ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія екон. 2010. Вип. 43. С.270-279 *Ser. econ . 2010. Vol. 43. P.270-279*

УДК 311:336

КОНТРОЛЬНІ КАРТИ ШЕФАРДА ДЛЯ ДОХІДНОСТІ ПОРТФЕЛЮ АКЦІЙ

Т. Заболоцький

Львівський інститут банківської справи Університету банківської справи Національного банку України
79000 м. Львів, проспект Шевченка 9
E-mail: zjabka@yahoo.com

В роботі розглянуто контрольні карти Шефарда для дохідності портфелю акцій, у випадку коли дохідності акцій не є незалежними. Застосування карти проведено на прикладі даних за 2008-2009 роки для акцій трьох компаній BMW, Metro, Siemens. Показано, що немає необхідності щодня перебудовувати портфель, що дає можливість інвестору можливість зекономити кошти та час.
<u>*Ключові слова*</u>*: векторна авто регресійна модель з біжучим середнім, дохідність акції, контрольна карта Шефарда, портфель найменшої варіації.*

1. Вступ

Важливу роль в фінансовій діяльності відіграють портфелі цінних паперів. Існують різні методи побудови портфелів, серед яких особливо виділяються методи мінімізації ризику та максимізації доходів. У випадку дохідності портфеля ситуація є більш-менш очевидною, за дохідність портфеля приймається математичне сподівання доходу. Неоднозначною є ситуація у випадку оцінювання ризику. Як ризик портфелю можна розглядати і варіацію, і відношення Шарпа, і *Value-at-Risk* (*VaR*), і умовне *Value-at-Risk* (*CVaR*), та інші міри. Саме через це і зумовлена велика кількість оптимальних портфелів.

Одним з найвідоміших портфелів є портфель мінімальної варіації, який був вперше побудований Марковіцем в 1952 році ([1]). Даний портфель характеризується найменшим рівнем ризику (в даному випадку як міру ризику вибрано варіацію портфелю) при заданому рівні дохідності. Змінюючи рівень дохідності можна побудувати множину оптимальних портфелів відому під назвою ефективної множини. Не важко показати, що вибравши за міру ризику варіацію дана множина є параболою, а у випадку стандартного відхилення, як міри ризику, є гіперболою ([2]).

Важливою мірою для побудови портфеля є відношення Шарпа ([3],[4]), яке можна охарактеризувати як відношення дохідності портфеля до його стандартного відхилення. Очевидно, що портфель з більшим відношенням Шарпа є кращим для інвестора. А, отже, в даному випадку як оптимальний розглядається портфель для якого дане відношення є найбільшим серед усіх можливих портфелів. На перший погляд не існує зв’язку між оптимальним портфелем найменшої варіації та портфелем з найбільшим відношенням Шарпа, проте не важко показати, що портфель найбільшого відношення Шарпа належить ефективній множині.

Особливої уваги заслуговує портфель найвищої очікуваної корисності ([5]). Максимізуючи в даному випадку функцію корисності інвестора, також отримуємо оптимальний портфель, який належить ефективній множині. Варто відзначити, що даний портфель залежить від схильності інвестора до ризику. У випадку коли інвестор є повністю не схильний до ризику, портфель найбільшої очікуваної квадратичної корисності співпадає з портфелем найменшої варіації. Також зауважимо, що існує такий коефіцієнт схильності інвестора до ризику при якому даний портфель співпадає з портфелем з найбільшим відношенням Шарпа. Більше того, змінюючи рівень схильності інвестора до ризику від 0 до $+\infty$ отримаємо ефективну множину, тобто портфель найбільшої корисності є узагальненням теорії оптимальних портфелів. Недоліком даного портфеля є те, що на практиці надзвичайно важко, якщо взагалі можливо, оцінити схильність інвестора до ризику, а тому даний портфель має більше теоретичне застосування.

Усі розглянуті вище портфелі залежать від параметрів дохідності акцій. Дані параметри на практиці, як правило, є невідомими, а тому мають бути певним чином оцінені. Отже, інвестор змушений оперувати не оптимальним портфелем у своїх розрахунках, а його оцінкою. Даний факт довгий час замовчувався у фінансовій літературі, хоча і є надзвичайно важливим. Так, наприклад, припускаючи, що параметри дохідностей акцій є відомими, ми отримаємо вектор ваг оптимального портфеля, який є константою, а отже, не має важливих статистичних та імовірнісних характеристик, але коли у обчисленнях ми використаємо оцінки параметрів дохідності акцій, то вектор ваг оптимального портфеля буде одночасно і вектором випадкових величин, який має важливі для статистичного та імовірнісного аналізу властивості. Насправді є більш правильно розглядати оцінки ваг портфеля як випадкові величини, ніж як константи.

Часто у фінансовій літературі робиться припущення, що дохідності акцій є незалежними. Дане припущення зазнає останнім часом великої критики, оскільки в багатьох роботах показано, що дохідності акцій є корельованими, а отже і залежними ([6], [7], [8]). Лише в декількох роботах розглянуто проблему автокорельованих дохідностей акцій ([9], [10]). Тому, враховуючи цей факт, важливим є питання про поведінку не лише портфелів, але їхніх характеристик у випадку коли дохідності акцій є залежними.

Як було зазначено раніше, параметри розподілу дохідностей акцій є невідомими на практиці, а отже мають бути оцінені. На жаль, оцінки параметрів є залежними від вибраних даних, тому при зміні даних, змінюються відповідно і оцінки, а значить, ваги портфелів та їхні характеристики. Проте, інвестору не вигідно, враховуючи оподаткування операцій з цінними паперами, а також додаткові затрати, змінювати портфель при будь-якій зміні отриманих оцінок. Зміна ваг портфеля є доцільною для інвестора лише у випадку, коли зміни оцінок є істотними. Саме для перевірки істотності змін оцінок служать контрольні карти. Існує декілька видів контрольних карт, та найпростішими серед них є контрольні карти Шефарда ([11]). Дані карти стали родоначальниками статистичного контролю процесів, який часто вживається в медицині та інженерних науках. Останнім часом контрольні карти стали надзвичайно популярними також і у фінансових науках. Контрольні карти використовуються для контролю за середнім значенням та варіацією дохідності акцій. В даній роботі побудовано контрольні карти Шефарда для контролю за дохідністю портфеля у випадку коли дохідності акцій поводяться як стаціонарний процес Гауса.

В наступному розділі коротко описано метод побудови портфелю найменшої варіації та метод оцінювання його ваг. В третьому розділі даної роботи наведено основні поняття з теорії часових рядів та описано векторну авторегресійну модель з біжучим середнім (*Vector autoregressive moving average* (*VARMA*)) та розглянуто асимптотичні властивості дохідності даного портфелю. Наведено асимптотичний розподіл дохідності, а також обчислено математичне сподівання та варіацію дохідності. Четвертий розділ присвячено побудові контрольних карт Шефарда для дохідності портфелю та наведено два методи оцінки верхньої та нижньої меж для даної карти. В наступному розділі наведено приклад практичного застосування контрольних карт Шефарда для дохідності портфеля на прикладі дохідностей трьох акцій (*BMW*, *Metro*, *Siemens*) використовуючи дані за 2008-2009 роки. В останньому розділі роботи наведено висновки.

2. Побудова оптимального портфелю акцій

Позначимо через P_t ціну акції в момент часу t, тоді дохідність акції в момент часу t обчислюємо за наступною формулою:

$$X_t = 100 \cdot \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}.$$

Через X_t позначимо k вимірний вектор дохідностей акцій. Надалі ми припускаємо, що X_t поводиться як k вимірний стаціонарний процес з:

$$E\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu},\ Cov(\mathbf{X}_{t+h}, \mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\Gamma}(h) = (\gamma_{ij}(h)).$$

Очевидно, що варіація дохідностей вектора X_t рівна $\boldsymbol{\Gamma}(0)$.

Існує декілька методів побудови оптимального портфеля, враховуючи функцію корисності інвестора, його ставлення до ризику, вибір міри ризику, тощо. В даній роботі розглянемо лише портфель найменшої варіації, оскільки побудова контрольних карт для дохідностей інших портфелів є аналогічною. Отже, позначимо w=($w_1,\ldots,w_k$)’ вектор ваг портфелю. Ми припускаємо, що 1’w=1, де 1 є k вимірним вектором елементами якого є одиниці. Дане припущення означає, що всі кошти інвестора вкладені в наявні цінні папери. Вага i-того цінного паперу в портфелі позначаємо w_i. Мінімізуючи варіацію портфеля $\mathbf{w}'\boldsymbol{\Gamma}(0)\mathbf{w}$ при сталому рівні дохідності $\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}$, отримаємо портфель найменшої варіації

$$\mathbf{w}_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}},$$

характеристики якого наведено в наступних формулах:

$$R_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}\mathbf{1}},\ V_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}\mathbf{1}},$$

де R_{GMV} – дохідність портфеля найменшої варіації, а V_{GMV} – його варіація.

На практиці параметри розподілу дохідностей акцій $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Gamma}(0)$ є невідомими, а отже мають бути певним чином оцінені. Існує декілька методів оцінки невідомих параметрів, ми використаємо історичний метод. Для цього ми припускаємо, що наявною є випадкова вибірка векторів дохідностей акцій $X_1,\ldots,X_n$. На основі цієї вибірки будуємо наступні оцінки

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i\,,\ \hat{\boldsymbol{\Gamma}}(0) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})'.$$

Підставляючи попередні оцінки параметрів у вираз для w_{GMV}, отримаємо оцінки ваг портфеля та його характеристик

$$\hat{\mathbf{w}}_{GMV} = \frac{\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(0)^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(0)^{-1}\mathbf{1}}\,,\ \hat{R}_{GMV} = \frac{\hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(0)^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(0)^{-1}\mathbf{1}}\,,\ \hat{V}_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{1}'\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(0)^{-1}\mathbf{1}}.$$

3. Векторна авторегресійна модель з біжучим середнім (*VARMA*)

Надалі в роботі припускаємо, що дохідності акцій X_t поводяться як *VARMA* процес порядку (p, q).

Означення 1. Процес X_t поводиться як *VARMA*(p, q) процес, якщо X_t є розв'язком наступного стохастичного рівняння:

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=1}^{p}\mathbf{A}_i(\mathbf{X}_{t-i} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \sum_{j=1}^{q}\mathbf{B}_j\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}\,,$$

де процес $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}$ є багатовимірний процес білого шуму, тобто $E\boldsymbol{\varepsilon}_t = 0$, $Var\boldsymbol{\varepsilon}_t = \boldsymbol{\Sigma}$, $Cov(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_s) = 0$, для $t \neq s$, $\mathbf{A}_i$ та $\mathbf{B}_j$ матриці параметрів моделі розмірності $k \times k$.

Означення 2. VARMA(p, q) процес X_t називається (слабко) стаціонарним, якщо:

$E\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu}$, $Cov(\mathbf{X}_{t+h}, \mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\Gamma}(h) = (\gamma_{ij}(h))$.

Необхідною та достатньою умовою стаціонарності *VARMA*(p, q) процесу є відсутність розв'язків рівняння $\det(\mathbf{I} - \sum_{i=1}^{p}\mathbf{A}_i z^i) = 0$ всередині одичного круга $|z| \leq 1$, для всіх комплексозначних z. Надалі ми розглядаємо лише стаціонарні *VARMA*(p, q) процеси.

Припустивши, що параметри процесу $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_j$, $\boldsymbol{\mu}_0$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ є відомими, ми отримуємо, що випадкова величина $\sqrt{n}(\hat{R}_{GMV} - R_{GMV})$ є асимптотично нормально розподіленою з математичним сподіванням 0 та варіацією

$$\sigma^2 = V_{GMV}^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty}(q_h(\mathbf{1,1}) + 2R_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1,1})^2 + q_h(\mathbf{1,1})q_h(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\mu}) + q_h(\mathbf{1},\boldsymbol{\mu})^2 - 4R_{GMV}q_h(\mathbf{1,1})q_h(\mathbf{1},\boldsymbol{\mu})),$$

де $q_h(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = \mathbf{c}_1'\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}\boldsymbol{\Gamma}(h)\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}\mathbf{c}_2$ для деяких векторів c_1 та c_2, та n кількість спостережень ([10]). Використовуючи цей факт, як наближення для розподілу оцінки дохідності портфелю найменшої варіації можемо використати нормальний розподіл з параметрами R_{GMV} та σ^2 / n.

Очевидно, що параметри моделі є невідомими, проте, використовуючи метод найбільшої правдоподібності, можемо побудувати консистентні та нормально розподілені оцінки цих параметрів. Ці властивості оцінок забезпечують, що попередні результати залишаються правильними при заміні невідомих параметрів на їхні оцінки.

4. Побудова контрольних карт Шефарда.

Основним завданням контрольних карт є виявити істотні відхилення реальних даних від початкових припущень моделі. Тобто нам потрібно розрізнити реальний процес X_t від цільового процесу Y_t. Цільовий процес Y_t має задовольняти всі припущення нашої моделі. Важливим завданням є задати відношення між нашими процесами, оскільки саме це відношення описує, які зміни ми ігноруємо,а які ні. Оскільки нашою метою є проконтролювати лише математичне сподівання дохідності, то зв’язок між реальним та цільовим процесом ми задаємо наступним чином:

$$X_t = \begin{cases} Y_t, & \mathrm{t} < \tau \\ Y_t + \delta\sqrt{\sigma}, & \mathrm{t} \geq \tau \end{cases}.$$

В даному випадку ми припускаємо, що τ є невідомою константою. δ вимірює зміщення в математичному сподіванні в одиницях стандартного відхилення процесу Y_t. Кажемо, що процес є контрольованим, якщо $\tau = \infty$, інакше процес називаємо неконтрольованим.

Контрольна карта Шефарда дає сигнал,якщо

$$\left|X_t - \mu\right| > c\sqrt{\sigma}.$$

Константа *c* називається критичним значенням і саме вона визначає наскільки широкими є контрольні межі. Також припускається, що параметри μ та σ є відомими.

Надзвичайно важливою задачею є вибір параметра *c*. Часто використовують значення 3, проте в цьому випадку контрольні межі є незалежними від вибраної моделі. Можна використати для вибору *c* наступну схему. Ми вводимо поняття довжини карти до першого сигналу $t_A = \inf\left\{t \mid \left|X_t - \mu\right| > c\sqrt{\sigma}\right\}$, а також середньої довжини карти до першого сигналу *ARL=E(*t_A*)*. Тепер вибираємо *c* так, щоб *ARL* був рівний наперед заданому числу, для фінансових даних використовують значення *ARL=60* ([12]).

5. Контрольні карти на практиці

Для того, щоб продемонструвати використання контрольних карт на практиці виберемо дохідності наступних трьох акцій *BMW*, *Metro*, *Siemens* за 2008-2009 роки. Тобто в нашому випадку розмірність вектора дохідностей X_t є рівна 3. Крім того припустимо, що X_t поводиться як *VARMA(1,1)* процес, тобто

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}_1(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \mathbf{B}_1\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}$$

Ми також припускаємо, що залишки моделі $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ мають тривимірний нормальний розподіл з математичним сподіванням *(0,0,0)’* та дисперсією $\boldsymbol{\Sigma}$. Для побудови контрольної карти для дохідності портфель найменшої варіації нам потрібно спочатку оцінити наступні параметри: $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1$ а також обчислити автоковаріації нашого процесу $\boldsymbol{\Gamma}(h)$. Для цього використаємо перші 60 спостережень за 2008 рік. Ми вибираємо 60 спостережень, оскільки для вибору параметра *c* ми використовуємо *ARL*, що рівне 60, тобто ми наперед припускаємо, що поведінка нашого процесу зберігається в середньому на протязі 60 робочих днів. Оцінивши невідомі параметри моделі, мусимо обчислити характеристики вибіркової оцінки дохідності портфелю найменшої варіації R_{GMV} та σ^2 / n, тут *n*=60, тобто, як було зазначено вище, для оцінки ми використовуємо дані за попередні 60 робочих днів. Зауважимо, що математичне сподівання та варіація оцінки дохідності є невідомими, оскільки залежать від точних значень цих параметрів, тому ми використовуємо вибіркові оцінки для цих параметрів $\hat{R}_{GMV}$, та $\hat{V}_{GMV}$. Використовуючи ці параметри підбираємо значення *c* так, щоб *ARL* для нормально розподіленої величини з математичним сподіванням $\hat{R}_{GMV}$ та варіацією $\hat{\sigma}^2 / n$ був рівним 60. Для цього використовуємо метод симуляції. Знайшовши таким чином значення для *c*, яке позначимо $\hat{c}$, отримаємо межі для контрольної карти $\hat{R}_{GMV} \pm \hat{c}\sqrt{\hat{\sigma}^2 / n}$. Для контролю за дохідністю використовуємо наступну схему:

Використовуючи метод біжучого вікна, тобто використовуючи лише попередні 60 значень дохідностей акцій, оцінуємо дохідність портфелю найменшої варіації.

Якщо дохідність знаходиться в контрольних межах, то портфель змінювати непотрібно, тобто зміна параметрів моделі не є істотна. Якщо ж дохідність лежить поза контрольними межами, то значить, що параметри моделі зазнали істотних змін, а отже необхідно переоцінити всі параметри моделі (використовуючи дані за попередні 60 днів), обчислити нові ваги портфелю найменшої варіації, побудувати нові контрольні межі для карти і надалі використовувати нові оцінки для контролю.

Для оцінювання моделі використовується статистична програма *SAS*, а для статистичних обчислень та побудови графіків програма *R*.

Отже, перший крок. Використовуючи дані за перші 60 робочих днів 2008 року, тобто з 02.01.2008 по 27.03.2008, оцінуємо параметри дохідностей акцій, ваги портфелю найменшої варіації та його характеристики, а також *VARMA(1,1)* модель. Отримаємо:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{GMV} = (\text{-}0.3206, \text{-}\,0.1732, \text{-}\,0{,}7426)',$$

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(0) = \begin{pmatrix} 5.20139 & 1.88925 & 4.28665 \\ 1.88925 & 6.32665 & 2.60182 \\ 4.28665 & 2.60182 & 12.21569 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{w}}_{GMV} = (0.5522308, 0.4219836, 0.0257856)', \qquad \hat{R}_{GMV} = \text{-}0.2692767,$$

$$\hat{V}_{GMV} = 3{,}780134,$$

$$\mathbf{X}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}} = \hat{\mathbf{A}}_1(\mathbf{X}_{t-1} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \hat{\mathbf{B}}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}, \text{ де}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_1 = \begin{pmatrix} 0.687510 & -0.025676 & 0.111735 \\ 0.705353 & 0.647290 & -0.183587 \\ -1.835294 & -0.371103 & -0.187437 \end{pmatrix}$$ та

$$\hat{\mathbf{B}}_1 = \begin{pmatrix} 0.702620 & -0.106148 & 0.215009 \\ 0.837845 & 1.140605 & -0.564616 \\ -1.855883 & -0.590911 & 0.108734 \end{pmatrix}.$$

Тепер використовуючи результати наведені в розділі 3, маємо, що оцінка дохідності є нормально розподілена з параметрами $\hat{R}_{GMV}$ та $\hat{\sigma}^2$. Для обчислення варіації використовуємо наступну формулу

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{V}_{GMV}^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\hat{q}_h(\mathbf{1},\mathbf{1}) + 2\hat{R}_{GMV}^2 \hat{q}_h(\mathbf{1},\mathbf{1})^2 + \hat{q}_h(\mathbf{1},\mathbf{1})\hat{q}_h(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\mu}) + \hat{q}_h(\mathbf{1},\boldsymbol{\mu})^2 - 4\hat{R}_{GMV}\hat{q}_h(\mathbf{1},\mathbf{1})\hat{q}_h(\mathbf{1},\boldsymbol{\mu}))$$

,

де оцінки функції q знаходимо наступним чином

$$q_h(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = \mathbf{c}_1' \hat{\mathbf{\Gamma}}(0)^{-1} \hat{\mathbf{\Gamma}}(h) \hat{\mathbf{\Gamma}}(0)^{-1} \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_1' \hat{\mathbf{\Gamma}}(0)^{-1} \hat{\mathbf{A}}_1^{h-1} \hat{\mathbf{\Gamma}}(1) \hat{\mathbf{\Gamma}}(0)^{-1} \mathbf{c}_2 .$$

Підставивши необхідні значення в попередні формули, отримаємо, що оцінка дохідності портфелю найменшої варіації в нашому випадку є нормально розподілена з математичним сподіванням -0.2692767 та варіацією 0.0829357. Використовуючи метод симуляцій знаходимо критичне значення c при якому ARL є рівне 60: $\hat{c} = 2.394019$. Тепер можемо обчислити контрольні межі для дохідності портфелю. Нижня межа в даному випадку рівна $\hat{R}_{GMV} - \hat{c}\sqrt{\hat{\sigma}} = -0.9587196$, а верхня - $\hat{R}_{GMV} + \hat{c}\sqrt{\hat{\sigma}} = 0.4201662$. Очевидно, що початкове значення дохідності портфеля знаходиться в контрольних межах. На рисунку 1, контрольні межі зображено штриховою лінією. На наступний день, використовуючи дані за попередні 60 днів, знаходимо оцінку $\hat{\mu}$, обчислюємо дохідність нашого портфелю, використовуючи нову оцінку для параметра μ та оцінку для ваг портфелю (дану оцінку ми не перераховуємо, а використовуємо попередню). Значення дохідності знову знаходиться в контрольних межах, а отже немає необхідності перебудовувати портфель. На наступний день повторюємо ці самі обчислення. Дохідності портфелю лежатимуть в контрольних межах аж до 266 робочого дня наших спостережень, тобто до 16.04.2009 (див. рисунок 1), коли дохідність становитиме 0.448200697 і буде більшою за верхню межу контрольної карти, а отже портфель необхідно перебудувати, оскільки його дохідність зазнала істотних змін. Використовуючи дані за попередні 60 днів знову будуємо оцінки параметрів дохідностей акцій, ваг портфелю та його характеристик, а також оцінки моделі. Отримаємо наступні значення:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{GMV} = (0.566431, 0.266487, 0.171715)',$$

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(0) = \begin{pmatrix} 14.8881088 & 6.5935309 & 9.0074191 \\ 6.5935309 & 11.800652 & 5.7234542 \\ 9.0074191 & 5.7234542 & 11.784723 \end{pmatrix},$$

$\hat{\mathbf{w}}_{GMV} = (0.1264221, 0.4613564, 0.4122215)'$, $\hat{R}_{GMV} = 0.2653395$,

$\hat{V}_{GMV} = 8.637205$,

$\mathbf{X}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}} = \hat{\mathbf{A}}_1(\mathbf{X}_{t-1} - \hat{\boldsymbol{\mu}}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \hat{\mathbf{B}}_1\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}$, де

$$\hat{\mathbf{A}}_1 = \begin{pmatrix} 0.268230 & -0.483665 & 4.028488 \\ 0.353070 & 1.816961 & 0.222717 \\ -0.179899 & -0.081963 & -0.569399 \end{pmatrix}$$ та

$$\hat{\mathbf{B}}_1 = \begin{pmatrix} 0.324930 & -0.216201 & 3.994159 \\ 0.648349 & 1.540153 & 0.297620 \\ -0.052050 & -0.198204 & -0.539778 \end{pmatrix}.$$

Відзначимо, що сподівана дохідність нового портфелю є меншою ніж дохідність портфелю, який ми мали до перебудови. Цей факт не є дивним, оскільки ми розглядає портфель найменшої варіації, а варіація нового портфелю є меншою ніж попереднього 8.637205 та 10.10353 відповідно. Аналогічно, як це було зроблено вище, обчислюємо параметри розподілу оцінки дохідності. Отримаємо, що дохідність нового портфелю є нормально розподілена з математичним сподіванням 0.2653395 та варіацією 0.1127128. Залишилося лише обчислити контрольні межі та параметр *c*. Використовуючи метод симуляцій знаходимо, що значення *c* при якому *ARL* буде рівним 60 становить $\hat{c} = 2.394019$, тобто залишилося незмінним, що і не дивно, оскільки наперед задане значення *ARL* для нормального розподілу залежить лише від кванти лі нормального розподілу з параметрами 0 та 1, а не від параметрів заданого розподілу. Контрольні верхня та нижня межі є рівними 1.073249 та -0.5425701 відповідно. На рисунку 1, за допомогою штрих пунктирної лінії зображено нові контрольні межі, які дохідність портфелю не перетне до кінці 2009 року, а отже і до кінця року у інвестора не було необхідності змінювати ваги портфелю, тобто перебудовувати сам портфель.

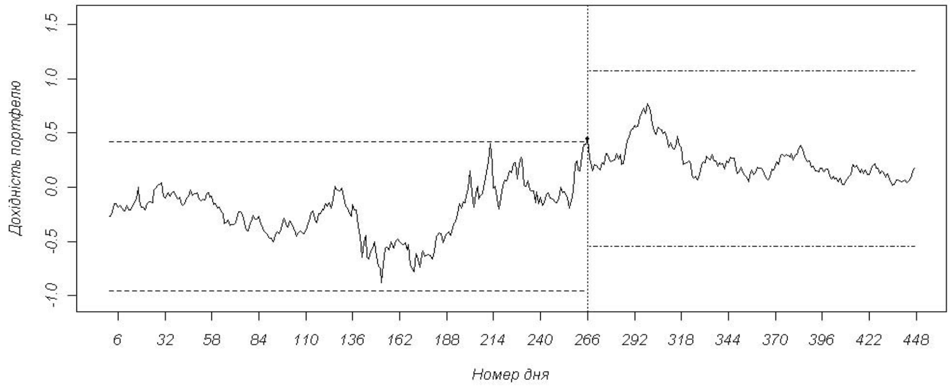

Рисунок 1. Поведінка дохідності портфелю найменшої варіації та контрольні межі у випадку залежних дохідностей акцій.

6. Висновки

В роботі розглянуто метод побудови контрольних карт Шефарда для дохідності портфелю найменшої варіації за умови, що дохідності акцій поводяться як *VARMA(1,1)* процес, а отже не є незалежними. Використовуючи дані за 2008-2009 роки для акцій трьох компаній *BMW, Metro* та *Siemens*, показано на прикладі портфелю найменшої варіації, що немає необхідності кожного дня при переоцінці параметрів дохідності акцій перебудовувати сам портфель. Оскільки частіше за все дохідність портфелю змінюється не істотно. Тому інвестор, використовуючи контрольну карту Шефарда має можливість зекономити кошти та час, які є необхідними для перебудови портфелю. Крім того, варто відзначити, що контрольні карти дають інвестору можливість досить швидко відреагувати на зміну припущень початкової моделі, та з якомога меншими втратами перебудувати портфель і, у випадку портфеля найменшої варіації, мінімізувати ризик портфеля, за який в даному випадку вибрано варіацію.

1. Markowitz, H. Portfolio selection // Journal of Finance. – 1952. №7. – p. 77-91.
2. Merton, R. C. An analytical derivation of the efficient frontier // Journal of Financial and Quantitative Analysis – 1972. №7. – p. 1851-1872.
3. Sharpe, William F. Mutual fund performance // Journal of Business. – 1966. – p. 119-138.
4. Sharpe, William F. The Sharpe Ratio // Journal of Portfolio Management. – 1994. – p. 49-58.
5. Okhrin, Y., W. Schmid. Distributional properties of optimal portfolio weights // Journal of Econometrics. – 2006. №134. – p. 235-256.
6. Conrad, J., Kaul, G. Time-variation in expected returns // Journal of Business. – 1988. №61. – p. 409-425.
7. Lo, A., MacKinley, A.C. An econometric analysis of non-synchronous trading // Journal of Econometrics. – 1991. №45. – p. 181-212
8. Mech, T. Portfolio return autocorrelation // Journal of Financial Economics. – 1993. №34. – p. 307-344.

9. Shiraishi, H., Taniguchi, M. Statistical estimation of optimal portfolios for non-Gaussian dependent returns of assets // Waseda university time series discussion paper. – 2005.
10. Bodnar, T., Schmid, W., Zabolotskyy, T. Statistical inference of the efficient frontier for dependent asset returns // Statistical Papers. – 2009. №50. – p. 593-604.
11. Shewhart, W. Economic control of quality of manufactured product // Toronto, Canada: D. van Nostrand Company, Inc. – 1931.
12. Severin, T., Schmid, W. Monitoring changes in GARCH processes // Allgemeines Statistisches Archiv. – 1999. №83. – p. 281-307.

SHEWARD CONTROL CHARTS FOR PORTFOLIO RETURNS

T. Zabolotskyy

Lviv banking institute of University of Banking of the National Bank of Ukraine
9, Shevchenka St., Lviv 79009
E-mail: zjabka@yahoo.com

In the work Sheward control charts for portfolio returns in the case when asset returns are no longer independent are considered. The example of the application of these control charts is provided using the returns of three assets (*BMW*, *Metro*, *Siemens*) for the period from January 2008 to December 2009. It is shown that it is not necessary to reconstruct the portfolio every day which gives investor the possibility to save the money and time.

Key words: asset returns, minimum variance portfolio, Sheward control chart, vector autoregressive moving average model.

КОНТРОЛЬНЫЕ КАРТЫ ШЕФАРДА ДЛЯ ДОХОДНОСТИ ПОРТФЕЛЯ АКЦИЙ

Т. Заболоцький

Львовский институт банковского дела Университета банковского дела
Национального банка Украины
79000 г. Львов, проспект Шевченко 9
E-mail: zjabka@yahoo.com

В роботе рассмотрено контрольные карты Шефарда для доходности портфеля акций, в случае когда доходности акций не есть независимыми. Применение карты проведено на примере данных за 2008-2009 годы для акций трех компаний *BMW*, *Metro*, *Siemens*. Показано, что нет необходимости каждый день перестраивать портфель, что дает возможность инвестору сэкономить время и деньги.

Ключевые слова: векторная авто регрессионная модель с бегущим средним, доходность акции, контрольная карта Шефарда, портфель наименьшей вариации.