишкового ризику $\sigma_{\epsilon i}$, тобто ризику зниження прибутку і невідповідності лінії регресії.

Модель Квазі-Шарпа раціонально застосовувати під час розгляду порівняно невеликої кількості цінних паперів, що належать до однієї чи кількох галузей. За її допомогою добре підтримувати оптимальну структуру наявного портфеля. Головний недолік моделі – розглядається окремий сегмент фондового ринку, на якому працює агент фондового ринку, без взяття до уваги глобальних тенденцій.

Описані моделі портфельної теорії передбачають збір статистичної інформації про ціни цінних паперів та суми виплачених дивідендів. Проте, зважаючи на слабкий розвиток фондового ринку в Україні, збір такої інформації є високовартіс-

ним, що знівелює вигоду, одержану від застосування моделей оптимізації інвестиційного портфеля. У праці [1] подано модель, адаптовану до умов сучасного стану розвитку фондового ринку в Україні. З метою поєднання теоретичних напрацювань у галузі портфельної теорії із сучасним станом розвитку фондового ринку в Україні було запропоновано підхід до формування портфеля цінних паперів, який передбачає для підготовки даних використовувати експертні оцінки. За базову модель оптимізації інвестиційного портфеля фірми взято модель Г. Марковіца.

У процесі застосування методу експертних оцінок необхідно досліджувати цінні папери за характеристиками, які наведено у таблиці.

Узагальнену експертну оцінку потрібно розраховувати як середньозважену. Для врахування міри довіри експертних оцінок використовують підхід, який передбачає розрахунок коефіцієнта визначеності висновку як добутку коефіцієнта визначеності умови та коефіцієнта визначеності правила. Коефіцієнт визначеності детермінованих правил (такі правила використовують під час побудови моделі оптимізації інвестиційного портфеля фірми) дорівнює одиниці. Коефіцієнт визначеності умови, вираженої математичною функцією, розраховують як суму добутків коефіцієнта відносної важливості аргументу функції та значення його коефіцієнта визначеності. Зазначимо також, що коефіцієнти відносної важливості аргументів математичних функцій також визначають експертним способом.

Таблиця

Критерії оцінення експертами цінних паперів

Стан економічного середовища	Ймовірність настання стану економічного середовища		Передбачувана ціна цінного папера		Передбачуваний розмір дивідендів	
	значення	міра довіри (коефіцієнт визначеності)	значення	міра довіри (коефіцієнт визначеності)	значення	міра довіри (коефіцієнт визначеності)
Значне піднесення	A_1^1	A_1^2	A_1^3	A_1^4	A_1^5	A_1^6
Незначне піднесення	A_2^1	A_2^2	A_2^3	A_2^4	A_2^5	A_2^6
Стагнація	A_3^1	A_3^2	A_3^3	A_3^4	A_3^5	A_3^6
Незначна рецесія	A_4^1	A_4^2	A_4^3	A_4^4	A_4^5	A_4^6
Значна рецесія	A_5^1	A_5^2	A_5^3	A_5^4	A_5^5	A_5^6

Примітки: A_S^1 – ймовірність настання S -го стану економічного середовища; A_S^2 – міра довіри до значення показника A_S^1 ; A_S^3 – передбачувана ціна цінного папера за умов S -го стану економічного середовища; A_S^4 – міра довіри до значення показника A_S^3 ; A_S^5 – передбачуваний розмір дивідендів за умов S -го стану економічного середовища; A_S^6 – міра довіри до значення показника A_S^5 .

На підставі опрацьованих експертних даних потрібно розрахувати норми прибутку кожного виду цінного паперу в умовах передбачуваного експертами стану економічного середовища:

$$R_{is} = \frac{C_{is} + D_{is}}{C_i^0}, \quad (13)$$

де R_{is} – норма прибутку i -го виду цінних паперів в умовах S -го стану економічного середовища; C_{is} – ціна i -го виду цінних паперів в умовах S -го стану економічного середовища; D_{is} – дивіденди, нараховані за i -м видом цінних паперів в умовах S -го стану економічного середовища; C_i^0 – ціна купівлі i -го виду цінних паперів у початковий момент (ціну купівлі одиниці цінного паперу в початковий момент рекомендують брати на підставі даних фондових бірж, на торги яких виставляють оцінювані цінні папери).

З огляду на це норму прибутку i -го виду цінних паперів розраховують так:

$$R_i = \sum_i R_{is} \cdot P_s, \quad (14)$$

де R_i – норма прибутку i -го виду цінних паперів; P_s – ймовірність настання S -го стану економічного середовища.

Сподівану норму прибутку портфеля цінних паперів обчислюють за формулою (1), ризик портфеля цінних паперів – за формулами (3)–(5). На підставі розрахованих даних потрібно побудувати оптимізаційну модель (2).

Висновки. Однією з головних умов успішного функціонування економіки країни є наявність розвинутого ринку цінних паперів. Це зумовлено, насамперед, тим, що розвинутий фондовий ринок є найефективнішим засобом переливання коштів із менш рентабельних у більш рентабельні галузі економічної діяльності, що забезпечує структурну перебудову виробництва та регулювання економіки країни загалом. Тому застосування моделей формування ефективного та збалансованого портфеля цінних паперів, які адаптовані до сучасних умов функціонування економіки України, дасть змогу приймати виважені рішення як інституційним, так і неінституційним інвесторам.

1. Белз О. Г. Математична модель оптимізації інвестиційного портфеля фірми / О. Г. Белз // Вісник Тернопільського національного економічного університету. – 2007. – Вип. 3. – С. 105-111.
2. Бондарев Б. В. Инвестиции. Математическая теория / Бондарев Б. В. – Донецк: Апекс, 2001. – 227 с.
3. Вітлінський В. В. Ризик у менеджменті / В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний. – К.: “Борисфен-М”, 1996. – 336 с.
4. Черняк О. І. Історія та перспективи розвитку сучасної портфельної теорії / О. І. Черняк, А. Б. Камінський // Міжнародний науковий журнал “економічна кібернетика”. – 2004. – № 3-4 (27-28). – С. 21–36.

MODELS OF THEORY OF INVESTMENT PORTFOLIO**O. Belz**

*Ivan Franko National University of Lviv,
Prospekt Svobody 18, UA – 79008, Lviv, Ukraine*

The article describes models of theory of investment portfolio. The author explores possibility of application of models of theory of investment portfolio at domestic economics.

Key words: securities, theory of investment portfolio, economic and mathematical methods.

МОДЕЛИ ПОРТФЕЛЬНОЙ ТЕОРИИ**А. Белз**

*Львовский национальный университет имени Ивана Франка,
Проспект Свободы 18, 79008 Львов, Украина*

Описано известные модели портфельной теории. Исследовано возможность использования моделей портфельной теории в отечественной практике

Ключевые слова: ценные бумаги, портфельная теория, экономико-математические модели.